

Lista 3-1

51. Dla $z = 2 + 3i$ oraz $w = 1 - i$ zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby

$$z, \quad w, \quad z + w, \quad z - w, \quad z \cdot w.$$

52. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczbę

$$\frac{5 + i}{1 + i}.$$

53. Sprawdź, że dla $z, w \in \mathbb{C}$ zachodzi równość

$$\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}.$$

Przypomnienie: Dla $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ mamy, że $\overline{z} = a - ib$.

54. Oblicz poniższe wyrażenia tak, aby wynik był liczbą rzeczywistą:

a) $(1 + i)^8$,

wskazówka: najpierw oblicz $(1 + i)^2$,

b) $(1 + i\sqrt{3})^3$,

wskazówka: skorzystaj ze wzorów skróconego mnożenia.

55. Oblicz

$$\left| \frac{(-3 + 4i)^3}{(2 - i)^5} \right|.$$

Przypomnienie: $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$ oraz $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, czyli $|z^n| = |z|^n$.

56. Rozwiąż równanie dla $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 - z + 2 = 0.$$

57. Przedstaw poniższe liczby zespolone w formie $a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$:

$$e^{i\pi}, \quad 2e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad -e^{i\frac{2\pi}{3}}.$$

Przypomnienie: $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

58. Przedstaw poniższe liczby zespolone w formie $re^{i\alpha}$, gdzie $r, \alpha \in \mathbb{R}$ oraz $r, \alpha > 0$:

$$-1, \quad 3i, \quad 1 - i.$$

Przypomnienie: $e^{i\alpha} = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha)$.

59. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby należące do zbioru

$$\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}.$$

Przypomnienie: $|z - w|$ to odległość liczby z od liczby w .

60. Rozwiąż równanie dla $z \in \mathbb{C}$

$$z = \overline{z}.$$

Uwaga: Dla $a, b, A, B \in \mathbb{R}$ mamy, że

$$a + ib = A + iB \iff a = A \text{ oraz } b = B.$$

G5* Rozwiąż równanie dla $z \in \mathbb{C}$

$$z^2 = 1 + i.$$

Wsk. Zapisz z jako $z = a + ib$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$. Oblicz z^2 i skorzystaj z poprzedniej Uwagi.