

Kresy zbiorów

Szanowni Państwo. Poniżej znajdują się podstawowe informacje dotyczące kresów zbiorów.

1. Zbiory. Będziemy tu rozważać zbiory, które są podzbiorami liczb rzeczywistych. W skrócie $A \subset \mathbb{R}$ oznacza, że zbiór A jest podzbiorem zbioru liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$. Jak mogą wyglądać takie zbiory to wcale nie jest jasne. Oczywiście możemy myśleć, że zbiór A składa się z paru punktów, z przedziałów, albo z ciągu punktów. Istnieje jednak wiele “dzikich” konstrukcji generujących trudne do pojęcia zbiory. Na szczęście tym nie będziemy się tu zajmować.

2. Ograniczenia. Mając zbiór A (jak wspomnieliśmy wcześniej myślimy w tym wykładzie, że $A \subset \mathbb{R}$, ponadto warto też myśleć, że A jest niepusty, czyli $A \neq \emptyset$) możemy się zastanowić czy ten zbiór jest *ograniczony*. Terminologia jest następująca: zbiór ograniczony to taki, który ma *ograniczenie górne* i *ograniczenie dolne*.

Definicja. Liczba rzeczywista G jest ograniczeniem górnym zbioru A jeśli każdy element zbioru A jest mniejszy bądź równy G . Co w skrócie można zapisać tak

$$\forall_{a \in A} a \leq G.$$

Podobnie

Definicja. Liczba rzeczywista D jest ograniczeniem dolnym zbioru A jeśli każdy element zbioru A jest większy bądź równy D . Co w skrócie można zapisać tak

$$\forall_{a \in A} a \geq D.$$

Uwaga: Zbiór który nie ma ograniczenia górnego to zbiór nieograniczony od góry, a zbiór który nie ma ograniczenia dolnego to zbiór nieograniczony od dołu.

3. Kresy. Kresy zbioru to tzw. *supremum* (kres górny) związane z ograniczeniem górnym zbioru oraz *infimum* (kres dolny) związane z ograniczeniem dolnym zbioru. Poniżej wyjaśnimy jak działa supremum, a potem powtórzymy te informacje dla infimum.

4. Supremum. Supremum zbioru A oznaczamy jako $\sup A$, bądź $\sup(A)$.

Jeśli zbiór A jest nieograniczony od góry to piszemy, że $\sup A = \infty$ (albo $\sup A = +\infty$).

Jeśli zbiór A jest ograniczony od góry, to jego supremum jest najlepszym górnym ograniczeniem, czyli jest to **najmniejsze górne ograniczenie**.

Tak więc liczba g (uwaga, proszę nie pomylić tego g z granicą) jest równa $\sup A$ wtedy i tylko wtedy gdy

- a) g jest górnym ograniczeniem zbioru A ,
- b) każda liczba mniejsza od g już nie jest górnym ograniczeniem zbioru A .

W skrócie można to zapisać tak:

a) $\forall_{a \in A} a \leq g,$

b) $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a > g - \varepsilon.$

Gdzie formuła w a) jest raczej jasna. Natomiast formuła w b) oznacza, że jeśli trochę zmniejszymy g (tzn. odejmiemy od g jakiś “mini” ε , to $g - \varepsilon$ nie będzie już ograniczeniem górnym zbioru A , czyli znajdziemy jakiś element zbioru A , który jest większy od $g - \varepsilon$.

Uwaga: Supremum zbioru A może, ale wcale nie musi należeć do zbioru A . Możemy to zobaczyć poniżej.

Przykład. Niech A będzie przedziałem domkniętym $[0, 1]$. Wówczas $\sup A = 1 \in A$. Natomiast jeśli A jest przedziałem otwartym $(0, 1)$, to $\sup A = 1 \notin A$.

Uwaga! Jeśli $\sup A = \infty$, to ZAWSZE $\sup A = \infty \notin A$. Po prostu ∞ nie jest liczbą tylko symbolem i dlatego nie ma żadnych szans, aby należeć do zbioru A . Proszę o tym pamiętać :)

4. Infimum. Infimum zbioru A oznaczamy jako $\inf A$, bądź $\inf(A)$.

Jeśli zbiór A jest nieograniczony od dołu to piszemy, że $\inf A = -\infty$.

Jeśli zbiór A jest ograniczony od dołu, to jego infimum jest najlepszym dolnym ograniczeniem, czyli jest to **największe dolne ograniczenie**.

Tak więc liczba d jest równa $\inf A$ wtedy i tylko wtedy gdy

a) d jest dolnym ograniczeniem zbioru A ,

b) każda liczba większa od d już nie jest dolnym ograniczeniem zbioru A .

W skrócie można to zapisać tak:

$$\text{a) } \forall_{a \in A} a \geq d,$$

$$\text{b) } \forall_{\varepsilon > 0} \exists_{a \in A} a < d + \varepsilon.$$

Gdzie formuła w a) jest raczej jasna. Natomiast formuła w b) oznacza, że jeśli trochę zwiększymy d (tzn. dodamy do d jakiś "mini" ε , to $d + \varepsilon$ nie będzie już ograniczeniem dolnym zbioru A , czyli znajdziemy jakiś element zbioru A , który jest mniejszy od $d + \varepsilon$.

Uwaga: Infimum zbioru A może, ale wcale nie musi należeć do zbioru A . Możemy to zobaczyć poniżej.

Przykład. Niech A będzie przedziałem domkniętym $[0, 1]$. Wówczas $\inf A = 0 \in A$. Natomiast jeśli A jest przedziałem otwartym $(0, 1)$, to $\inf A = 0 \notin A$.

Uwaga! Jeśli $\inf A = -\infty$, to ZAWSZE $\inf A = -\infty \notin A$. Po prostu $-\infty$ nie jest liczbą tylko symbolem i dlatego nie ma żadnych szans, aby należeć do zbioru A . Proszę o tym pamiętać :)

5. Zbiór pusty. Okazuje się, że dla zbioru pustego $\emptyset$ mamy następujące paradoksalne formuły

$$\sup \emptyset = -\infty, \quad \inf \emptyset = +\infty.$$

Wynika to z tego, że każda liczba jest ograniczeniem górnym zbioru pustego, więc najmniejsze z tych ograniczeń to $-\infty$. Podobnie jest z infimum. Dlatego przy kresach często zakłada się, że $A \neq \emptyset$.

6. Fakty i własności. Podstawowe twierdzenie jest następujące

Twierdzenie. *Każdy podzbiór liczb rzeczywistych ma kres górny i kres dolny.*

W ustalaniu kresów pomocny jest następujący

Fakt. *Jeśli G jest górnym ograniczeniem zbioru A oraz $G \in A$ to $G = \sup A$.*

Analogicznie

Fakt. *Jeśli D jest dolnym ograniczeniem zbioru A oraz $D \in A$ to $D = \inf A$.*

Te fakty działają więc w przypadku, gdy któryś z kresów należy do zbioru. Warto wiedzieć, że w każdej sytuacji działa natomiast następująca wygodna charakteryzacja.

Fakt. *Górne ograniczenie G zbioru A jest równe $\sup A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg elementów zbioru A dążący do G .*

W szczególności to oznacza, że jeśli G jest górnym ograniczeniem zbioru A i uda nam się znaleźć ciąg $a_n \in A$ taki, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = G$, to mamy już pewność, że $\sup A = G$. Podobnie jest z kresem dolnym:

Fakt. *Dolne ograniczenie D zbioru A jest równe $\inf A$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg elementów zbioru A dążący do D .*

Aby potrenować techniki dowodowe pokażemy jeszcze dwa fakty:

Fakt. *Jeśli zbiór $A \neq \emptyset$ to*

$$\inf A \leq \sup A.$$

Proof. Fakt wydaje się oczywisty (poza absurdalnym przypadkiem zbioru pustego) zobaczymy jednak, jak można go udowodnić.

Po chwili zastanowienia widać, że dowód tego faktu jest łatwy. Wystarczy skorzystać z tego, że $\inf A$ jest ograniczeniem dolnym zbioru A , czyli

$$\forall_{a \in A} \inf A \leq a$$

oraz, że $\sup A$ jest ograniczeniem górnym, czyli

$$\forall_{a \in A} a \leq \sup A.$$

Dzięki temu dla wszystkich $a \in A$ mamy, że

$$\inf A \leq a \leq \sup A.$$

Wystarczy więc, że zbiór A ma chociaż jeden element (jest niepusty) i powyższa nierówność daje nam, że

$$\inf A \leq \sup A.$$

□

Fakt. *Jeśli $A \subset B$, to*

$$\sup A \leq \sup B.$$

Proof. Ten fakt też wydaje się oczywisty, ale z dowodem może być trochę gorzej. Pokażemy dwie metody.

Metoda 1. Najpierw należy zauważyć, że jeśli x jest pewną liczbą rzeczywistą, to nierówność

$$\sup A \leq x$$

jest równoważna temu, że x jest ograniczeniem górnym zbioru A .

Dzięki temu wystarczy wykazać, że $\sup B$ jest ograniczeniem górnym zbioru A , co powinno być łatwe.

W istocie, weźmy dowolny element $a \in A$. Skoro $A \subset B$, to $a \in B$, więc skoro $\sup B$ jest ograniczeniem górnym zbioru B , to

$$a \leq \sup B,$$

czyli widać, że $\sup B$ jest górnym ograniczeniem zbioru A .

Jak wspomnieliśmy wcześniej, skoro $\sup A$ jest najmniejszym górnym ograniczeniem zbioru A , to w takim razie dostajemy, że

$$\sup A \leq \sup B.$$

Metoda 2. Z jednego z poprzednich faktów wiemy, że istnieje ciąg $a_n \in A$ dążący do $\sup A$. Skoro $A \subset B$, to $a_n \in B$, więc $a_n \leq \sup B$, czyli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup B$. Dzięki temu

$$\sup A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \leq \sup B.$$

□