

Lista 9-2

171. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

172. Zbadaj czy powyższy szereg potęgowy jest zbieżny dla $x = 1$ oraz $x = -1$.

173. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n}$$

i oblicz sumę tego szeregu korzystając ze wzoru na sumę szeregu geometrycznego.

Przypomnienie: Ten wzór to $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ dla $|x| < 1$.

174. Korzystając z kryterium d'Alemberta uzasadnij, że szereg potęgowy

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

jest zbieżny dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.

175. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}.$$

176. Zbadaj czy powyższy szereg potęgowy jest zbieżny dla $x = 1$ oraz $x = -1$.

177. Korzystając z rozwinięcia

$$(*) \quad \ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{dla } x \in [-1, 1)$$

oblicz sumę szeregu

$$s = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

Wsk. Wstaw $x = -1$ do równania (*).

178. Wyznacz promień zbieżności szeregu potęgowego

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

179. Zbadaj czy powyższy szereg potęgowy jest zbieżny dla $x = 1$ oraz $x = -1$.

180. Korzystając z rozwinięcia

$$(**) \quad \operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad \text{dla } x \in [-1, 1]$$

oblicz sumę szeregu

$$s = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

Wsk. Wstaw $x = \dots?$ do równania (**).

G14* Uzasadnij rozwinięcia (*) oraz (**) korzystając z tego, że pochodna wchodzi pod szereg potęgowy tzn. $\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (c_n x^n)'$.