

4-2. Ciągi i granice.

Szanowni Państwo, poniżej przedstawione są informacje dotyczące definicji granicy ciągu oraz metody różnicowej.

1. Definicja granicy. Formalna definicja granicy ciągu jest wyrażona w sposób, który jest bardzo precyzyjny matematycznie, ale może być trudny do pojęcia. Aby pokonać te trudności przypomnijmy sobie tą definicję.

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest **zbieżny** do granicy $g \in \mathbb{R}$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n \geq N \quad |a_n - g| < \varepsilon.$$

W celu zrozumienia tej definicji najpierw odczytujemy “krzaczkę” czyli kwantyfikatory podane w formule (*):

“Dla każdego ε (epsilon) większego od zera istnieje N takie, że dla każdego n , które jest większe bądź równe N zachodzi następująca nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.”

Dla ułatwienia możemy podzielić tę informację na cztery etapy

- (a) Dla każdego $\varepsilon > 0$
- (b) istnieje N takie,
- (c) że dla każdego $n \geq N$
- (d) zachodzi nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$.

A następnie przeanalizować każdy z tych etapów.

(a) Ten etap oznacza, że wybieramy sobie dowolną liczbę ε większą od zera. Jest ogólnie przyjęte, że w takich definicjach myślimy sobie, że ε jest bardzo małą liczbą blisko zera.

(b) Dla tego epsilon musimy teraz znaleźć pewną liczbę N . Notacja wskazuje, że N może być jakąś (dużą) liczbą naturalną i na razie możemy o niej tak myśleć. Ta liczba powinna posiadać pewną własność, która jest przedstawiona w kolejnych etapach.

(c) Tu dowiadujemy się, że liczba N może być traktowana jako “moment” od którego coś zaczyna się dziać. To znaczy, od tego “momentu”, czyli dla $n = N$, $n = N + 1$, $n = N + 2$ itd. (czyli dla wszystkich $n \geq N$) zaczyna być spełniona nierówność z kolejnego etapu.

(d) Nierówność $|a_n - g| < \varepsilon$ oznacza, że a_n jest blisko g (bo myślimy, że ε jest dowolnie małe). Jak pamiętamy z poprzednich wykładów tę nierówność można zapisać w formie równoważnej. Oznacza ona, że $g - \varepsilon < a_n < g + \varepsilon$ czyli, że $a_n \in (g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Tak więc nierówność z etapu (d) to informacja, że a_n należy do przedziału $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$. Taki przedział nazywamy *otoczeniem* punktu g o promieniu ε .

Po dokonaniu analizy poszczególnych etapów przystępujemy do syntezy (czyli zebrania uzyskanych informacji w całość):

Bierzemy dowolne ε większe od zera. Dla tego ε musimy znaleźć “moment” N taki, że od tego “momentu” wszystkie wyrazy ciągu (a_n) będą wpadać w otoczenie punktu g o promieniu ε .

W końcu możemy przetrwać tę definicję tworząc bardziej życiowy model wyjaśniający jak ona działa.

Możemy więc myśleć, że ta definicja opisuje grę dwóch graczy. Przybory dane do gry to ciąg (a_n) i liczba rzeczywista g . Pierwszy gracz zadaje wartość epsilon większą od zera (np. $\varepsilon = \frac{1}{7}$). Następnie na osi liczbowej zaznacza otoczenie punktu g o promieniu ε , czyli przedział $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ i oddaje inicjatywę w ręce drugiego gracza. Drugi gracz bada zachowanie ciągu (a_n) w celu znalezienia “momentu” N takiego, że dla $n \geq N$ wszystkie wyrazy ciągu wpadają do przedziału wskazanego przez pierwszego gracza. Np. drugi gracz może stwierdzić, że a_1 oraz a_2 nie należą do wskazanego przedziału, ale a_3 i a_4 już należą. To jednak nie koniec, bo okazuje się, że a_5 nie należy do tego przedziału i dopiero od “momentu” $N = 6$ wszystkie

pozostałe wyrazy $a_6, a_7, a_8, \dots$ już należą do przedziału wskazanego przez pierwszego gracza. Wówczas drugi gracz mówi, że dla tego ε znalezione N wynosi 6 i wygrywa grę.

[**Uwaga:** Oczywiście drugi gracz może ogłosić, że $N = 100$ i też wygra, bo w regułach gry nie jest powiedziane, że musimy szukać pierwszego “momentu”, każdy późniejszy od pierwszego też jest dobry.]

Dzięki temu możemy stwierdzić, że definicja granicy ciągu oznacza, że w powyższej grze **niezależnie od tego jak małe $\varepsilon > 0$ wskaże pierwszy gracz, drugi gracz zawsze będzie mógł wskazać N , dzięki któremu wygra grę** w sytuacji, gdy liczba g jest granicą ciągu. Natomiast jeśli g nie jest granicą danego ciągu, to pierwszy gracz zawsze będzie mógł znaleźć tak małe ε , że drugi gracz przegra.

Teraz możemy zobaczyć jak to wszystko działa w praktyce.

Przykład 1. Rozważmy zadanie polegające na wykazaniu z definicji, że granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ jest 0.

Aby rozwiązać to zadanie zaczynamy od końca czyli od etapu (d). Mamy do czynienia z nierównością

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

którą przekształcamy do

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

i **rozwiązujemy ze względu na n** w sposób następujący

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Natępnie szukamy “momentu” N , który “wciska” się w powyższą nierówność tak:

$$\frac{1}{\varepsilon} < N \leq n.$$

Jeśli chcemy, żeby N było liczbą naturalną, to musimy użyć części całkowitej (tzw. cechy) i stwierdzić, że

$$N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1.$$

Z tym N możemy przedstawić rozwiązanie naszego zadania zgodne z wyjaśnionymi wcześniej regułami:

Niech dane będzie dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas dla $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ mamy, że dla wszystkich $n \geq N$ zachodzi

$$n \geq N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1 > \frac{1}{\varepsilon},$$

co oznacza, że

$$\varepsilon > \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|,$$

a więc

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Końcowa ważna uwaga dotyczy tego, że definicję zbieżności ciągu można modyfikować uzyskując równoważne definicje zbieżności ciągu. Na przykład wcale nie musimy myśleć, że liczba N z etapu (b) jest naturalna, ponadto nierówność $n \geq N$ z etapu (c) możemy zastąpić nierównością $n > N$. Chodzi o to, aby utrzymać sens definicji: “Od pewnego momentu już wszystkie wyrazy ciągu wpadają w zadane (dowolnie małe) otoczenie granicy”. Takie

modyfikacje nie zmieniają tego sensu i dlatego formułę (*) możemy zastąpić następującą **równoważną** formułą

$$(**) \quad \forall_{\varepsilon > 0} \exists N \forall_{n \geq N} |a_n - g| < \varepsilon.$$

Ta formuła lepiej sprawdza się w praktyce, co widać na modyfikacji Przykładu 1.

Przykład 2. Rozważmy ponownie zadanie polegające na wykazaniu z definicji, że granicą ciągu $a_n = \frac{1}{n}$ jest 0.

Aby rozwiązać to zadanie znów zaczynamy od końca czyli od etapu (d). Mamy do czynienia z nierównością

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon,$$

którą przekształcamy do

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

i **rozwiązujemy ze względu na n** w sposób następujący

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Korzystając z formuły (**) możemy natychmiast uznać, że to co nam wyszło po lewej stronie jest naszym szukanym N . To znaczy

$$N = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Z tym N możemy przedstawić rozwiązanie naszego zadania zgodne z formułą (**):

Niech dane będzie dowolne $\varepsilon > 0$. Wówczas dla $N = \frac{1}{\varepsilon}$ mamy, że dla wszystkich $n > N$ zachodzi

$$n > N = \frac{1}{\varepsilon},$$

co oznacza, że

$$\varepsilon > \frac{1}{n} = \left| \frac{1}{n} - 0 \right|,$$

a więc

$$|a_n - 0| < \varepsilon.$$

Mam nadzieję, że dzięki tym wyjaśnieniom nie będzie dla Państwa problemem samodzielne przejście przez “krzaczkę” definiującą pojęcie granicy niewłaściwej $\pm\infty$:

DEFINICJA: Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $+\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall_{n \geq N} a_n > M$$

(tu myślimy, że M jest dowolnie dużą liczbą dodatnią).

Ciąg (a_n) jest **rozbieżny** do $-\infty$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\forall M \exists N \forall_{n \geq N} a_n < M$$

(a tu myślimy, że M jest ujemne i $|M|$ jest dowolnie duże, np. $M = -10^{2020}$ itd.).

2. Metoda różnicowa. Zadanie polegające na podaniu kolejnej liczby pasującej do danego ciągu kilku liczb często pojawia się w testach sprawdzających zdolności umysłowe badanej osoby. O ile matematycznie jest to zadanie niezbyt precyzyjnie określone, to poprawna odpowiedź powinna opierać się na schemacie, który łączy dane elementy ciągu i pozwala na “odkrycie” kolejnego elementu.

Przykład 1. Zadanie polegające na podaniu kolejnego wyrazu ciągu

(♣) $-2, 1, 4, 7, 10, \dots$

ma łatwe poprawne rozwiązanie, w którym szukaną kolejną liczbą ciągu jest 13. Wynika to z tego, że różnice kolejnych wyrazów danego ciągu są stałe i wynoszą 3. Tak więc jest to schemat, który mocno sugeruje, że mamy tu do czynienia z ciągiem arytmetycznym.

Oczywiście, ktoś mógłby uznać, że równie dobrą odpowiedzią jest liczba -2 i upierać się, że dany ciąg przedłuża się następująco

$$-2, 1, 4, 7, 10, -2, 1, 4, 7, 10, -2, 1, 4, 7, 10, \dots$$

dając bardzo ładny ciąg okresowy. Niestety tego typu podejście nie jest honorowane w testach na inteligencję i dlatego lepiej uznać, że poprawną odpowiedzią jest liczba 13.

Czasem oprócz kolejnego wyrazu ciągu warto jeszcze podać wzór rekurencyjny tego ciągu i jego wzór ogólny. W tym celu jakoś musimy nazwać ten ciąg, np.

$$a_1 = -2, a_2 = 1, a_3 = 4, a_4 = 7, a_5 = 10, \dots$$

czyli nasz ciąg jest nazwany jako ciąg (a_n) , gdzie $n \in \mathbb{N}$.

Wzór rekurencyjny to taki, który pozwala podać kolejny wyraz ciągu w oparciu o jego poprzednie wyrazy. W powyższym przykładzie łatwo możemy podać taki wzór. Wystarczy wystartować od informacji początkowej, że $a_1 = -2$ i stwierdzić, że kolejny wyraz powstaje z poprzedniego przez dodanie liczby 3. Dzięki temu dostajemy następujący wzór rekurencyjny:

$$a_1 = -2, \quad a_{n+1} = a_n + 3.$$

Wzór ogólny ciągu (a_n) to taki, który podaje jak a_n zależy od samego n . W powyższym przykładzie możemy stworzyć taki wzór korzystając ze znanej formuły na ciąg arytmetyczny. Można też skorzystać z innej metody. Skoro różnica kolejnych wyrazów wynosi 3, to $a_n = 3n + x$, gdzie x jest pewną liczbą. Skoro $a_1 = -2$, to $x = -5$. Dzięki temu uzyskujemy następujący wzór ogólny:

$$a_n = 3n - 5.$$

Mając taki wzór ogólny można obliczyć kilka początkowych wyrazów ciągu i sprawdzić, że rzeczywiście zgadzają się one z danym ciągiem (♣).

Warto zaznaczyć, że czasem łatwo jest podać kolejny wyraz ciągu, ale trudniej jest znaleźć wzór rekurencyjny i wzór ogólny ciągu. Widać to w kolejnym przykładzie.

Przykład 2. Aby uzupełnić ciąg

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$$

zgadujemy, że mamy tu do czynienia z ciągiem liczb pierwszych i szukanym kolejnym elementem ciągu jest 17.

Możemy dla odmiany nazwać ten ciąg (p_n) i zapytać o wzór rekurencyjny tego ciągu. Można taki wzór podać słownie: p_{n+1} to najmniejsza liczba większa od p_n , która nie dzieli się przez liczby $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Gorzej jest ze wzorem ogólnym i warto wiedzieć, że za znalezienie dużych liczb pierwszych są przyznawane nagrody pieniężne. Np. nagroda 100 000 USD (dolarów amerykańskich) została wypłacona w roku 2008 za znalezienie liczby pierwszej, która (jako pierwsza) przekroczyła barierę wielkości polegającą na posiadaniu co najmniej dziesięciu milionów cyfr. Obecnie największą liczbą pierwszą jest $2^{82589933} - 1$, która ma ponad 24 miliony cyfr i została znaleziona w 2018 roku. Kolejna nagroda pieniężna jest oferowana za znalezienie liczby pierwszej posiadającej co najmniej sto milionów cyfr. To daje nam pojęcie o tym, że nie mamy żadnego sensownego wzoru ogólnego na ciąg (p_n) , który pozwalałby wyliczyć p_n dla danego n .

Metoda różnicowa opiera się na obliczeniu różnic kolejnych wyrazów ciągu i zgadywaniu jak zachowuje się ciąg tych różnic. Ta metoda nie działa w Przykładzie 2., ale działa w Przykładzie 1. i kolejnym przykładzie.

Przykład 3. Rozważmy następujące zadanie: Podaj kolejny wyraz ciągu

(♣♣) $1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$

oraz wzór rekurencyjny tego ciągu i jego wzór ogólny.

Najpierw postaramy się znaleźć kolejny wyraz ciągu (♣♣), bo tylko to jest wymagane w testach na inteligencję :)

W tym celu patrzmy na różnice kolejnych wyrazów ciągu (♣♣):

$$6 - 1 = 5, \quad 15 - 6 = 9, \quad 28 - 15 = 13, \quad 45 - 28 = 17, \quad 66 - 45 = 21.$$

Te różnice dają więc następujący ciąg

(♣♣♣) $5, 9, 13, 17, 21, \dots$

Akurat taki ciąg możemy łatwo przedłużyć, ale gdybyśmy nadal mieli problem, to możemy jeszcze popatrzeć na ciąg różnic ciągu (♣♣♣):

$$9 - 5 = 4, \quad 13 - 9 = 4, \quad 17 - 13 = 4, \quad 21 - 17 = 4.$$

Aha, czyli ciąg (♣♣♣) jest ciągiem arytmetycznym, który przedłużamy liczbą $21 + 4 = 25$. Dzięki temu możemy przedłużyć ciąg (♣♣). Wystarczy dodać uzyskaną przed chwilą liczbę 25 do ostatniego podanego wyrazu ciągu (♣♣), czyli do 66. Mamy więc $66 + 25 = 91$ i po przedłużeniu ciąg (♣♣) wygląda tak:

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, 91 \dots$$

W skrócie opisana metoda wygląda następująco:

Mamy

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, \dots$$

$$5, 9, 13, 17, 21, \dots$$

$$4, 4, 4, 4, \dots$$

przedłużamy zaczynając od dołu idąc w górę

$$1, 6, 15, 28, 45, 66, 66 + 25 = 91$$

$$5, 9, 13, 17, 21, 21 + 4 = 25$$

$$4, 4, 4, 4, 4$$

i gotowe :)

Po zdaniu testu na inteligencję możemy przystąpić do trudniejszego zadania, czyli znalezienia wzorów na ciąg (♣♣).

W tym celu oznaczamy ciąg (♣♣) jako (a_n) , a ciąg różnic (♣♣♣) jako (b_n) . Zauważmy, że oczywiście

$$b_n = a_{n+1} - a_n.$$

Z tego wynikają dwie rzeczy.

Po pierwsze

$$a_{n+1} = a_n + b_n,$$

więc jeśli znajdziemy wzór ogólny na ciąg (b_n) , to powyższe równanie da nam wzór rekurencyjny na ciąg (a_n) .

Po drugie

$$b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-1} = a_2 - a_1 + a_3 - a_2 + a_4 - a_3 + \dots + a_n - a_{n-1} = a_n - a_1,$$

więc w skrócie

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k,$$

co da nam wzór ogólny na ciąg (a_n) , o ile uda się nam obliczyć sumę $\sum_{k=1}^{n-1} b_k$.

Należy więc najpierw znaleźć wzór ogólny na ciąg (b_n) . W naszym przykładzie jest to proste, bo jest to ciąg arytmetyczny o różnicy 4 oraz $b_1 = 5$ i łatwo widać, że

$$b_n = 4n + 1.$$

[Uwaga ważne: Jeśli jest problem ze znalezieniem wzoru na ciąg (b_n) to, jak mówiliśmy poprzednio, należy popatrzeć na ciąg różnic kolejnych wyrazów ciągu (b_n) , nazwać go (c_n) i użyć go do znalezienia wzoru ogólnego na ciąg (b_n) . W naszym przykładzie ciąg (c_n) jest stały i $c_n = 4$.]

Korzystając z tego, że $b_n = 4n + 1$, $a_{n+1} = a_n + b_n$ oraz $a_1 = 1$ otrzymujemy **wzór rekurencyjny** na ciąg (a_n) :

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + 4n + 1.$$

Aby znaleźć wzór ogólny na ciąg (a_n) obliczamy sumę

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} b_k &= \sum_{k=1}^{n-1} (4k + 1) = \sum_{k=1}^{n-1} 4k + \sum_{k=1}^{n-1} 1 = 4 \sum_{k=1}^{n-1} k + (n-1) = \\ &= 4 \cdot \frac{1 + (n-1)}{2} (n-1) + n-1 = 2n(n-1) + n-1 = 2n^2 - n - 1. \end{aligned}$$

Tak więc

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k = 1 + (2n^2 - n - 1) = 2n^2 - n,$$

czyli **wzór ogólny** na ciąg (a_n) to

$$a_n = 2n^2 - n.$$

Warto zaznaczyć, że dzięki temu widać ukryty schemat rządzący ciągiem (a_n) . Ponieważ $a_n = 2n^2 - n = n(2n - 1)$, to ciąg () ma postać

$$1 = 1 \cdot 1, \quad 6 = 2 \cdot 3, \quad 15 = 3 \cdot 5, \quad 28 = 4 \cdot 7, \quad 45 = 5 \cdot 9, \quad 66 = 6 \cdot 11$$

i badana osoba, która zauważył ten schemat (bez dzikich obliczeń) jest w stanie podać kolejny wyraz jako $91 = 7 \cdot 13$.

Ostatnia już uwaga dotyczy tego, że mając wzór ogólny na ciąg (b_n) możemy próbować zgadnąć wzór ogólny na ciąg (a_n) w sposób następujący. Skoro $b_n = 4n + 1$, to w przybliżeniu $b_n \sim 4n$. Natomiast a_n w przybliżeniu to suma początkowych wyrazów ciągu (b_n) . Czyli, w przybliżeniu

$$a_n \sim \sum_{k=1}^{n-1} b_k \sim 4 \sum_{k=1}^{n-1} k \sim 4 \cdot \frac{n^2}{2} = 2n^2$$

(bo $\sum_{k=1}^{n-1} k \sim \frac{n^2}{2}$). Dzięki temu widać, że nasz ciąg (a_n) ma coś wspólnego z ciągiem $(2n^2)$, który wygląda tak:

$$2, 8, 18, 32, 50, 72, \dots$$

Porównując ten ostatni ciąg z ciągiem () zgadujemy, że

$$1 = 2 - 1, \quad 6 = 8 - 2, \quad 15 = 18 - 3, \quad 28 = 32 - 4, \quad 45 = 50 - 5, \quad 66 = 72 - 6,$$

co pozwala na odkrycie, że $a_n = 2n^2 - n$.