Lista 7-2

131. Podaj wzór stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(a, f(a))$ dla
$$a = 0, \quad a = 1.$$
Naszkicuj wykres tej funkcji oraz uzyskane styczne.

132. Znajdź wzór prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = \ln(x)$. Naszkicuj wykres tej funkcji oraz uzyskaną styczną.

133. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji
$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x.$$
Naszkicuj wykres tej funkcji i zaznacz uzyskane ekstrema (nie musisz dokładnie wyznaczać wszystkich miejsc zerowych tej funkcji).

134. Wyznacz przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji
$$f(x) = x\ln(x).$$

135. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji
$$f(x) = x^3 - 3x^2$$
dla $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$.

136. Znajdź największą i najmniejszą wartość funkcji
$$f(x) = \sqrt{x}\ln(x)$$
dla $x \in [\frac{1}{9}, \frac{4}{9}]$.

137. Oblicz granice
$$\lim_{x\to 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}, \quad \lim_{x\to\pi} \frac{\sin x}{x - \pi}, \quad \lim_{x\to\pi^+} \frac{\cos x}{x - \pi}, \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}, \quad \lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x).$$

138. Oblicz granice ciągów:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+2)}{\ln(2n)}$

Wsk. Zastąp n przez zmienną rzeczywistą x i skorzystaj z reguły de l'Hospitala.

b) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$

Wsk. Zastąp $\frac{1}{n}$ przez zmienną rzeczywistą x i skorzystaj z reguły de l'Hospitala.

139. Oblicz drugą pochodną poniższych funkcji:
$$\mathrm{tg}(x), \quad \mathrm{arctg}(x).$$

140. Wyznacz przedziały wypukłości funkcji
$$f(x) = e^{-x^2}$$
oraz naszkicuj wykres tej funkcji zaznaczając jej punkty przegięcia.

G12* Oblicz jakie powinny być wymiary puszki metalowej w kształcie walca o ustalonej objętości, aby do jej wykonania zużyć minimalną ilość metalu. (Uwaga: Szukane wymiary to stosunek wysokości walca do promienia jego podstawy).

G13* Korzystając z wyników uzyskanych w zad. 132 uzasadnij, że
$$x^{\frac{1}{x}} \le e^{\frac{1}{e}}$$
dla $x > 0$.