

K2. Kombinacje i wariacje

6. Wariacje z powtórzeniami. Przekazany w poprzednim temacie schemat mnożenia pozwolił nam na przemycenie pojęcia wariacji. W Przykładzie 5 obliczyliśmy ile jest liczb dwucyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ przy założeniu, że cyfry mogą się powtarzać. Przypomnijmy, że skoro mamy dwie pozycje i na każdej możemy ustawić trzy cyfry, to uzyskujemy $3 \cdot 3 = 3^2$ takich liczb.

Podobnie uzyskamy 7^4 liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przy założeniu, że cyfry mogą się powtarzać. Jak widać jest to bardzo prosty schemat i musimy jedynie pilnować, aby nie pomylić co podnosimy do jakiej potęgi. Dlatego, np. w tym przypadku warto wyobrazić sobie 4 pozycje, stwierdzić, że na każdej mamy 7 możliwości i dzięki temu dostajemy

$$7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 7^4$$

wszystkich możliwości.

Taka sytuacja jest właśnie przykładem *wariacji z powtórzeniami*. Ogólnie: jeśli mamy zbiór n -elementowy, wybieramy z niego k elementów tak, że mogą się one powtarzać i ustawiamy je w ciąg (czyli liczy się też ich kolejność), to jest to k -elementowa wariacja z powtórzeniami zbioru n -elementowego.

Jak widać jest to dużo mądrych słów na opisanie bardzo prostego schematu, w którym zawsze będziemy mieli

$$n \cdot n \cdot \dots \cdot n = n^k$$

wszystkich możliwości (i tylko musimy pilnować co podnosimy do jakiej potęgi).

7. Wariacje bez powtórzeń. W poprzednim temacie mieliśmy też do czynienia z drugim typem wariacji. W Przykładzie 4 obliczyliśmy ile jest liczb dwucyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3\}$ przy założeniu, że cyfry nie mogą się powtarzać. Przypomnijmy, że skoro mamy dwie pozycje i na pierwszej możemy ustawić trzy cyfry, a na drugiej już tylko dwie cyfry, to dostajemy $3 \cdot 2 = 6$ wszystkich możliwości.

Podobnie uzyskamy $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$ liczb czterocyfrowych o cyfrach ze zbioru $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ przy założeniu, że cyfry nie mogą się powtarzać. Jak widać jest to również prosty schemat i był tłumaczony w poprzednim temacie także przy wprowadzaniu pojęcia permutacji i ich liczby.

Powyższa sytuacja jest przykładem *wariacji bez powtórzeń*. Ogólnie (w mądrych słowach): jeśli mamy zbiór n -elementowy, wybieramy z niego k elementów tak, że nie mogą się one powtarzać i ustawiamy je w ciąg (czyli ponownie liczy się ich kolejność), to jest to k -elementowa wariacja bez powtórzeń zbioru n -elementowego.

W tym schemacie zawsze będziemy mieli

$$n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1)$$

wszystkich możliwości.

W celu wprowadzenia dalszych pojęć warto zauważyć, że dzięki poznanej już “silni” możemy powyższą liczbę wszystkich możliwości wyrazić jako

$$(*) \quad n \cdot (n - 1) \cdot \dots \cdot (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!}.$$

Warto też zauważyć, że wprowadzone w poprzednim temacie permutacje, to n -elementowe wariacje bez powtórzeń zbioru n -elementowego :)

8. Kombinacje. W poprzednim punkcie dotyczącym wariacji wybieraliśmy cztery cyfry ze zbioru siedmiu cyfr i ustawialiśmy je w ciąg. Kombinacje dotyczą analogicznej sytuacji, w której wybrane elementy nie są ustawiane w ciąg, czyli nie liczy się ich kolejność.

Aby oderwać się trochę od świata cyfr rozważmy następujący

Przykład 10. Z klasy dwunasto-osobowej należy wybrać trzech uczniów na szkolną delegację. Na ile sposobów można to zrobić?

Gdyby liczyła się kolejność tych wybieranych osób, to korzystając z prostego schematu mnożenia (który akurat w tym przypadku został mądrze nazwany wariacjami bez powtórzeń) mielibyśmy

$$12 \cdot 11 \cdot 10$$

wszystkich możliwości.

Aby pozbyć się kolejności tych wybranych osób najpierw obliczamy (korzystając z permutacji), że wszystkich kolejności w jakie możemy ustawić trzy wybrane osoby jest $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Dlatego w początkowym wyniku $12 \cdot 11 \cdot 10$, po odrzuceniu kolejności, każda z możliwości jest liczona sześciokrotnie.

Wniosek więc jest taki, że aby rozwiązać to zadanie musimy **podzielić** $12 \cdot 11 \cdot 10$ przez 6. To nam daje

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = 2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$$

wszystkich możliwych składów delegacji.

Warto jeszcze dodać, że tak jak w (*), możemy wyrazić początkowy wynik jako

$$12 \cdot 11 \cdot 10 = \frac{12!}{9!}.$$

Dzięki temu wynik końcowy można zapisać tak:

$$\frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{6} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10}{3!} = \frac{12!}{3! \cdot 9!} = \frac{12!}{3! \cdot (12-3)!}$$

Powyższy przykład motywuje wprowadzenie następującego symbolu

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

definiowanego dla $k \leq n$ i czytanego jako “ n po k ”.

Ogólnie, *kombinacje* polegają na wyborze k (różnych) elementów ze zbioru n -elementowego i mamy następujący

Fakt. Liczba możliwości na ile możemy wybrać k elementów ze zbioru n -elementowego (czyli kombinacji) wynosi $\binom{n}{k}$.

Trzeba tu doprecyzować, że pojęcie zbioru zakłada, że nie zawiera on takich samych elementów. Np. nie ma zbioru, w którym są dwie liczby 1. Formalnie $\{1, 1\} = \{1\}$. To stwarza pewną trudność, z którą będziemy sobie radzić potem. W poprzednim temacie wyraźnie było wskazywane, że dany zbiór ma różne elementy. Od teraz jednak powinniśmy wiedzieć, że samo pojęcie zbioru gwarantuje z definicji, że jego elementy są różne.

Druga uwaga dotyczy tego, że powyższe kombinacje powinny się nazywać “kombinacjami bez powtórzeń”, aby podkreślić, że elementy są wybierane w taki sposób, że nie mogą się powtarzać. Tego typu nazewnictwo nie było dawniej stosowane i pojęcie kombinacji z definicji zakładało, że wszystkie wybierane elementy są różne (i oczywiście, że nie liczy się ich kolejność). Obecnie ten problem w nazewnictwie jest prostowany (patrz Wikipedia hasło “kombinacja bez powtórzeń”).

Dzięki poprzednim rozważaniom łatwo możemy stwierdzić prawdziwość powyższego Faktu. Najpierw wybieramy k elementów biorąc pod uwagę ich kolejność. To możemy zrobić zgodnie z (*) na $\frac{n!}{(n-k)!}$ sposobów. A potem dzielimy ten wynik przez $k!$, aby przestać uwzględniać kolejność tych k wybranych elementów. To daje $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ wszystkich możliwości.

9. Różne wzory. Podstawowe wzory, które warto znać i można łatwo przeliczyć samodzielnie, to

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Przykład 11. Warto wiedzieć, że tego typu wzory można dowodzić analitycznie bądź kombinatorycznie.

Np. przedostatni powyższy wzór można wykazać analitycznie następująco

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}.$$

Można go też wykazać kombinatorycznie: Wybór k elementów ze zbioru n -elementowego można zrealizować przez wskazanie tych $n-k$ pozostałych elementów, które nie zostaną wybrane. Dlatego $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Przypomnijmy również trudniejszy do wykazania wzór z analizy

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

i rozważmy kolejny

Przykład 12. Oblicz

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}.$$

Rozwiązanie analityczne korzysta z przypomnianego wzoru z analizy:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Rozwiązanie kombinatoryczne wymaga trochę gimnastyki. Najpierw musimy stworzyć odpowiedni model, który będzie pasować do tej sytuacji.

Taki model może wyglądać następująco:

Rozważmy zagadnienie polegające na zbadaniu, ile jest n -elementowych ciągów zero-jedynkowych. Tzn. mamy utworzyć ciąg (czyli liczy się kolejność) o n elementach składający się z zer i jedynek.

Możemy łatwo stwierdzić, że tych wszystkich ciągów jest 2^n (n pozycji, a na każdej dwie możliwości: zero lub jeden).

Sposób trudniejszy wyszczególnia $n+1$ przypadków. Bierzemy $k = 0, 1, \dots, n$ i dla takiego k badamy ile jest ciągów, gdzie występuje k zer ($n-k$ jedynek). W takiej sytuacji możemy wybrać te pozycje, gdzie umieścimy zera, a pozostałe miejsca wypełnić jedynekami. To znaczy, że musimy z n pozycji wybrać k pozycji dla zer i możemy to zrobić na $\binom{n}{k}$ sposobów. Liczba wszystkich możliwości będzie zaś sumą poszczególnych wyników uzyskanych dla wszystkich różnych wartości k . Widać więc, że tych ciągów będzie $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$.

Podsumowując, trudniejszy sposób dał nam powyższy wynik, który musi się zgadzać z wynikiem uzyskanym łatwiejszym sposobem i dlatego

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

10. Permutacje z powtórzeniami. Widząc jakie znaczenie ma to, czy w danym układzie elementy mogą bądź nie mogą się powtarzać, musimy wrócić do permutacji.

Permutacje (podobnie jak kombinacje) powinny być nazywane “permutacjami bez powtórzeń”, to jednak nie wydaje się być dobrym pomysłem.¹

Aby zrozumieć na czym polegają permutacje z powtórzeniami rozważmy następujący

Przykład 13. Oblicz, ile liczb siedmiocyfrowych można ułożyć mając do dyspozycji siedem cyfr:

$$2, 2, 3, 3, 3, 3, 5.$$

Tu trzeba wyjaśnić, że ta dyspozycyjność siedmiu cyfr niestety nie może być zakodowana w prosty sposób jako “zbiór” $\{2, 2, 3, 3, 3, 3, 5\}$. Jak już wspomnieliśmy wcześniej, z definicji, w zbiorze wszystkie elementy są różne i formalnie $\{2, 2, 3, 3, 3, 3, 5\} = \{2, 3, 5\}$.

Zadanie jednak ma perfekcyjny sens i przykładowe różne liczby, które możemy ułożyć mając do dyspozycji daną kolekcję cyfr to

$$2233335, \quad 2323533, \quad 5223333, \quad 3325233.$$

Aby rozwiązać to zadanie można postąpić następująco.

Najpierw wszystkie cyfry w danej kolekcji 2,2,3,3,3,3,5 traktujemy jako różne. Tych siedem “różnych” cyfr można ułożyć na 7! sposobów (zwykle permutacje).

Następnie, aby ująć to, że jednak nie rozróżniamy między dwoma cyframi danymi jako 2, musimy powyższy wynik podzielić przez liczbę możliwych ustawień tych cyfr w kolejności, czyli przez 2! (tak jak robiliśmy to przy kombinacjach, aby pozbyć się kolejności wybieranych elementów).

Podobnie, aby ująć to, że nie rozróżniamy między czterema cyframi danymi jako 3 (czyli nie liczy się ich kolejność na wybranych już i ustalonych dla nich czterech pozycjach w tworzonej liczbie), musimy poprzedni wynik podzielić przez liczbę możliwych ustawień tych cyfr w kolejności, czyli przez 4!.

Na końcu (dla spokoju) możemy poprzedni wynik podzielić przez 1!, aby uwzględnić to, że mamy jeszcze do dyspozycji jedną cyfrę daną jako 5.

Powyższe daje nam wynik końcowy

$$\frac{7!}{2! \cdot 4! \cdot 1!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{2} = 105.$$

Ogólnie, permutacje z powtórzeniami można określić następująco. Mamy zbiór k -elementowy $\{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Z tego zbioru tworzymy kolekcję składającą się z:

n_1 kopii elementu a_1 ,

n_2 kopii elementu a_2 ,

itd. aż do

n_k kopii elementu a_k .

Permutacja z powtórzeniami polega na ustawieniu elementów tej kolekcji w ciąg, który ma $n_1 + n_2 + \dots + n_k = n$ (uporządkowanych) elementów.

¹Najlepszym pomysłem byłoby wprowadzenie pojęcia “wariacji” zastępującego pojęcie “wariacji bez powtórzeń”. Wówczas mielibyśmy: wariacje, kombinacje i permutacje (z definicji - bez powtórzeń) oraz wariacje z powtórzeniami, kombinacje z powtórzeniami i permutacje z powtórzeniami (z definicji i z nazwy - z powtórzeniami :)

Liczba wszystkich takich różnych ustawień wynosi zaś

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_k!}.$$

11. Kombinacje z powtórzeniami. Poprzednio przedstawione schematy kombinatoryczne opierały się na użyciu prostego schematu mnożenia do zliczania dostępnych możliwości oraz na użyciu schematu dzielenia do eliminacji możliwości zliczanych wielokrotnie.

Ostatni schemat kombinatoryczny jest niestety trudniejszy. Aby go zrozumieć rozważmy następujący

Przykład 14. W poprzednim Przykładzie 13 mieliśmy do czynienia z kolekcją siedmiu cyfr 2,2,3,3,3,3,5 pochodzącą ze zbioru trzech cyfr $\{2, 3, 5\}$.

W tym przykładzie będziemy się zastanawiać nad tym: Ile jest możliwości stworzenia kolekcji siedmiu cyfr ze zbioru trzech cyfr $\{2, 3, 5\}$?

Możliwe do stworzenia kolekcje nie biorą pod uwagę kolejności elementów i mogą wyglądać tak:

$$2, 2, 3, 3, 3, 3, 5; \quad 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5; \quad 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5; \quad 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5.$$

Widać więc, że w tym zagadnieniu mamy wybrać siedem elementów ze zbioru trójelementowego w taki sposób, że elementy mogą się powtarzać (ale nie liczy się ich kolejność).

Niestety, wyjaśnienie liczby wszystkich dostępnych możliwości w tym schemacie jest dosyć trudne :(

Dlatego, należy **zapamiętać** rozwiązanie tego problemu podane poniżej (bo trudno je odtworzyć samodzielnie).

W tym przykładzie mamy n -elementowy zbiór cyfr, gdzie $n = 3$. Wybieramy z niego k elementów, gdzie $k = 7$ i elementy **mogą się powtarzać** (ale nie liczy się ich kolejność).

Tego typu wybory to właśnie *kombinacje z powtórzeniami* i liczba dostępnych możliwości w tej sytuacji wynosi

$$(**) \quad \binom{n+k-1}{k}.$$

[To ten niełatwy do uzasadnienia wzór podający liczbę możliwości przy kombinacjach z powtórzeniami. Ładne uzasadnienie tego wzoru można znaleźć w Wikipedii pod hasłem "kombinacja z powtórzeniami".]

To oznacza, że w tym przykładzie ($n = 3$, $k = 7$) mamy

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{3+7-1}{7} = \binom{9}{7} = \frac{9!}{7! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 8}{2} = 36$$

wszystkich możliwości.

Jak widać, wzór (**) zadziałał tu błyskawicznie. Akurat w tym zadaniu można zobaczyć, jak wygląda alternatywne rozwiązanie bez użycia wzoru (**):

Dla każdego $m = 0, 1, \dots, 7$ rozważamy sytuację, w której mamy m dwójek. W tej sytuacji musimy jeszcze dobrać $7 - m$ pozostałych cyfr. Możemy więc dobrać 0 lub 1 lub 2, ..., lub $7 - m$ trójek. To daje $8 - m$ różnych możliwości na dobranie trójek. Po dobraniu trójek, pozostałe potrzebne nam cyfry dobieramy z piątek na jedyny możliwy sposób. Widać więc, że przy m dwójkach mamy $8 - m$ różnych możliwości na dobranie pozostałych cyfr.

W sumie daje to

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = \frac{1+8}{2} \cdot 8 = 9 \cdot 4 = 36$$

wszystkich możliwości.

12. Zadania. Zadania do tego tematu są dostarczone w osobnym pliku.