

9. Twierdzenie Rolle'a i twierdzenie Lagrange'a, reguła de l'Hospitala

Szanowni Państwo. Poniżej znajdują się poszerzone informacje dotyczące pochodnej funkcji.

1. Fakty i twierdzenia. Przypomnijmy, że funkcja f jest różniczkowalna jeśli ma skończoną pochodną w każdym punkcie swojej dziedziny. Powinniśmy pamiętać, że jeśli funkcja jest różniczkowalna, to musi być ciągła. Nie należy jednak tego mylić z następującym ważnym stwierdzeniem

Fakt. *Pochodna funkcji różniczkowalnej nie musi być ciągła.*

Chodzi więc o to, że aby zróżniczkować funkcję f musimy wystartować z funkcji ciągłej f , zobaczyć czy wszędzie da się obliczyć jej pochodną, czyli uzyskać f' i gdy się to uda, to nie mamy gwarancji, że otrzymana pochodna będzie funkcją ciągłą.

Mimo, że f' nie musi być ciągła, to jednak okazuje się że

Fakt. *Pochodna funkcji różniczkowalnej ma własność Darboux.*

Czyli f' przyjmuje swoje wartości pośrednie. Dzięki temu można uzyskać następujące

Twierdzenie Rolle'a. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną z dziedziną zawierającą przedział $[a, b]$. Wówczas, jeśli*

$$f(a) = f(b),$$

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że

$$f'(c) = 0.$$

Z powyższego twierdzenia można wywnioskować ogólniejsze, bardzo ważne twierdzenie:

Twierdzenie Lagrange'a. *Niech f będzie funkcją różniczkowalną z dziedziną zawierającą przedział $[a, b]$. Wówczas, istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Oznacza to, że przy powyższych założeniach, iloraz różnicowy funkcji f między a i b jest równy pochodnej funkcji f w **pewnym** punkcie c leżącym w przedziale (a, b) .

Przykład. Jeśli $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna i $f(3) = 1$ oraz $f(5) = 9$, to

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{9 - 1}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4.$$

Z twierdzenia Lagrange'a wynika więc, że istnieje punkt $c \in (3, 5)$ taki, że

$$f'(c) = 4.$$

Jak widać powyższy przykład nie jest zbyt ekscytujący. Popatrzmy jednak na kolejny

Przykład. Rozważmy zadanie polegające na wykazaniu, że dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność

$$(*) \quad |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Aby rozwiązać to zadanie bierzemy funkcję $f(x) = \sin(x)$. Zauważamy, że jest ona różniczkowalna dla $x \in \mathbb{R}$ i przygotowujemy się do zastosowania twierdzenia Lagrange'a.

Jeśli $x = y$, to nierówność $(*)$ jest spełniona. Jeśli $x \neq y$, to z twierdzenia Lagrange'a wynika, że dla pewnego $c \in \mathbb{R}$ (leżącego między x i y)

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Ponieważ $f'(x) = \cos(x)$ oraz (oczywiście) $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = \frac{f(x)-f(y)}{x-y}$, to powyższe równanie daje nam, że

$$\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} = \cos(c).$$

Po przyłożeniu wartości bezwzględnej dostajemy więc

$$\frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - y|} = |\cos(c)|.$$

Aby dokończyć zadanie korzystamy z prostego oszacowania $|\cos(c)| \leq 1$, dzięki któremu powyższa równość daje nam, że

$$\frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - y|} \leq 1,$$

czyli (po przemnożeniu przez $|x - y|$)

$$|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|.$$

Ogólnie, nierówność typu

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

jest nazywana *warunkiem Lipschitza* ze stałą L . A powyższy przykład pokazuje, że można ją wykazać znajdując odpowiednie oszacowanie pochodnej: $|f'(c)| \leq L$ dla c należących do dziedziny funkcji f .

2. Pochodna i monotoniczność. Twierdzenie Rolle'a można udowodnić korzystając z własności Darboux oraz tego, że pochodna koduje monotoniczność funkcji w sposób przedstawiony w poniższych faktach dotyczących funkcji różniczkowalnych f na przedziale (a, b) .

Fakt. Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest rosnąca dla $x \in (a, b)$.

Fakt. $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest niemalejąca dla $x \in (a, b)$.

Fakt. Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$, to f jest malejąca dla $x \in (a, b)$.

Fakt. $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (a, b) \iff f$ jest nierosnąca dla $x \in (a, b)$.

Tu warto pamiętać o przykładzie $f(x) = x^3$. Jest to funkcja rosnąca, ale mimo to jej pochodna zeruje się w punkcie $x = 0$.

W skrócie dowód tw. Rolle'a wygląda następująco. Jeśli $f'(x) > 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest rosnąca, czyli $f(b) > f(a)$ (sprzeczność). Jeśli $f'(x) < 0$ dla $x \in (a, b)$ to f jest malejąca, czyli $f(b) < f(a)$ (sprzeczność). W takim razie albo f jest stała (i ma zerową pochodną), albo $f'(x_1) > 0$ i $f'(x_2) < 0$ dla pewnych $x_1, x_2 \in (a, b)$. Wówczas z własności Darboux f' wynika, że $f'(c) = 0$ dla pewnego $c \in (a, b)$.

3. Reguła de l'Hospitala. Jest to reguła, która pozwala na obliczanie granic ilorazów

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)},$$

gdzie $a \in \mathbb{R}$ można zastąpić również przez a^+ , a^- , $+\infty$, $-\infty$.

Bardzo ważne jest to, że tą regułę stosujemy wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0} \right],$$

tzn. gdy $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Albo, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{\pm\infty}{\pm\infty} \right],$$

tzn. gdy obie granice $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ są nieskończone.

W tych przypadkach, możemy zastosować **regułę de l'Hospitala** mówiącą, że

$$(H) \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Oznacza to, że granica ilorazu funkcji jest równa granicy ilorazu pochodnych tych funkcji.

Aby zaznaczyć, że stosujemy powyższą regułę (H) piszemy literkę H nad znakiem równości:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Sztandarowy przykład zastosowania tej reguły jest następujący.

Przykład. Chcemy obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

W tym celu najpierw sprawdzamy, że nasza granica jest odpowiedniego typu i stosujemy regułę (H) , czyli

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1,$$

a w skrócie

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Inny przykład pokazuje błędne zastosowanie tej reguły.

Przykład. Chcemy obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Ale robimy **błąd** i nie sprawdzamy, że nasza granica jest odpowiedniego typu, tylko “z automatu” stosujemy regułę (H) , czyli

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x} \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(\pi) = -1$$

i mamy źle.

Poprawne obliczenie tej granicy, to

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = \frac{0}{\pi} = 0.$$

Okazuje się, że regułę (H) można stosować też przy iloczynach, tyle że trzeba umiejętnie przerobić je na iloraz.

Przykład. Chcemy obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = [0 \cdot (-\infty)].$$

W tym celu przerabiamy $x \ln(x)$ na iloraz

$$x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}$$

i obliczamy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0$$

i super :)

Warto jednak wiedzieć, że takie przerobienie iloczynu na iloraz trzeba zrobić “umiejętnie”. Aby się o tym przekonać, popatrzmy na ostatni

Przykład. Chcemy obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = [0 \cdot (-\infty)].$$

W tym celu przerabiamy $x \ln(x)$ na iloraz

$$x \ln(x) = \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}}$$

i obliczamy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln(x)}} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln^2(x)) = ???$$

i jest gorzej niż było :(

Warto jeszcze wiedzieć, że regułę de l’Hospitála można stosować parę razy pod rząd. Ponadto, warto w trakcie obliczeń eliminować te funkcje, które można zastąpić ich granicą, albo prostszą funkcją.

Przykład. Chcemy obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) \sin^3(x^2)}{x^7}.$$

W tym celu sprawdzamy, że nasza granica jest odpowiedniego typu i stosujemy regułę (H) dopiero po przekształceniu tej granicy do odpowiedniej postaci

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x) \sin^3(x^2)}{x^7} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} \cdot \frac{\sin^3(x^2)}{x^6} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x^2)}{x^2} \right)^3 = 1 \cdot 1 = 1, \end{aligned}$$

bo

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg(x)}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x^2+1}}{1} = 1$$

oraz

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = [x^2 = t] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1.$$