

4-1. Ciągi i granice.

Szanowni Państwo, poniżej przedstawione są podstawowe informacje dotyczące granic ciągów.

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do granicy $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |a_n - g| < \varepsilon .$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ lub $a_n \rightarrow g$.

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n > M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ lub $a_n \rightarrow +\infty$ (można też opuścić "+").

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall n \geq N a_n < M.$$

Piszemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lub $a_n \rightarrow -\infty$.

Granice $+\infty$ i $-\infty$ to tzw. granice **niewłaściwe**.

Uwaga: Jeśli $a_n \rightarrow g \in \mathbb{R}$ (czyli ciąg dąży do granicy, która jest liczbą), to mówimy, że ciąg (a_n) jest **zbieżny**. W przeciwnych wypadkach (gdy granica jest nieskończona lub nie istnieje) mówimy, że ciąg (a_n) jest **rozbieżny**.

TWIERDZENIA:

0. CIĄG ZBIEŻNY MA TYLKO JEDNĄ GRANICĘ I JEST OGRANICZONY.

1. MONOTONICZNY CIĄG OGRANICZONY JEST ZBIEŻNY.

2. GRANICA SUMY JEST SUMĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n + b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

3. GRANICA RÓŻNICY JEST RÓŻNICĄ GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n - b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

4. GRANICA ILOCZYNU JEST ILOCZYNEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, to ciąg $(a_n b_n)$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n .$$

5. GRANICA ILORAZU JEST ILORAZEM GRANIC.

Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $b_n \neq 0$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$, to ciąg $(\frac{a_n}{b_n})$ jest zbieżny i

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} .$$

6. ZBIĘŻNOŚĆ I GRANICA NIE ZALEŻĄ OD POMINIĘCIA LUB ZMIANY SKOŃCZENIE WIELU POZĄTKOWYCH WYRAZÓW CIĄGU.

7. SŁABE NIERÓWNOŚCI ZACHOWUJĄ SIĘ PRZY PRZEJŚCIU DO GRANICY.
Dokładniej, jeśli ciągi (a_n) i (b_n) są zbieżne, przy czym $a_n \leq b_n$ (odpowiednio $a_n \geq b_n$), to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ (odpowiednio $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$).

8. KILKA PODSTAWOWYCH GRANIC.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = +\infty \text{ dla } a > 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = 0 \text{ dla } |a| < 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n \text{ nie istnieje nawet w sensie granicy niewłaściwej}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \text{ dla } a > 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

9. Z GRANICĄ MOŻNA WCHODZIĆ POD PIERWIASTEK.

Dokładniej, jeśli ciąg (a_n) jest zbieżny, przy czym $a_n \geq 0$, to dla $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}.$$

10. GRANICA POTĘGI.

Jeśli ciąg $a_n \rightarrow a$, przy czym $a_n \geq 0$, oraz $b_n \rightarrow b$ to

$$a_n^{b_n} \rightarrow a^b.$$

(Uwaga jednak na symbole nieoznaczone - patrz niżej).

11. TWIERDZENIE O TRZECZ CIĄGACH.

Jeżeli ciągi (a_n) , (b_n) , (c_n) spełniają warunek

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

oraz ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do tej samej granicy g , to ciąg (b_n) też jest zbieżny i jego granicą jest g .

12. KRYTERIUM D'ALEMBERTA.

Jeżeli (a_n) jest ciągiem o wyrazach niezerowych oraz istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g < 1,$$

to ciąg (a_n) jest zbieżny do zera.

Jeżeli istnieje granica

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g > 1,$$

to ciąg (a_n) jest rozbieżny, a ciąg $(|a_n|)$ jest rozbieżny do $+\infty$.

Uwaga: Podstawowym zastosowaniem kryterium d'Alemberta jest badanie zbieżności szeregów, ale podana wyżej wersja stosuje się do badania zbieżności ciągów. O szeregach będzie mowa dopiero w kolejnym semestrze.

Powyższe własności zachowują się w przypadku ciągów mających granice niewłaściwe (tzn. rozbieżnych do $\pm\infty$), o ile nie prowadzi to do wyrażeń (symboli) nieoznaczonych.

13. SYMBOLE (WYRAŻENIA) NIEOZNACZONE.

Symbole nieoznaczone, to

$$\begin{aligned} \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad 0 \cdot \infty, \\ 0^0, \quad \infty^0, \quad 1^\infty. \end{aligned}$$

Jeśli więc otrzymujemy granicę powyższego typu, to nic o niej nie wiadomo.

14. PAMIĘTAJ O WZORACH SKRÓCONEGO MNOŻENIA:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{y} &= \frac{x - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} &= \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}}. \end{aligned}$$