

Funkcje. Granica i ciągłość.

Szanowni Państwo. Poniżej znajdują się podstawowe informacje dotyczące funkcji, ich granic i pojęcia ciągłości funkcji.

1. Funkcje. Bedziemy rozważać tylko funkcje rzeczywiste, czyli takie, których argumentami i wartościami są liczby rzeczywiste.

Jak pamiętamy (ze szkoły) funkcję można oznaczać znaczkiem f . Taka funkcja ma swoją dziedzinę X i przeciwdziedzinę Y (u nas $X, Y \subset \mathbb{R}$). Funkcja f każdemu elementowi zbioru X przypisuje element zbioru Y i zapisuje się to tak.

$$f : X \rightarrow Y.$$

Dziedzina X często jest oznaczana jako D_f . Natomiast odnośnie przeciwdziedziny Y warto wiedzieć, że nie każdy element Y musi być wartością funkcji. Zbiór wartości funkcji można oznaczyć jako W_f i stwierdzić jedynie, że $W_f \subset Y$. Dlatego można sobie przyjąć, że w przypadku funkcji rzeczywistych $Y = \mathbb{R}$.

W skrócie nasze funkcje wyglądają więc tak

$$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}.$$

2. Przykłady funkcji. Warto znać poniższe funkcje, no i ich wykresy.

- a) $f(x) = c$ - funkcja stała
- b) $f(x) = ax + b$ - funkcja liniowa
- c) $f(x) = ax^2 + bx + c$ - funkcja kwadratowa dla $a \neq 0$
- d) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ - wielomian trzeciego stopnia dla $a \neq 0$
- e) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ - wielomian n -tego stopnia dla $a_n \neq 0$.
- f) $f(x) = \frac{1}{x}$ - podstawowa funkcja wymierna, której wykresem jest hiperbola
- g) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, gdzie P, Q to wielomiany - funkcja wymierna
- h) $f(x) = x^\alpha$ - funkcja potęgowa (np. $f(x) = x^0 = 1$, $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$, $f(x) = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$)
- i) $f(x) = a^x$, gdzie $a > 0$ - funkcja wykładnicza
- j) $f(x) = e^x$ - podstawowa funkcja wykładnicza ($e = 2,71 \dots$ to bardzo ważna liczba)
- k) $f(x) = \log_a(x)$, gdzie $0 < a \neq 1$ - logarytm (o podstawie a)
- l) $f(x) = \ln(x)$ - logarytm naturalny (jego podstawą jest właśnie wspomniane e)
- m) $f(x) = \sin(x)$ - sinus
- n) $f(x) = \cos(x)$ - cosinus
- o) $f(x) = \operatorname{tg}(x)$ - tangens
- p) $f(x) = \operatorname{ctg}(x)$ - cotangens
- r) $f(x) = \operatorname{arctg}(x)$ - arcus tangens (bardzo ważna funkcja, będzie o niej potem)
- s) $f(x) = |x|$ - moduł, czyli wartość bezwzględna
- t) $f(x) = [x]$ - cecha, czyli część całkowita
- u) $f(x) = \{x\}$ - mantysa, czyli część ułamkowa
- w) $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ - signum (patrz lista 6-1)

3. Pojęcie granicy. Niech D_f oznacza dziedzinę funkcji rzeczywistej f . Jeśli dla każdego $\delta > 0$ przedział otwarty $(a, a + \delta)$ ma część wspólną z D_f , to możemy zdefiniować granicę prawostronną funkcji f w punkcie a w następujący sposób.

Definicja. Funkcja f z dziedziną D_f ma prawostronną granicę $g \in \mathbb{R}$ w punkcie a jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a, a + \delta) \cap D_f \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

i piszemy wówczas, że

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g.$$

W tej definicji chodzi o to, że jeśli z argumentem x zbliżamy się do punktu a z jego prawej strony, to wartości funkcji f zmierzają do g .

Analogicznie, jeśli dla każdego $\delta > 0$ przedział otwarty $(a - \delta, a)$ ma część wspólną z D_f , to możemy zdefiniować granicę lewostronną funkcji f w punkcie a w następujący sposób.

Definicja. Funkcja f z dziedziną D_f ma lewostronną granicę g w punkcie a jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a) \cap D_f \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

i piszemy wówczas, że

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g.$$

W tej definicji chodzi o to, że jeśli z argumentem x zbliżamy się do punktu a z jego lewej strony, to wartości funkcji f zmierzają do g .

Aby zdefiniować pojęcie granicy funkcji f w punkcie a łączymy powyższe definicje otrzymując

Definicja. Funkcja f z dziedziną D_f ma granicę g w punkcie a jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in ((a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)) \cap D_f \quad |f(x) - g| < \varepsilon$$

i piszemy wówczas, że

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g.$$

Uwaga: Podobnie jak wcześniej powyższa definicja ma sens, jeśli dla każdego $\delta > 0$ zbiór $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$ ma część wspólną z D_f (tzn. $((a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)) \cap D_f \neq \emptyset$). A co jeśli tak nie jest? To znaczy, a co jeśli istnieje $\delta > 0$ taka, że $(a - \delta, a + \delta) \cap D_f = \{a\}$? Wówczas a jest *punktem izolowanym* D_f (nie ma dowolnie blisko niego innych punktów należących do D_f) i mamy mały problem z powyższą definicją. W istocie, można sprawdzić, że dla funkcji $f(x) = x$ z dziedziną $D_f = \{0, 1\}$ powyższa definicja daje kuriozalne wyniki:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$$

Co wskazuje na to, że powyższa definicja nie powinna być używana, jeśli a jest punktem izolowanym dziedziny funkcji f .

Okazuje się, że jeśli f ma (dobrze zdefiniowaną) granicę g w punkcie a , to wcale jeszcze nie oznacza, że $f(a) = g$. W istocie, ta ostatnia własność definiuje pojęcie ciągłości funkcji.

Definicja. Mówimy, że funkcja f z dziedziną D_f jest ciągła w punkcie $a \in D_f$ jeśli

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

lub a jest punktem izolowanym D_f .

Równoważnie można ciągłość zdefiniować następująco

Definicja. Mówimy, że funkcja f z dziedziną D_f jest ciągła w punkcie $a \in D_f$ jeśli

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta) \cap D_f \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Ostatecznie

Definicja. Mówimy, że funkcja f jest ciągła, jeśli jest ciągła w **każdym** punkcie swojej dziedziny.

Przykład. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest ciągła.

Matematycznie, definiując funkcję należy podać jej dziedzinę. W szkolnym podejściu robi się jednak inaczej i uczniowie muszą znajdować samodzielnie dziedzinę podanej funkcji (czyli znaleźć największy podzbiór liczb rzeczywistych na jakim podana funkcja ma sens).

W naszym przykładzie dziedzina to $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Proszę zauważyć, że w każdym punkcie swej dziedziny ta funkcja jest ciągła. A więc jest ciągła. Punkt 0 nie należy do dziedziny i dlatego nie ma sensu mówienie, czy w tym punkcie funkcja jest ciągła.

Przykład. Funkcja $f(x) = x$ z dziedziną $D_f = [0, 1]$ jest ciągła.

Ciągłość tej funkcji w punktach $a \in (0, 1)$ jest jasna. Jeśli chodzi o punkt $a = 0$, to jasne jest, że możemy w tym punkcie obliczyć granicę prawostronną. Okazuje się jednak, że wnikliwe zrozumienie definicji granicy funkcji pozwala stwierdzić, że ta funkcja ma granicę w punkcie $a = 0$, która jest równa $f(0)$ i dzięki temu ta funkcja jest ciągła w zerze. Podobnie można stwierdzić ciągłość tej funkcji w punkcie $a = 1$.

Ciągłość funkcji jest przydatną własnością przy obliczaniu granic ciągów.

Fakt. Jeśli funkcja f z dziedziną D_f jest ciągła w punkcie $a \in D_f$ oraz ciąg $a_n \in D_f$ dąży do a , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(a).$$

Co więcej

Twierdzenie. Funkcja f z dziedziną D_f ma granicę g w punkcie a wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego ciągu $a_n \in D_f \setminus \{a\}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g.$$

4. Obliczanie granic. Obliczanie granic funkcji jest podobne do obliczania granic ciągów (w szczególności zachodzą wzory na granicę sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji). Mam nadzieję, że opanują Państwo bardzo ważną umiejętność obliczania granic funkcji w oparciu o pozostałe materiały dołączone do kursu. Zdajmy sobie tylko sprawę z tego, jakie mogą wystąpić przy tym scenariusze. Wypiszemy je poniżej bez podawania formalnej definicji przy pomocy kwantyfikatorów.

- a) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = g$
- b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = g$
- c) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g$
- d) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$
- e) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$

- f) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
- g) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$
- h) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$
- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$
- j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = g$
- k) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = g$
- l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- m) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- n) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

Oczywiście może też być tak, że jakaś z powyższych granic nie istnieje.

5. Dominacja wzrostów. Aby stwierdzić jak szybko dana funkcja rośnie do nieskończoności stosuje się następujące rozróżnienie “typowych” wzrostów:

- a) największy (najsilniejszy, najszybszy) wzrost: a^x , gdzie $a > 1$ - wzrost wykładniczy,
- b) średni wzrost: x^α , gdzie $\alpha > 0$ - wzrost potęgowy,
- c) najmniejszy (najślabszy, najwolniejszy) wzrost: $\log_b(x)$, gdzie $b > 1$ - wzrost logarytmiczny.

Powższe wzrosty to funkcje zmiennej x (dążącej do ∞), natomiast $a, b > 1$ oraz $\alpha > 0$ to parametry gwarantujące, że te wzrosty dążą do ∞ . To oznacza, że dla tych parametrów

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x^\alpha = \lim_{x \rightarrow \infty} \log_b(x) = \infty.$$

A sedno dominacji wzrostów jest takie, że (zgodnie z wcześniejszym opisem)

$$\log_b(x) \ll x^\alpha \ll a^x,$$

gdzie znak “ $\ll$ ” oznacza “duuu...żo mniejsze” dla dostatecznie dużych x (tzn. dla $x > M$, gdzie M jest jakąś dużą liczbą).

Morał więc jest taki, że chociaż wszystkie te wzrosty rosną wraz z x do nieskończoności, to dla $a, b > 1$ oraz $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x^\alpha} = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{\log_b(x)} = \infty,$$

czyli a^x rośnie do nieskończoności o wiele szybciej niż x^α , a x^α rośnie do nieskończoności o wiele szybciej niż $\log_b(x)$.

Uwaga: Oczywiście z tego wynika, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0$ oraz, że $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log_b(x)}{x^\alpha} = 0$.

Uwaga: Oprócz wskazanych “typowych” wzrostów można rozważać inne wzrosty (dla parametrów $a, b > 1$ oraz $\alpha > 0$), które są silniejsze lub słabsze od tych “typowych” np. takie wzrosty jak:

$$x^{x^x}, \quad a^{x^x}, \quad a^{x^\alpha}, \quad x^{a^x}, \quad x^{x^\alpha}, \quad \left(\log_b(x)\right)^{x^\alpha}, \quad \log_a(\log_b(x)).$$

6. Funkcja odwrotna. Jeśli funkcja f ma dziedzinę D_f i zbiór wartości W_f

$$f : D_f \rightarrow W_f$$

oraz jest **różnowartościowa**, to funkcja g do niej odwrotna

$$g : W_f \rightarrow D_f$$

jest definiowana formułą

$$g(f(x)) = x, \quad \text{dla } x \in D_f$$

Z powyższej definicji wynika, że jeśli g jest funkcją odwrotną do funkcji f , to f jest funkcją odwrotną do funkcji g i dzięki temu

$$f(g(x)) = x, \quad \text{dla } x \in W_f.$$

Przykład. Funkcja odwrotna do funkcji

$$f(x) = x$$

to funkcja

$$g(x) = x.$$

Przykład. Funkcja odwrotna do funkcji

$$f(x) = x^3$$

to funkcja

$$g(x) = \sqrt[3]{x}.$$

Na tym przykładzie możemy prześledzić schemat znajdowania funkcji odwrotnej:

a) Mamy funkcję $f(x) = x^3$.

b) Zastępujemy $f(x)$ przez y otrzymując $y = x^3$.

c) Rozwiązujemy powyższe równanie ze względu na x otrzymując $x = \sqrt[3]{y}$.

d) Zamieniamy w powyższym równaniu x z y otrzymując $y = \sqrt[3]{x}$.

e) Zastępujemy w powyższym równaniu y przez $g(x)$ otrzymując wzór funkcji odwrotnej $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

Przykład. Aby znaleźć funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = x^2$ należy ograniczyć jej dziedzinę, tak aby uzyskać funkcję różnowartościową.

Mamy więc, że funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = x^2$ dla $x \geq 0$ jest funkcja $g(x) = \sqrt{x}$. Natomiast funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = x^2$ dla $x \leq 0$ jest funkcja $g(x) = -\sqrt{x}$.

7. Arcus tangens. W skrócie, $\arctg$ to funkcja odwrotna do funkcji tangens. Ze względu na to, że funkcja tangens nie jest różnowartościowa należy odpowiednio ograniczyć jej dziedzinę. Naturalnym ograniczeniem jest wzięcie przedziału $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, bo tam tangens jest różnowartościowy i przyjmuje wszystkie swoje możliwe wartości.

Rozważamy więc funkcję

$$f(x) = \operatorname{tg}(x) \quad \text{dla } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

i bierzemy jej funkcję odwrotną g , którą nazywamy $\arctg$.

Skoro

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R},$$

to

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

Jak to działa w praktyce? Jeśli chcemy obliczyć $\arctg(x)$ dla danego $x \in \mathbb{R}$, to musimy znaleźć taki kąt $\alpha \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ **wyrażony w radianach**, że $\operatorname{tg}(\alpha) = x$. Wówczas $\arctg(x) = \alpha$.

Dla przykładu

$$\begin{aligned}\operatorname{arctg}(0) &= 0, & \text{bo } \operatorname{tg}(0) &= 0, \\ \operatorname{arctg}(1) &= \frac{\pi}{4}, & \text{bo } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 1, \\ \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) &= \frac{\pi}{3}, & \text{bo } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \sqrt{3}, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= \frac{\pi}{6}, & \text{bo } \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{1}{\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Ponadto przy braniu granic mamy

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg}(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg}(x) &= -\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Oczywiście warto też wiedzieć jak wygląda wykres funkcji arctg . Reguła jest taka, że zawsze (dla naszych funkcji rzeczywistych) wykres funkcji odwrotnej jest odbiciem wykresu oryginalnej funkcji względem prostej o równaniu $y = x$.