

Kolokwium 4

1. Oblicz granice

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7n^3 + 2n + 1}{n^4 + 3n^2 + 2} =$

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + \sqrt{n^9 + n}}{n^4 + 3n^3 + 3} =$

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^5 + \sqrt{4n^{10} + 1}}{n^5 + 3n^3 + 3} =$

d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 1)\sqrt{4n^{10} + 5}}{n^7 + 3n^5 + 1} =$

e) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^6 + n^3 + 1} - n^3) =$

2.

a) Udowodnij, że dla $n \in \mathbb{N}$

$$n \leq 2^n$$

Wsk. $1 + 1 + \dots + 1 = n$, $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = ?$

b) Udowodnij, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{n} = \infty$$

Wsk. Wykorzystaj punkt a).

3. Korzystając z definicji pochodnej oblicz pochodną funkcji

a) $f(x) = x^3$

b) $f(x) = \sqrt{x}$

4. Korzystając ze wzorów $(\sin(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\sin(x)$, $(e^x)' = e^x$, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ oblicz pochodną.

a) $(x^7 e^x)' =$

b) $(\operatorname{tg}(x))' =$

c) $\left(\frac{x^3 \ln(x)}{x^2 + 1} \right)' =$

d) $(\log_2(x))' =$

e) $\left((\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \right)' =$

5.

a) Korzystając ze wzoru $(fg)' = f'g + fg'$ wyprowadź wzór na pochodną iloczynu trzech funkcji.

b) Oblicz pochodną funkcji $x^7 e^x \cos(x)$.

6. Oblicz sumę szeregu

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n =$

b) $\sum_{n=3}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{4}\right)^n =$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{4^n} \cdot \frac{3^n - 2^n}{4^n} =$

7. Oblicz granicę

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x} - 2}{x - 8}$$

8. W kwadrat o boku a wpisano okrąg, w który wpisano kwadrat, w który wpisano okrąg i tak dalej. Oblicz sumę pól tych wszystkich kwadratów.

9. Podaj wzór stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x^3$ w punkcie $(1,1)$.

10. Znajdź wzór prostej przechodzącej przez początek układu współrzędnych, która jest styczna do wykresu funkcji $f(x) = e^x$.