

8. Pochodna funkcji

Szanowni Państwo. Poniżej znajdują się podstawowe informacje dotyczące pochodnej funkcji.

1. Iloraz różnicowy. Dla funkcji f określonej na przedziale $[a, b]$ jej iloraz różnicowy między a i b to

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Tak więc jest to różnica wartości funkcji podzielona przez różnicę argumentów funkcji.

Interpretacja geometryczna tego ilorazu jest następująca.

Funkcja f ma swój wykres dla $x \in [a, b]$. Zaznaczmy na tym wykresie punkt $(a, f(a))$ i punkt $(b, f(b))$. Przeprowadźmy przez te punkty prostą. Taka prosta to tzw. *sieczna* wykresu funkcji f . To co trzeba zapamiętać to to, że współczynnik kierunkowy tej prostej jest równy ilorazowi różnicowemu funkcji f między a i b . Dzięki temu łatwo jest napisać równanie tej siecznej znane nam ze szkoły (równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty):

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

2. Szybkość chwilowa. Załóżmy, że samochód porusza się po prostej drodze i chcemy obliczyć szybkość z jaką się porusza w danej chwili t_0 . Można to zrobić znając dystans przebyty przez ten samochód w czasie t . Tak więc niech $s(t)$ oznacza dystans przebyty przez ten samochód w czasie t .

Aby obliczyć szybkość samochodu w chwili t_0 stosujemy metodę aproksymacji. Bierzemy jakiś (mały) przedział czasu h i badamy z jaką szybkością średnią porusza się samochód między chwilą t_0 , a chwilą $t_0 + h$. Jak łatwo się domyślić, ta szybkość średnia wyraża się przez iloraz różnicowy (dzielimy przebyty dystans przez czas potrzebny na jego pokonanie):

$$\frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{t_0 + h - t_0} = \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

Metoda aproksymacji polega na tym, że musimy zacząć zmniejszać nasz przedział czasu h i obliczać powyższy iloraz różnicowy dla tych coraz mniejszych h . Idealnie, jeśli weźmiemy granicę tych ilorazów przy h dążącym do zera, to otrzymamy szukaną szybkość w chwili t_0 . Oznaczając tą szybkość jako $v(t_0)$ dostajemy więc, że

$$v(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{t_0 + h - t_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t_0 + h) - s(t_0)}{h}.$$

3. Pochodna funkcji. Powyższe motywuje następującą definicję.

Dla funkcji f określonej w otoczeniu punktu x_0 (czyli na jakimś przedziale otwartym zawierającym x_0) warto rozważyć **pochodną** tej funkcji w punkcie x_0 , którą zapisujemy jako $f'(x_0)$ i definiujemy przez

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Dzięki temu możemy stwierdzić, że w poprzednich rozważaniach szybkość chwilowa jest pochodną drogi, czyli dystansu pokonywanego przez pojazd. Daje nam to następującą zgrabną formułę

$$v(t_0) = s'(t_0).$$

4. Styczna. Interpretacja geometryczna pochodnej jest następująca.

Wyobraźmy sobie wykres funkcji f dla x leżących w otoczeniu punktu x_0 . Dla wartości h gwarantujących, że $x_0 + h$ też jest w tym otoczeniu możemy rozważyć sieczną wykresu funkcji

f przechodzącą przez punkt $(x_0, f(x_0))$ i przez punkt $(x_0 + h, f(x_0 + h))$. Jak już wiemy współczynnik kierunkowy tej siecznej wyraża się jako iloraz różnicowy funkcji f między x_0 i $x_0 + h$.

Rozważając takie sieczne dla coraz mniejszych wartości h możemy stwierdzić, że gdy h zmierza do zera, to sieczne dążą do pewnej prostej. Ta prosta to **styczna** do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Widać więc, że współczynnik kierunkowy tej stycznej jest granicą współczynników kierunkowych siecznych, które aproksymują tą styczną. A ta granica to właśnie pochodna funkcji f w punkcie x_0 .

Dzięki temu uzyskujemy bardzo istotną informację:

Pochodna funkcji f w punkcie x_0 to współczynnik kierunkowy stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

5. Różniczkowalność. Ponieważ pochodna funkcji w punkcie jest granicą. To czasem może się zdarzyć, że ta granica, czyli pochodna w danym punkcie, nie istnieje (albo, że jest nieskończona).

Na przykład funkcja $f(x) = |x|$ nie ma pochodnej w punkcie $x_0 = 0$. Można to stwierdzić po wykresie. Widać, że w tym punkcie wykres ma “dzióbek” i że przez to nie da się w tym punkcie wyznaczyć sensownej stycznej. Druga opcja jest taka, że można użyć definicji pochodnej i stwierdzić, że wyrażająca ją granica nie istnieje.

Dlatego mówimy, że funkcja jest *różniczkowalna* w punkcie x_0 , jeśli ma ona skończoną pochodną w punkcie x_0 .

A funkcja różniczkowalna, to taka, która jest różniczkowalna w każdym punkcie swojej dziedziny.

Warto też znać następujący

Fakt. *Jeśli funkcja jest różniczkowalna w punkcie x_0 , to jest w tym punkcie ciągła.*

6. Pochodna jako funkcja. Teraz musimy zrobić mały wysiłek koncepcyjny. Udało nam się zdefiniować pochodną funkcji w punkcie x_0 . Ta pochodna jest liczbą. Możemy jednak uzmiennić nasz ustalony punkt x_0 usuwając to przyklejone do niego zero i pomyśleć, że przecież możemy starać się obliczać pochodną w **dowolnym** punkcie x należącym do dziedziny naszej funkcji.

Dzięki temu, dla danej funkcji f jej pochodna f' staje się funkcją zadaną jako

$$(*) \quad f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Dla przykładu możemy sobie wyobrazić, że rozważany przez nas wcześniej samochód w dowolnej chwili t ma szybkość chwilową $v(t)$. Tak więc ta szybkość związana jest z drogą $s(t)$ przebytą do chwili t właśnie przez pochodną:

$$s'(t) = v(t).$$

Ponadto, okazuje się, że to nie koniec przydatności pochodnej, bo z kolei

$$v'(t) = a(t),$$

gdzie $a(t)$ oznacza przyspieszenie (samochodu) w chwili t .

7. Pochodna z definicji. Policzmy pochodną paru funkcji z definicji (*).

Przykład. Niech $f(x) = c$ (funkcja stała). Z definicji pochodnej mamy, że

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0.$$

Więc, w skrócie

$$(c)' = 0.$$

Przykład. Niech $f(x) = x$. Z definicji pochodnej mamy, że

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = 1.$$

Więc, w skrócie

$$(x)' = 1.$$

Przykład. Niech $f(x) = x^2$. Z definicji pochodnej mamy, że

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Więc, w skrócie

$$(x^2)' = 2x.$$

[Uwaga: Część osób zaczyna mylić pojęcia widząc powyższą formułę. Kombinują oni błędnie, że skoro pochodna funkcji $f(x) = x^2$ wynosi $f'(x) = 2x$, to w takim razie prosta o równaniu $y = 2x$ jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ (no bo przecież “pochodna, to styczna”).

Nic bardziej mylnego. Należy rozumować poprawnie w sposób następujący. Skoro pochodna funkcji $f(x) = x^2$ wynosi $f'(x) = 2x$, to w takim razie styczna do wykresu funkcji $f(x) = x^2$ w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma współczynnik kierunkowy zadany jako $f'(x_0)$, czyli $2x_0$.]

8. Wzory I. Na szczęście nie musimy obliczać pochodnych korzystając z definicji, tylko możemy użyć wzorów.

Poniżej są podane (w formie skróconej) pochodne podstawowych funkcji

$$(c)' = 0$$

$$(x)' = 1$$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \text{ dla } \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \ln(a)$$

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$(\log_a(x))' = \frac{1}{x \ln(a)}$$

$$(\sin(x))' = \cos(x)$$

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

$$(\operatorname{tg}(x))' = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$(\operatorname{arctg}(x))' = \frac{1}{x^2 + 1}$$

9. Wzory II. Poniższe wzory pozwalają na obliczanie funkcji tworzonych z powyższych funkcji.

Dla stałej (czyli jakiejś liczby) c mamy, że

$$(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$$

i zapisujemy to skrótowo jako

$$(cf)' = cf'.$$

Korzystając nadal z takiego skróconego zapisu mamy wzory dla dwóch funkcji f i g

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$(f - g)' = f' - g'$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

10. Ostatni wzór. Ostatni powyższy wzór

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g'$$

to tzw. wzór na pochodną złożenia funkcji. Aby go lepiej wchłonąć warto go rozwinąć dopisując ukrytą wcześniej zmienną x

$$(**) \quad (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Przykładowo, jeśli $f(x) = \sqrt{x}$, a $g(x) = \sin(x)$, to $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ i $g'(x) = \cos(x)$. Dlatego

$$\left(\sqrt{\sin(x)}\right)' = (f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin(x)}} \cdot \cos(x).$$

Ponadto, wzór (**) pozwala na podanie wzoru na pochodną funkcji odwrotnej.

Jeśli funkcja f ma funkcję odwrotną g , to

$$f(g(x)) = x,$$

więc po obustronnym przyłożeniu pochodnej

$$(f(g(x)))' = (x)',$$

czyli

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1,$$

a stąd

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))},$$

lub w skrócie

$$g' = \frac{1}{f'(g)}.$$