

7. Funkcje - ciąg dalszy.

Szanowni Państwo. Poniżej znajdują się dalsze informacje dotyczące funkcji.

1. Własność Darboux. Zaczniemy od definicji

Definicja. Mówimy, że funkcja f z dziedziną D_f ma **własność Darboux** jeśli dla każdego przedziału $[a, b] \subset D_f$ i dla każdego d leżącego między $f(a)$ i $f(b)$ istnieje $c \in [a, b]$ takie, że $f(c) = d$.

Chodzi więc o to, że funkcja przyjmuje wszystkie pośrednie wartości między $f(a)$ i $f(b)$.
Ważny jest następujący

Fakt. Jeśli funkcja jest ciągła, to ma własność Darboux.

W skrócie myślimy więc następująco. Niech f będzie funkcją ciągłą. Bierzemy $a, b \in D_f$ takie, że $[a, b] \subset D_f$. Następnie bierzemy dowolną liczbę d leżącą między $f(a)$ i $f(b)$. Wówczas, korzystając z własności Darboux, jesteśmy pewni, że gdzieś w przedziale $[a, b]$ leży liczba c taka, że $f(c) = d$. Czyli wiemy, że pośrednia wartość d musi być przyjęta przez naszą funkcję w punkcie c .

W praktyce wygląda to na przykład tak, że jeśli $[a, b] \subset D_f$ oraz wiemy, że

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0,$$

to dostajemy, że $f(c) = 0$ dla pewnego $c \in [a, b]$. Alternatywnie, jeśli

$$f(a) > 0, \quad f(b) < 0,$$

to znów dostajemy, że $f(c) = 0$ dla pewnego $c \in [a, b]$.

Proszę zauważyć, że intuicyjnie jest to bardzo jasne. Jeśli $f(a)$ jest po jednej stronie osi OX , a $f(b)$ jest po drugiej stronie tej osi, to wykres funkcji f musi przeciąć tę oś przechodząc od $f(a)$ do $f(b)$.

Tą własność wykorzystujemy do pokazywania, że dane równanie ma rozwiązanie leżące w pewnym przedziale.

Przykład. Rozważmy równanie (dla $e = 2,71\dots$)

$$(*) \quad e^x = -x.$$

Aby stwierdzić, że to równanie ma rozwiązanie możemy naszkicować wykresy $y = e^x$ oraz $y = -x$ i zbadać, gdzie się przecinają. Z takiego szkicu wynika, że rozwiązanie tego równania może się znajdować w przedziale $[-1, 0]$.

Aby się upewnić, że tak jest, przenosimy wszystkie wyrazy równania $(*)$ na jedną stronę

$$e^x + x = 0$$

i traktujemy to równanie jako

$$f(x) = 0,$$

gdzie

$$f(x) = e^x + x.$$

Stwierdzamy, że funkcja f jest ciągła. A następnie badamy jaki ma znak (dodatni, czy ujemny) w punktach $x = -1$ oraz $x = 0$ (czyli w końcach naszego przedziału $[-1, 0]$):

$$f(-1) = e^{-1} - 1 < 0,$$

bo $\frac{1}{e} < 1$, bo $1 < e$ oraz

$$f(0) = e^0 + 0 = 1 > 0.$$

Skoro wyszły nam znaki przeciwne ($f(-1) < 0$, $f(0) > 0$), to możemy już skończyć zadanie pisząc mądrze: Korzystając z własności Darboux funkcji ciągłej f równanie $(*)$ ma rozwiązanie w przedziale $[-1, 0]$.

2. Liczba e . Podobnie jak $\pi = 3,14\dots$ liczba $e = 2,71\dots$ jest bardzo ważną liczbą niewymierną, która definiowana jest jako granica ciągu

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Można wykazać, że ten ciąg jest rosnący i ograniczony. Zgodnie z faktem z poprzednich wykładów oznacza to, że ten ciąg jest zbieżny do granicy, którą oznaczamy jako e . Tak więc

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Warto pamiętać, że skoro ciąg (e_n) jest rosnący, to dla $n \in \mathbb{N}$ uzyskujemy też nierówność

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e.$$

Ważne jest to, że zmienną dyskretną n możemy zastąpić zmienną ciągłą x i otrzymać tą samą granicę, czyli

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Ponadto, warto też pogłębić pojęcie granicy. W takiej granicy jak powyżej ważne jest tylko to, że x dąży do ∞ , a wcale nie jest ważne jak ten x wygląda. Możemy więc za x wstawić dowolną funkcję dążącą wraz z x do ∞ i granica się nie zmienia. Tak więc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e,$$

dla dowolnej funkcji f takiej, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

Przykładowo

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = e$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\sqrt{x}} = e.$$

Dzięki temu możemy dojść do następującej ciekawej konkluzji

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Aby to zobaczyć zastosujemy przydatną technikę do obliczania granic. Polega ona na zastąpieniu x czymś wygodniejszym. W tym wypadku weźmiemy $x = -t$. Skoro $x \rightarrow -\infty$, to $t \rightarrow \infty$ i nasza granica zmienia się w granicę w $+\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{-t \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{-t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t}\right)^{-t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1}{t}\right)^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t-1+1}{t-1}\right)^t = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^t = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t-1}\right)^{t-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{t-1}\right) = e \cdot 1 = e. \end{aligned}$$

Uff, no dzięki :)

Powyższa granica jest o tyle istotna, że pozwala na uzyskanie następującej formuły

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a,$$

która zachodzi dla wszystkich $a \in \mathbb{R}$.

Wynika to z tego, że

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{a}}\right)^{\frac{x}{a}} \right)^a = e^a,$$

co działa zarówno dla $a > 0$, jak i dla $a < 0$ (dla $a = 0$ łatwo sprawdzić, że formuła jest OK).

Ponadto, jak łatwo się domyślić, nic nie zmienia się w $-\infty$ i mamy, że

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Ostatni przydatny wzór, to

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = e^{a-b},$$

dla wszystkich $a, b \in \mathbb{R}$.

Można go zobaczyć tak

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+a}{x}\right)^x \left(\frac{x}{x+b}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x \frac{1}{\left(1 + \frac{b}{x}\right)^x} = \frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}.$$

Podsumowując, **warto zapamiętać** następujące granice:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= e, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= e, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x &= e^a, \\ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x+a}{x+b}\right)^x &= e^{a-b}. \end{aligned}$$

3. Asymptoty. Rozróżniamy dwa rodzaje asymptot: asymptoty pionowe i asymptoty ukośne. Ponadto czasem asymptota ukośna może być asymptotą poziomą.

a) Asymptoty pionowe. Asymptota pionowa funkcji f to prosta o równaniu $x = a$. Występuje ona wtedy, gdy funkcja f ma nieskończoną granicę jedno- lub obu- stronną w punkcie $x = a$. Czyli

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty.$$

Na przykład prosta $x = 0$ jest asymptotą pionową funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$, bo $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ (oczywiście mamy też, że $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$).

Prosta $x = 0$ jest też asymptotą pionową funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, bo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = [e^{+\infty}] = +\infty,$$

choć

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = [e^{-\infty}] = 0.$$

Sprawa więc jest dosyć prosta. Aby znaleźć asymptoty pionowe szukamy tych punktów, w których funkcja ma (z którejś strony) nieskończoną granicę.

Takich asymptot może być nieskończenie wiele (jak np. dla funkcji tangens).

b) Asymptoty ukośne. Asymptoty ukośne opisują zachowanie funkcji w nieskończoności. Chodzi więc o to, aby zbadać jak funkcja zachowuje się przy x dążącym do $+\infty$ i przy x dążącym do $-\infty$.

Szczególnym przypadkiem asymptot ukośnych są asymptoty poziome. Prosta o równaniu $y = b$ jest asymptotą poziomą jeśli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b.$$

Ogólnie, asymptota ukośna to prosta o równaniu $y = ax + b$. Taka prosta jest asymptotą ukośną jeśli

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Widać więc, że takich asymptot może być co najwyżej dwie. Jedna w $+\infty$, a druga w $-\infty$.

W celu znalezienia asymptot ukośnych funkcji f postępujemy następująco.

Najpierw możemy zbadać co się dzieje z naszą funkcją w $+\infty$.

Jeśli $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$, to od razu stwierdzamy, że: Asymptota w $+\infty$ to $y = b$.

Jeśli granica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ nie istnieje, to od razu stwierdzamy, że: Funkcja nie ma asymptoty w $+\infty$.

Najtrudniej jest wtedy, gdy $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$. Wówczas próbujemy znaleźć parametry $a, b \in \mathbb{R}$, które dają nam asymptotę $y = ax + b$. W pierwszym kroku szukamy a obliczając granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Jeśli udało się znaleźć takie $a \in \mathbb{R}$, to w drugim kroku szukamy b obliczając granicę

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Jeśli udało się znaleźć takie $b \in \mathbb{R}$, to stwierdzamy, że: Asymptota w $+\infty$ to $y = ax + b$.

To kończy badanie funkcji w $+\infty$. Pozostaje nam więc “tylko” zbadanie dokładnie w ten sam sposób jak zachowuje się nasza funkcja w $-\infty$. Powtarzamy więc poprzednie kroki zamieniając $+\infty$ na $-\infty$:

Jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, to od razu stwierdzamy, że: Asymptota w $-\infty$ to $y = b$.

Jeśli granica $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ nie istnieje, to od razu stwierdzamy, że: Funkcja nie ma asymptoty w $-\infty$.

Jeśli $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$, to próbujemy znaleźć parametry $a, b \in \mathbb{R}$, które dają nam asymptotę $y = ax + b$. W pierwszym kroku szukamy a obliczając granicę

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a.$$

Jeśli udało się znaleźć takie $a \in \mathbb{R}$, to w drugim kroku szukamy b obliczając granicę

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b.$$

Jeśli udało się znaleźć takie $b \in \mathbb{R}$, to stwierdzamy, że: Asymptota w $-\infty$ to $y = ax + b$.

c) Uwaga. Jak widać asymptota ukośna $y = ax + b$ staje się pozioma, gdy $a = 0$. Można by więc rozgraniczyć te dwa pojęcia uzgadniając, że asymptota ukośna $y = ax + b$ występuje tylko dla $a \neq 0$ (wtedy naprawdę jest ukośna :), natomiast gdy $a = 0$, to asymptota nie jest ukośna, lecz pozioma.

Wówczas mielibyśmy trzy różne typy asymptot: pionowe, poziome i ukośne.

Osobiście uważam, że warto mówić o dwóch różnych typach asymptot: asymptoty pionowe i asymptoty w nieskończoności. Asymptoty pionowe opisują zachowanie funkcji w szczególnych punktach $a \in \mathbb{R}$, natomiast asymptoty w nieskończoności opisują zachowanie funkcji w $+\infty$ i w $-\infty$.

Zróbmy jeszcze dwa przykłady.

Przykład. Szukamy asymptot funkcji $f(x) = \ln(x)$. Najpierw przypominamy sobie, że $\ln(x)$ to tzw. logarytm naturalny, czyli $\log_e(x)$, z liczbą e podaną w poprzedniej części wykładu. Dziedziną tej funkcji są $x > 0$ i okazuje się, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty.$$

To oznacza, że mamy jedyną asymptotę pionową $x = 0$.

Przechodzimy do asymptot w nieskończoności. Ze względu na dziedzinę możemy zbadać zachowanie funkcji tylko w $+\infty$. Skoro

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \infty,$$

to musimy walczyć dalej i szukać asymptoty $y = ax + b$.

Obliczamy, że

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0,$$

co oznacza, że naszym a może być 0.

Niestety

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = \infty$$

i widać, że nie znaleźliśmy odpowiedniego $b \in \mathbb{R}$.

Dlatego możemy stwierdzić, że: Funkcja nie ma asymptoty w $+\infty$.

Przykład. Szukamy asymptot funkcji $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

Dziedzina tej funkcji to $x \notin (0, 2)$ i widać, że w żadnym punkcie funkcja nie “ekspłduje” do nieskończoności. Czyli nie ma asymptot pionowych.

Odnośnie zachowania funkcji w nieskończoności można stwierdzić, że

$$\sqrt{x^2 - 2x} \sim \sqrt{x^2 - 0} = |x|,$$

co sugeruje, że asymptoty ukośne mogą mieć postać $y = x$ w $+\infty$ i $y = -x$ w $-\infty$.

Niestety, to przybliżenie jest zbyt zgrubne i dlatego zgubne. Okazuje się, że musimy być bardziej delikatni

$$\sqrt{x^2 - 2x} = \sqrt{x^2 - 2x + 1 - 1} = \sqrt{(x - 1)^2 - 1} \sim \sqrt{(x - 1)^2 - 0} = |x - 1|,$$

co sugeruje, że asymptoty ukośne mogą mieć postać $y = x - 1$ w $+\infty$ i $y = -x + 1$ w $-\infty$.

Aby się przekonać, że tak jest, wykonujemy odpowiednie obliczenia. Szukamy asymptoty postaci $y = ax + b$ w $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 2x}}{x} = 1 = a,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2 - 2x} + x} = -1 = b.$$

Widać więc, że w istocie mamy asymptotę $y = x - 1$ w $+\infty$. (Podobnie, tyle że trochę trudniej, można sprawdzić asymptotę w $-\infty$).

4. Szacowanie funkcji. Zagadnienie szacowania funkcji jest bardzo głębokie. Ogólnie, chodzi o to, aby dla danej funkcji f znaleźć takie stałe (czyli liczby) C, D , że

$$C \leq f(x) \leq D,$$

dla $x \in D_f$ (D_f to dziedzina funkcji f).

W wersji bardziej zgrubnej możemy myśleć, że szukamy jednej stałej M takiej, że

$$-M \leq f(x) \leq M,$$

czyli

$$|f(x)| \leq M,$$

dla $x \in D_f$.

Cała trudność takiego szacowania polega na poziomie skomplikowania funkcji, którą chcemy oszacować.

Zacznijmy od standardowego szacowania funkcji wymiernych, co w połowie jest podobne do znanego nam szacowania ciągów.

a) Najlepiej wyjaśnić to na przykładzie. Weźmy

$$f(x) = \frac{2x^4 - x^2 + 2x - 3}{4x^4 + 3x^2 + 1}.$$

Dziedzina tej funkcji to $\mathbb{R}$, bo mianownik nigdy się nie zeruje (jest dodatni).

Szukamy M takiego, że

$$|f(x)| \leq M,$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

Przykładamy moduł

$$|f(x)| = \left| \frac{2x^4 - x^2 + 2x - 3}{4x^4 + 3x^2 + 1} \right| = \frac{|2x^4 - x^2 + 2x - 3|}{|4x^4 + 3x^2 + 1|}$$

i patrzmy co się dzieje.

W mianowniku możemy opuścić moduł, bo $4x^4 + 3x^2 + 1 > 0$. Natomiast w liczniku możemy zastosować nierówność trójkąta. Dzięki temu

$$|f(x)| = \frac{|2x^4 - x^2 + 2x - 3|}{|4x^4 + 3x^2 + 1|} \leq \frac{|2x^4| + |x^2| + |2x| + |3|}{4x^4 + 3x^2 + 1} = \frac{2x^4 + x^2 + 2|x| + 3}{4x^4 + 3x^2 + 1}.$$

Teraz jest bardzo ważna rzecz. Musimy rozważyć dwa przypadki: $|x| \geq 1$ oraz $|x| < 1$.

Przypadek $|x| \geq 1$ działa tak samo jak przy szacowaniu ciągów. Napiszmy to wyraźnie

Dla **dużych** x (tzn. $|x| \geq 1$) dominują **duże** potęgi,

$$\text{tzn. } |x|^\alpha < |x|^\beta \quad \text{dla } \alpha < \beta.$$

A dla **małych** x (tzn. $|x| < 1$) dominują **małe** potęgi,

$$\text{tzn. } |x|^\alpha > |x|^\beta \quad \text{dla } \alpha < \beta.$$

Czyli przypadek $|x| < 1$ będziemy robić “odwrotnie” niż przy szacowaniu ciągów.

Zakładamy więc najpierw, że $|x| \geq 1$ i szacujemy nasze wyrażenie (jak przy ciągach) korzystając z dominujących (dużych) potęg.

$$|f(x)| = \frac{2x^4 + x^2 + 2|x| + 3}{4x^4 + 3x^2 + 1} \leq \frac{2x^4 + x^4 + 2x^4 + 3x^4}{4x^4 + 0 + 0} = 2 = M_1.$$

A następnie zakładamy, że $|x| < 1$ i szacujemy nasze wyrażenie (odwrotnie niż przy ciągach) korzystając z dominujących (małych) potęg.

$$|f(x)| = \frac{2x^4 + x^2 + 2|x| + 3}{4x^4 + 3x^2 + 1} \leq \frac{2 + 1 + 2 + 3}{0 + 0 + 1} = 8 = M_2.$$

W powyższym oszacowaniu 3 z licznika to $3 \cdot x^0$, a 1 z mianownika to $1 \cdot x^0$, więc dominującą potęgą w tym wypadku jest $x^0 = 1$.

Kończymy nasze oszacowanie biorąc za M **większą** z liczb uzyskanych w obu przypadkach. Tak więc

$$M = \max\{M_1, M_2\} = \max\{2, 8\} = 8.$$

Dzięki temu uzyskujemy, że

$$|f(x)| \leq 8,$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

b) Rozważmy teraz inną funkcję

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^3 + x + 1}.$$

Czy można ją oszacować jak w poprzednim przykładzie? Okazuje się, że nie, a przyczyna ku temu jest następująca.

Najpierw szukamy dziedziny tej funkcji. W mianowniku jest wielomian trzeciego stopnia $x^3 + x + 1$. I teraz ważna rzecz. Z własności Darboux wynika następujący

Fakt. *Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma pierwiastek.*

Dzieje się tak, bo dla takiego wielomianu w po obliczeniu granic $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x)$ oraz $\lim_{x \rightarrow -\infty} w(x)$ okazuje się, że jedna z nich to $+\infty$, a druga to $-\infty$. To znaczy, że w przyjmuje wartości dodatnie i ujemne, więc z własności Darboux musi się gdzieś zerować.

Wniosek jest taki, że nasz wielomian $x^3 + x + 1$ ma gdzieś przynajmniej jeden pierwiastek c , w którym się zeruje.

Aby stwierdzić, że tej funkcji nie można oszacować na jej (maksymalnej) dziedzinie należy jeszcze sprawdzić, czy przez przypadek nasz licznik nie zeruje się w c .

Widać jednak, że licznik zeruje się tylko dla $x = -1$, no a $c \neq -1$, bo takie c nie zeruje mianownika: $(-1)^3 + (-1) + 1 \neq 0$.

Dlatego możemy być pewni, że

$$\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = \lim_{x \rightarrow c} \frac{|x^3 + 1|}{|x^3 + x + 1|} = \left[\frac{|c + 1|}{0^+} \right] = \infty.$$

Więc nasza funkcja jest nieograniczona i nie znajdziemy $M \in \mathbb{R}$ takiego, że

$$|f(x)| \leq M,$$

bez zmniejszenia dziedziny funkcji f .

c) Popatrzmy na jeszcze jeden przykład z tej serii.

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 1}.$$

Obliczając dla mianownika wyróżnik, czyli Δ widzimy, że jest ona ujemna. To oznacza, że nasz mianownik nie ma pierwiastków (i jest dodatni). Dzięki temu widać, że dziedziną naszej funkcji jest zbiór $\mathbb{R}$.

Gdybyśmy zastosowali metodę z punktu a), to mielibyśmy dwa przypadki.

Dla $|x| \geq 1$ mielibyśmy stwierdzić, że

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{x^2 + 0 + 0} \leq 1, \quad \text{bo } x^2 \geq 1.$$

Niestety, to oszacowanie jest półprawdziwe.

Dla $|x| < 1$ mielibyśmy stwierdzić, że

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{0 + 0 + 1} \leq 1$$

uzyskując oszacowanie, które jest nieprawdziwe.

Problem bierze się stąd, że w wyrażeniu $x^2 + x + 1$ środkowy wyraz **może być ujemny**.

Przypatrzmy się więc bliżej tym oszacowaniom, aby zrozumieć ten fenomen.

To pierwsze oszacowanie magicznie działa, bo w istocie dla $|x| \geq 1$ zachodzi

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \leq 1.$$

Wynika to z tego, że

$$x^2 + x + 1 \geq 1,$$

bo

$$x^2 + x \geq 0$$

dla $|x| \geq 1$, bo $x^2 + x = x(x+1) < 0$ dla $x \in (-1, 0)$ (nierówność kwadratowa).

Błąd w tym szacowaniu występuje jednak w pierwszym kroku. Nierówność

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{x^2}$$

nie jest prawdziwa dla $|x| \geq 1$, bo nierówność $0 \leq x + 1$ jest fałszywa np. dla $x = -2$.

Drugie oszacowanie jest porażką, albowiem dla $|x| < 1$ nierówność

$$\frac{1}{x^2 + x + 1} \leq 1$$

oznaczałaby, że

$$1 \leq x^2 + x + 1,$$

czyli

$$0 \leq x^2 + x,$$

a przed chwilą zauważyliśmy, że jest kompletnie na odwrót dla $x \in (-1, 0)$, bo wtedy $x^2 + x$ jest ujemne.

No świetnie, to jak zrobić poprawnie takie oszacowanie?

Metoda jest taka, że patrzymy jak blisko mianownik może podejść do zera. Wiadomo, że jest dodatni i może dzięki temu mieć jakąś najmniejszą wartość większą od zera.

Ponieważ mianownik jest funkcją kwadratową, to możemy przypomnieć sobie ze szkoły, że parabola $y = ax^2 + bx + c$ ma wierzchołek w punkcie $x = -\frac{b}{2a}$.

U nas wierzchołek wychodzi w punkcie $-\frac{1}{2}$. Dzięki temu widzimy, że mianownik przyjmuje swą najmniejszą wartość właśnie w tym punkcie.

Dostajemy więc następujące **poprawne** oszacowanie

$$|f(x)| = \frac{1}{x^2 + x + 1} \leq \frac{1}{(-\frac{1}{2})^2 + (-\frac{1}{2}) + 1} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

dla $x \in \mathbb{R}$.

d) Ufff. Ostatnie uwagi są następujące. W ogólnym przypadku (szacowanie funkcji niekoniecznie wymiernych) warto przynajmniej znać podstawowe nierówności wynikające z definicji danej funkcji:

$$|\sin(x)| \leq 1,$$

$$|\cos(x)| \leq 1,$$

$$|\arctg(x)| \leq \frac{\pi}{2}.$$

Ponadto, przykładowe banalne zadanie, które sprawiło duży kłopot na egzaminie, to oszacowanie funkcji $f(x) = e^{-x^2}$. Mimo, że rozwiązanie jest proste:

$$\left| e^{-x^2} \right| = e^{-x^2} \leq e^0 = 1,$$

to jednak wiele osób nie zrobiło tego zadania.

Być może dlatego, że w tym rozwiązaniu korzystamy z następujących faktów:

i) $e^x > 0$ dla $x \in \mathbb{R}$,

ii) $-x^2 \leq 0$ dla $x \in \mathbb{R}$,

iii) funkcja $g(x) = e^x$ jest rosnąca,

więc może nie jest to aż tak łatwo złożyć w całość (na egzaminie).