

K1. Schemat mnożenia i permutacje

1. Wstęp. Kombinatoryka jest dziedziną matematyki skoncentrowaną na określaniu liczby elementów danego zbioru (o skończonej liczbie elementów). W przypadku prostych zbiorów kombinatoryka dostarcza prostych schematów podających liczbę elementów danego zbioru. W przypadku zbiorów definiowanych w skomplikowany sposób schematy kombinatoryczne mogą służyć jedynie jako pomoc do określenia liczby elementów tych zbiorów.

2. Mnożenie. Podstawowy schemat kombinatoryczny jest wyjaśniony na następującym przykładzie

Przykład 1. Rozważmy następujący problem:

Ile różnych kreacji ubioru można stworzyć mając do dyspozycji trzy różne koszule i dwie różne marynarki?

Z reguły zagadnienia kombinatoryczne, które pojawiają się w szkole opierają się na pewnej sytuacji (np. rzuty kostką, lub monetą, wybieranie kul o różnych kolorach, wybieranie kart z talii kart itp.), która modeluje pewne matematyczne zagadnienie. Dlatego pierwszym krokiem przy rozwiązywaniu takich zagadnień jest zrozumienie, jakie zagadnienie matematyczne jest modelowane przez daną sytuację.

W tym wypadku mamy trzy różne koszule i dwie różne marynarki. Z tej kolekcji ubrań mamy wybrać jedną koszulę i jedną marynarkę. Pytanie jest takie, na ile różnych sposobów możemy to zrobić.

Podstawowy schemat kombinatoryczny stwierdza, że tych sposobów będzie $3 \cdot 2 = 6$.

Wynika to z tego, że koszulę możemy wybrać na 3 sposoby i do każdego z tych wyborów musimy jeszcze dobrać marynarkę, co możemy uczynić na 2 sposoby. Co daje nam $3 \cdot 2 = 6$ sposobów.

Możemy też wypisać wszystkie możliwości i je policzyć. W tym celu oznaczamy koszule przez $k1, k2, k3$, a marynarki przez $m1, m2$. Wybór koszuli $k1$ i marynarki $m1$ oznaczamy jako $(k1, m1)$. Oznaczając analogicznie pozostałe możliwe wybory możemy je wszystkie wypisać następująco:

$$\begin{array}{lll} (k1, m1) & (k2, m1) & (k3, m1) \\ (k1, m2) & (k2, m2) & (k3, m2) \end{array}$$

i widać, że jest ich 6.

Dzięki temu widać też, jakie matematyczne zagadnienie modeluje dana w tym zadaniu sytuacja. Mamy zbiór koszul $K = \{k1, k2, k3\}$ i zbiór marynarek $M = \{m1, m2\}$. Tworzymy tzw. *iloczyn kartezjański*, czyli zbiór par

$$K \times M = \{(k, m) : k \in K, m \in M\}$$

i staramy się znaleźć liczbę elementów tego zbioru par.

W następnym przykładzie, zobaczymy inny podstawowy aspekt zagadnień kombinatorycznych.

Przykład 2. Rozważmy następujący problem:

Pan X. wybiera się w delegację. Do swej walizki chce spakować jedną koszulę i jedną parę spodni. Na ile sposobów może dokonać swego wyboru mając do dyspozycji trzy różne koszule i dwie różne pary spodni?

Jak widać, przedstawiona w powyższym zadaniu sytuacja modeluje dokładnie to samo zagadnienie matematyczne, co sytuacja przedstawiona w Przykładzie 1. Sytuacja jest inna, ale zagadnienie się nie zmienia. Stosujemy więc ten sam schemat i uzyskujemy $3 \cdot 2 = 6$ możliwości.

Kolejny przykład pokazuje trudności, które mogą się pojawić przy ocenie jakie zagadnienie matematyczne jest modelowane przez daną sytuację.

Przykład 3. Rozważmy następujący problem:

Pan X. wybiera się w delegację. Do swej walizki chce spakować dwie koszule. Na ile sposobów może dokonać swego wyboru mając do dyspozycji trzy różne koszule?

Mimo, iż ta sytuacja wydaje się analogiczna do sytuacji z poprzedniego przykładu, to jednak jest ona inna. Zastosowanie poprzedniego schematu może wyglądać następująco:

Pan X najpierw wybiera pierwszą koszulę i może to zrobić na 3 sposoby, a następnie z pozostałych dwóch koszul wybiera drugą koszulę i może to zrobić na 2 sposoby. Po przemnożeniu dostajemy więc ponownie $3 \cdot 2 = 6$ sposobów.

Niestety powyższe rozwiązanie nie jest poprawne i można to stwierdzić następująco:

a) Gdyby Pan X. miał tylko dwie koszule, to miałby tylko jeden wybór, a nie $2 \cdot 1 = 2$ wybory.

b) Mając trzy koszule Pan X. może po prostu zdecydować, która koszula zostaje w domu. Są więc 3 możliwości ustalenia, która koszula nie zostanie zabrana.

c) 6 sposobów wyliczonych w niepoprawnym rozwiązaniu zawiera sposoby, które nie są różne. To oznacza, że są tam sposoby, które są takie same, a my zliczamy je wielokrotnie. Np. wybór koszuli $k1$, a potem $k2$ daje taki sam rezultat jak wybór koszuli $k2$, a potem $k1$. Widać więc, że w takim rozwiązaniu każdy wybór jest liczony podwójnie i dlatego uzyskaną liczbę sposobów musimy **podzielić** przez 2. To daje $6/2 = 3$ różne sposoby.

d) Możemy wypisać wszystkie możliwości. Tym razem jednak wybór koszuli $k1$ i koszuli $k2$ lepiej jest oznaczyć jako $\{k1, k2\}$. Dzięki temu zbiór wszystkich możliwości składa się z

$$\{k1, k2\} \quad \{k1, k3\} \quad \{k2, k3\}$$

i widać, że jest ich 3.

Dzięki temu widać też, jakie matematyczne zagadnienie modeluje dana w tym zadaniu sytuacja. Mamy zbiór koszul $K = \{k1, k2, k3\}$, ten zbiór ma swoje podzbiory. Interesują nas tylko podzbiory dwu-elementowe (przedstawione powyżej) i chcemy stwierdzić ile ich jest.

Rozważmy kolejny

Przykład 4. Oblicz ile jest liczb dwucyfrowych, których cyfry są wzięte ze zbioru $\{1, 2, 3\}$.

W takim zadaniu warto doprecyzować (i najlepiej umieścić to w treści zadania), że cyfry brane z tego zbioru nie mogą się powtarzać.

Po tym doprecyzowaniu można uznać, że powyższa sytuacja modeluje to samo zagadnienie matematyczne, co sytuacja w Przykładzie 3. Mamy wziąć dwie różne cyfry ze zbioru o trzech elementach i stworzyć z nich liczbę.

Niestety, ta analogia nie jest dobra, bo przy tworzeniu liczby z tych dwóch cyfr ważna będzie ich **kolejność**.

Dlatego, to zadanie możemy poprawnie rozwiązać w sposób następujący:

Mamy trzy możliwości wybrania pierwszej cyfry i dwie możliwości wybrania drugiej cyfry z pozostałych dwóch cyfr. Razem daje to $3 \cdot 2 = 6$ możliwości.

Warto jeszcze stwierdzić, czy w związku z tym matematyczne zagadnienie modelowane przez tą sytuację jest takie samo jak zagadnienie w Przykładzie 1.

W tym celu wypisujemy wszystkie możliwości:

12	13
21	23
31	32

i widać, że matematyczne zagadnienie modelowane w Przykładzie 4 jest zupełnie inne niż w Przykładzie 1. Mimo, iż używamy tego samego podstawowego schematu mnożenia przedstawionego w Przykładzie 1, aby obliczyć liczbę możliwości w Przykładzie 4.

Zagadnienie matematyczne modelowane w Przykładzie 4 można zrozumieć przez odpowiednią modyfikację zagadnienia modelowanego w kolejnym przykładzie.

Przykład 5. Oblicz ile jest liczb dwucyfrowych, których cyfry są elementami zbioru $\{1, 2, 3\}$ (cyfry mogą się powtarzać).

Stosując podstawowy schemat mnożenia widzimy, że pierwszą cyfrę można wybrać na 3 sposoby, a drugą cyfrę też można wybrać na 3 sposoby. To daje $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ możliwości.

Wypisanie tych możliwości pozwoli nam zobaczyć modelowane zagadnienie matematyczne:

11	12	13
21	22	23
31	32	33

Można więc stwierdzić, że znowu mamy do czynienia z iloczynem kartezjańskim. Dla zbioru $C = \{1, 2, 3\}$ tworzymy zbiór par

$$C \times C = \{(a, b) : a, b \in C\}$$

i staramy się znaleźć liczbę elementów tego zbioru par. Jest więc to zagadnienie analogiczne do zagadnienia z Przykładu 1.

Natomiast poprzednie zagadnienie z Przykładu 4 powstaje przez usunięcie tych par, które “leżą na przekątnej”, tzn. tych liczb, w których cyfry się powtarzają.

3. Permutacje. Zbiór o różnych elementach możemy uporządkować, czyli ustawić w ciąg, na wiele sposobów. Na przykład zbiór $\{1, 2, 3\}$ możemy uporządkować następująco

1, 2, 3	1, 3, 2
2, 1, 3	2, 3, 1
3, 1, 2	3, 2, 1

Takie uporządkowania nazywamy *permutacjami* tego zbioru. Stosując schemat mnożenia możemy znaleźć liczbę tych wszystkich permutacji.

Na pierwszym miejscu ustawiamy wybrany element zbioru. Takich wyborów mamy 3. Na drugim miejscu ustawiamy wybrany element z pozostałych elementów zbioru. Takich wyborów mamy 2. A na trzecim miejscu ustawiamy ostatni pozostały element zbioru na 1 sposób. To daje $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ sposobów.

Ogólnie, przy zbiorze, który ma n elementów postępujemy analogicznie. Na pierwszym miejscu ustawiamy wybrany element zbioru. Takich wyborów mamy n . Na drugim miejscu ustawiamy wybrany element z pozostałych elementów zbioru. Takich wyborów mamy $n - 1$ itd. W końcu na ostatnim n -tym miejscu ustawiamy ostatni pozostały element zbioru na 1 sposób. To daje $n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1$ wszystkich możliwości.

To motywuje wprowadzenie symbolu $n!$ (czytaj: n silnia) danego jako

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot 1,$$

albo

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Przykładowo

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Oczywiście $1! = 1$. Należy jednak wiedzieć o bardzo ważnej konwencji, dzięki której działają różne wzory kombinatoryczne, a mianowicie

$$0! = 1.$$

Powyższe rozważania dają nam następujący

Fakt. *Zbiór n -elementowy można uporządkować (ustawić w ciąg) na $n!$ sposobów.*

Przykład 6. Cztery osoby mogą ustawić się w kolejce na $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ sposoby.

Przykład 7. Ze zbioru sześćo-elementowego wybieramy pięć elementów i ustawiamy je w ciąg. Na ile sposobów można to zrobić?

Wybór pięciu elementów z dostępnych sześciu można zrealizować przez wskazanie tego elementu, który nie zostanie wybrany. To możemy uczynić na 6 sposobów. Wybrane 5 elementów porządkujemy na $5!$ sposobów. To daje $6 \cdot 5! = 6 \cdot 120 = 720$ wszystkich możliwości.

4. Trudne zbiory. Jak wspomnieliśmy wcześniej, w niektórych przypadkach sama definicja zbioru może dostarczać dodatkowych trudności.

Przykład 8. Rozważmy następujące zadanie.

Podaj liczbę dzielników liczby $N = 12^3 \cdot 14^4 \cdot 15^5$.

Aby rozwiązać to zadanie musimy dokonać rozkładu liczby N na czynniki pierwsze. Robimy to w sposób następujący.

$$12 = 3 \cdot 4 = 2^2 \cdot 3, \quad 14 = 2 \cdot 7, \quad 15 = 3 \cdot 5.$$

Dzięki temu

$$N = 12^3 \cdot 14^4 \cdot 15^5 = (2^2 \cdot 3)^3 \cdot (2 \cdot 7)^4 \cdot (3 \cdot 5)^5 = 2^6 \cdot 3^3 \cdot 2^4 \cdot 7^4 \cdot 3^5 \cdot 5^5 = 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^4.$$

Czyli

$$(*) \quad N = 2^{10} \cdot 3^8 \cdot 5^5 \cdot 7^4.$$

W następnym kroku analizujemy pojęcie *dzielnika*. Dana liczba będzie dzielić N jeśli będzie iloczynem, w którym mogą występować **jedynie** czynniki pierwsze występujące w powyższym rozkładzie N i to w potęgach nie wyższych niż ta, która występuje w tym rozkładzie. Ponadto, nie ma obowiązku, aby wszystkie czynniki pierwsze występujące w rozkładzie $(*)$ musiały wystąpić w iloczynie reprezentującym dzielnik liczby N .

W takim razie widać, że dowolny dzielnik D liczby N jest postaci

$$D = 2^a \cdot 3^b \cdot 5^c \cdot 7^d,$$

gdzie a może przyjmować wszystkie całkowite wartości od 0 do 10 (dla $a = 0$ mamy, że $2^0 = 1$, co oznacza, że tak naprawdę nie bierzemy żadnych potęg dwójki do iloczynu definiującego dzielnik D). Widać więc, że mamy $10 + 1 = 11$ możliwości do ustalenia odpowiedniej wartości liczby a .

Podobnie:

b może przyjmować wszystkie całkowite wartości od 0 do 8,

c może przyjmować wszystkie całkowite wartości od 0 do 5,

d może przyjmować wszystkie całkowite wartości od 0 do 4.

Co daje 9 możliwości dla ustalenia b , 6 możliwości dla ustalenia c i 5 możliwości dla ustalenia d .

Po tej analizie wkracza znany nam podstawowy schemat mnożenia uzyskanych możliwości. Dzięki niemu widać, że liczba dzielników liczby N wynosi $11 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 5 = 2970$.

Innym przykładem pokazującym możliwość komplikacji definicji zbioru jest

Przykład 9. Ile jest liczb dwucyfrowych o tej własności, że suma ich cyfr jest liczbą pierwszą?

W celu rozwiązania tego zadania przypomnijmy, że 1 nie jest liczbą pierwszą, a początkowe liczby pierwsze, to

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.$$

Dalszych liczb pierwszych nie musimy wypisywać, bo suma cyfr liczby dwucyfrowej jest mniejsza od 20. W istocie, ta suma jest nawet mniejsza od 19, bo może co najwyżej wynieść 18 dla liczby 99.

Dzięki temu możemy ograniczyć interesujący nas zbiór liczb pierwszych do

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17.$$

Po oznaczeniu sumy cyfr liczby dwucyfrowej przez s , możemy rozpatrzeć wszystkie przypadki:

$s = 2$ - możliwe liczby to 11, 20.

$s = 3$ - 12, 21, 30.

$s = 5$ - 14, 23, 32, 41, 50.

$s = 7$ - 16, 25, 34, 43, 52, 61, 70.

$s = 11$ - 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

$s = 13$ - 49, 58, 67, 76, 85, 94.

$s = 17$ - 89, 98.

To daje razem 33 wszystkich możliwości.

5. Zadania.

Z.K1.1 Pan X. chce kupić w barze kaszę i surówkę na wynos. Bar oferuje dwa rodzaje kaszy i trzy rodzaje surówek. Dzięki temu Pan X. może skomponować swój posiłek na wynos na następującą liczbę sposobów:

A. $2+3$.

B. $2 \cdot 3$.

C. 2^3 .

D. 3^2 .

Wybierz poprawną liczbę sposobów spośród powyższych możliwości i ją uzasadnij.

Z.K1.2 Sala teatralna jest oświetlana przez sześć lamp umieszczonych w różnych miejscach sali. Każda z tych lamp może świecić na czerwono, na zielono i na niebiesko, albo wcale (to oznacza, że może świecić na różne powyżej wymienione kolory w tym samym czasie). Oblicz liczbę możliwości na oświetlenie tej sali przy pomocy tych lamp.

Z.K1.3 W zawodach matematycznych bierze udział trzech uczniów. Wyniki tych zawodów podają, które miejsce (pierwsze, drugie, trzecie) uzyskuje dany uczestnik na podstawie punktów zdobytych za rozwiązanie zadań w trakcie zawodów. Uczestnicy, którzy zdobędą tyle samo punktów, są klasyfikowani na tym samym miejscu. Podaj liczbę możliwych wyników tych zawodów.

Z.K1.4 Oblicz liczbę dzielników liczby

$$N = 50^2 \cdot 51^3 \cdot 52^4.$$

Z.K1.5 Sąsiednie liczby pierwsze to takie różne liczby pierwsze, między którymi nie ma innej liczby pierwszej. Oblicz, ile jest liczb trzycyfrowych o tej własności, że każde dwie sąsiednie cyfry tej liczby są sąsiednimi liczbami pierwszymi.