

## Lista 4-1

71. Zbadaj monotoniczność ciągu  $a_n = n - \frac{5}{2}$  oraz ciągu  $\frac{1}{a_n}$ .

72. Podaj wzór na wyraz ogólny ciągu rekurencyjnego  $(a_n)$  zadanego jako

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 2a_n + 1.$$

Wskazówka: Wypisz początkowe wyrazy tego ciągu. Zgadnij wzór na wyraz ogólny tego ciągu. Sprawdź, że zgadnięty wzór spełnia powyższe równania.

73. Uzasadnij, że dla  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{n}{n^2 + 1} \right| \leq \frac{1}{2}.$$

74. Znajdź stałą  $C > 0$  taką, że dla  $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{1}{n^2 - 7} \right| \leq C.$$

Wskazówka: Zauważ, że jeśli  $n \in \mathbb{N}$ , to  $|n^2 - 7| \geq \dots$

75. Zbadaj, który z poniższych ciągów jest ograniczony

$$\text{a) } n - \sqrt{n}, \quad \text{b) } \frac{2n + 3}{n + 1}, \quad \text{c) } \frac{2n - 3}{n + 1}, \quad \text{d) } n \cdot \sin(n\pi), \quad \text{e) } n \cdot \cos(n\pi).$$

76. Oblicz granicę ciągu

$$\frac{n^5 + 4n^3}{3n^4 + 5}.$$

77. Oblicz granicę ciągu

$$\frac{\sqrt{n^4 + n^3} + \sqrt{n^2 + 1}}{n^3 + 1}.$$

78. Oblicz granicę ciągu

$$\frac{\sqrt{n^4 + n^3} \cdot \sqrt{n^2 + 1}}{n^3 + 1}.$$

79. Oblicz granicę ciągu

$$\frac{\sqrt{n^4 + n^2} - \sqrt{n^2 + 1}}{n^2 + 1}.$$

Wskazówka:  $\frac{a-b}{c} = \frac{a}{c} - \frac{b}{c}$ .

80. Oblicz granicę ciągu

$$\frac{\sqrt{n^4 + n^3} - \sqrt{n^4 + 1}}{n + 1}.$$

Wskazówka:  $\frac{\sqrt{a} - \sqrt{b}}{c} = \frac{a - b}{c \cdot (\sqrt{a} + \sqrt{b})}$ .