

Wybrane zadania z egzaminów licencjackich IM UW.

06-02

1. Rozwiązać nierówność

$$\log_{|x-1|}(2x+3) \leq \log_{|x-1|}x^2.$$

2. Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$1000n < 2^n + 10000.$$

09-02

1. Dowieść, że liczba $\log_{36} 30$ jest niewymierna.

2. Rozstrzygnąć, dla której wartości parametru A funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - 3e^x + 2}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'_A(0)$ dla tej wartości parametru A .

02-03

Zadanie **1. (2 punkty)**

Dowieść, że liczba $\sqrt{7}$ jest niewymierna.

Zadanie **2. (3 punkty)**

Rozstrzygnąć, dla której wartości parametru A funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze i obliczyć $f'_A(0)$ dla tej wartości parametru A .

06-03

Zadanie **1.** (3 punkty)

Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = \frac{1}{x} - |x - 2|$$

na przedziale $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$. Podać punkty, w których te wartości są osiągane.

09-03

Zadanie **1.** (3 punkty)

Rozwiązać nierówność

$$\log_{(x+1)/2}(x+6) \leq 2\log_{(x+1)/2}|x|.$$

09-04

Zadanie **1.** (3 punkty)

Wyznaczyć wszystkie wartości parametru A , dla których funkcja

$$f_A(x) = \begin{cases} \frac{e^{Ax} - e^{Ax^2} - Ax}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze. Obliczyć $f'_A(0)$ dla każdej z wyznaczonych wartości parametru A .

02-05

Zadanie **1.** Dowieść, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi nierówność

$$\binom{2n+2}{n} \leq 4^n.$$

06-05

Zadanie **1.** (3 punkty)

Wyznaczyć wartość parametru A , dla której funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{3x} - e^{2x} - x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru.

02-06

Zadanie **1.** Wyznaczyć wartość parametru A , dla której funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - 4e^x + 2x + 3}{x^3} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru.

06-06

Zadanie **1.** Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^2 - 6|x + 1|$$

na przedziale $[-4, 2]$.

Wyznaczyć wszystkie punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągnięte.

09-06

Zadanie **1.** Wyznaczyć wartość parametru A , dla której funkcja f określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x} - e^x - x}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ A & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla tej wartości parametru.

06-07

Zadanie 1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^2 - 5|x - 1|$$

na przedziale $[-5, 3]$. Podać punkty, w których wartości najmniejsza i największa są osiągane.

09-07

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 32$$

na przedziale $[-1, 1]$ i podać, w których punktach wartości najmniejsza i największa są osiągane.

06-08

1. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji

$$f(x) = x + 2|\cos x|$$

na przedziale $[0, 3\pi/2]$ oraz określić, w których punktach te wartości są osiągane.

09-08

1. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb rzeczywistych A, B, C , dla których funkcja

$$f(x) \begin{cases} \frac{e^{4x} + Ax + B}{x^2} & \text{dla } x \neq 0 \\ C & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

jest różniczkowalna w zerze oraz obliczyć $f'(0)$ dla każdej z wyznaczonej trójki parametrów (A, B, C) .

09-10

Zadanie 1. (3 punkty)

Wyznacz największą i najmniejszą wartość funkcji

$$f(x) = x^2 - 3|x + 1|$$

na przedziale $[-2, 4]$. Podaj punkty, w których wartości największa i najmniejsza są osiągane.

02-12

1. Niech $f(x) = |x^2 - 4| - 4|x - 2| + 2|x + 2|$. Zbadaj różniczkowalność f : wyznacz wszystkie punkty, w których f jest różniczkowalna.

09-13

Zadanie **2.** Funkcja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - e}{x - 1} & \text{dla } x \neq 1 \\ A & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

Dla której wartości parametru A funkcja f jest różniczkowalna w punkcie 1 i jaka jest wówczas wartość $f'(1)$?

09-14

Zadanie **1.** Funkcja $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Udowodnić, że dla dowolnych $x, y \in [-1, 1]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|x - y|}{2}.$$

06-15

Zadanie **1.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych $x, y \in (1, +\infty)$ zachodzi nierówność

$$|\ln x - \ln y| \leq |x - y|.$$

09-15

Zadanie **1.** Udowodnić, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y zachodzi nierówność

$$|\arctg x - \arctg y| \leq |x - y|.$$

02-17

Zadanie **1.** Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{13} < \arctg 5 - \arctg 3 < \frac{1}{5}.$$

Wskazówka: Skorzystać z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej.

09-17

Zadanie 1. Niech $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie funkcją zdefiniowaną wzorem

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x.$$

Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(16) + f(18) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(17) ?$$

09-18

Zadanie 1. Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dana jest wzorem $f(x) = x^2 + 50 \ln x$.

Rozstrzygnąć, która liczba jest większa: $f(5) + f(7)$ czy $2f(6)$?

06-19

Zadanie 1. Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych $x, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ zachodzi nierówność

$$|\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y| \geqslant |x - y|.$$

02-20

Zadanie 2. Funkcja $f : [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ jest określona wzorem $f(x) = \sqrt[4]{1 + 5x^4}$. Dowieść, że dla każdych $x, y \in [-2, 2]$ zachodzi nierówność

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{40}{27} \cdot |x - y|.$$

06-20

Zadanie 2. Obliczyć granicę

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^x}\right)^{(x+1)^x}.$$

09-20

Zadanie 1. Rozstrzygnąć, czy funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ określona wzorem

$$f(x) = \sqrt{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

jest różniczkowalna w zerze.

02-21

Zadanie **1.** Udowodnić nierówności

$$\frac{1}{85} < \operatorname{arctg} 13 - \operatorname{arctg} 11 < \frac{1}{61}.$$

02-22

Zadanie **1.** Niech funkcja $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem

$$f(x) = e^{\sqrt{x}},$$

gdzie pierwiastek jest w wykładniku. Rozstrzygnąć, która z liczb jest większa:

$$f(5) + f(7) \quad \text{czy} \quad 2 \cdot f(6) ?$$

09-22

Zadanie **1.** Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x > -1$ zachodzi nierówność

$$e^x \geq 1 + \ln(x+1).$$

02-23

Zadanie **1.** Dowieść, że dla każdych liczb rzeczywistych $x > y > 1$ zachodzi nierówność

$$y + 2\operatorname{arctg} x < x + 2\operatorname{arctg} y.$$

02-23

Zadanie **1.** Dowieść, że dla każdej liczby rzeczywistej $x \in (0, 1)$ zachodzi nierówność

$$2^x < 1 + x.$$