



KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI



Uniwersytet
Wrocławski

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY



UNIVERSYTET WROCŁAWSKI

Matematyka na UWr - studia pełne możliwości

Wizualizacja obiektów matematycznych

Mariusz GRECH

Ziemowit RZESZOTNIK

Janusz WYSOCZAŃSKI

Wrocław 2012

Spis treści

1	Wprowadzenie	2
1.1	Uruchomienie programu	3
1.2	Podstawowe operacje	3
2	Analiza	5
2.1	Indukcja i rekurencja	5
2.2	Dwumian Newtona	6
2.3	Ciągi	8
2.4	Kresy	9
2.5	Szeregi	12
2.6	Funkcje	14
2.7	Liczby zespolone	16
2.8	Kolory	18
3	Algebra	20
3.1	Wektory w R^1 i R^2	20
3.2	Wektory, równania prostych, kąty biegunowe	20
3.3	Algorytm Euklidesa	21
3.4	Iloczyn skalarny i wyznacznik	21
3.5	Krzywe	22
3.6	Odwzorowania liniowe	22
3.7	Odwzorowania liniowe i afiniczne	24
3.8	Znajdowanie postaci kanonicznej	25
3.9	Układy równań liniowych	25
3.10	Wektory i macierze	26

1 Wprowadzenie

Niniejszy skrypt dotyczy pierwszego semestru zajęć „Pracownia graficzna wizualizacji obiektów matematycznych” w ramach projektu „Matematyka na UWr – studia pełne możliwości” realizowanego na Wydziale Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Wrocławskiego pod egidą Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Celem zajęć jest zapoznanie studentów z metodami wizualizacji podstawowych pojęć z zakresu analizy i algebry w oparciu o program *Mathematica 8* działający pod systemem operacyjnym *Linux*.

Mathematica jest programem licencjonowanym stworzonym w angielskiej wersji językowej. Jego uproszczona wersja dostępna jest w wersji darmowej jako aplikacja *on-line* na stronie: www.wolframalpha.com.

1.1 Uruchomienie programu

Program można wywołać w terminalu komendą **mathematica**, lub kliknięciem na ikonę programu. Po pojawieniu się panelu *Mathematica* należy stworzyć arkusz kalkulacyjny klikając na zakładkę **Notebook**. Żądane operacje wpisuje się w arkusz kalkulacyjny, a ich uruchomienie wywołuje się wciskając klawisze Shift+Enter lub klawisz Enter Num. (czyli klawisz Enter znajdujący się na prawym brzegu klawiatury). Arkusz można zapisać wybierając zakładkę **File**, a w niej opcję **Save As** (lub potem **Save**). Nazwa pliku musi zawierać rozszerzenie **.nb**, na przykład **plik.nb**. Aby uzyskać informacje o komendach dostępnych w programie można w panelu arkusza kalkulacyjnego wybrać zakładkę **Help**, a w niej opcję **Documentation Center**. W otwartym w ten sposób panelu pomocy znajduje się wyszukiwarka **SEARCH**, dzięki której możliwe jest uzyskiwanie informacji na dany temat w języku angielskim. Dla przykładu, jeśli interesującym nas tematem są macierze, w wyszukiwarce należy wpisać słowo **matrix**.

1.2 Podstawowe operacje

$2 + 4$ - suma

$4 - 3$ - różnica

$5 * 2$ - iloczyn

$17/23$ - iloraz

5^3 - potęga

Abs[-7] - wartość bezwzględna

Sqrt[5] - pierwiastek kwadratowy

() - nawiasy

Pi - liczba π

E - liczba e

N[Pi] - przybliżona wartość numeryczna (sześciocyfrowa)

N[Pi,10] - podaje dziesięciocyfrową przybliżoną wartość numeryczną

3.14 - liczba 3,14 (UWAGA: W kulturze zachodniej jedności oddziela się od części dziesiętnych **kropką**. Jeśli o tym zapomnisz, to program nie zadziała prawidłowo.)

% - wynik ostatniego obliczenia

Ćwiczenie 1: Oblicz: $(7 + 3) * 2$, $(30 - 12)/3$, $(2 - 4)^8$.

Ćwiczenie 2: Wykonaj działania: $2/3 + 3/4$, $77/21$, $77/17$.

UWAGA: Otrzymane wyniki powinny mieć postać: $\frac{17}{12}$, $\frac{11}{3}$, $\frac{77}{17}$. Jeśli w swych obliczeniach używasz liczb całkowitych, to *Mathematica* wykona na nich działania algebraiczne (a nie numeryczne).

Ćwiczenie 3: Wykonaj działania: $N[2/3 + 3/4]$, $N[77/21]$, $N[77/17]$.

UWAGA: Otrzymane wyniki powinny mieć postać: 1.41667, 3.66667, 4.52941. Są to przybliżenia numeryczne liczb uzyskanych w poprzednim ćwiczeniu.

Ćwiczenie 4: Wykonaj działania: $2./3 + 3/4$, $77./21$, $77./17$.

UWAGA: Otrzymane wyniki powinny być takie same jak w poprzednim ćwiczeniu. *Mathematica* interpretuje liczbę 2. jako 2.0 i dlatego powyższe działania wykonywane są numerycznie (a nie algebraicznie). Podobnie, liczba .2 interpretowana jest jako 0.2 (czyli dwie dziesiąte).

Ćwiczenie 5: Wykonaj działania $(2^{(1/2)} + 3^{(1/3)}) / (4^{(1/4)} + 5^{(1/5)})$, %, $N[\%]$.

UWAGA: Pierwszy wynik powinien mieć postać $\frac{\sqrt{2}+3^{1/3}}{\sqrt{2}+5^{1/5}}$. Komenda % powinna wywołać ostatni wynik obliczeń, czyli ponownie $\frac{\sqrt{2}+3^{1/3}}{\sqrt{2}+5^{1/5}}$. A komenda $N[\%]$ powinna dać przybliżenie numeryczne ostatniego wyniku, czyli 1.02238.

Ćwiczenie 6: Zbadaj, która liczba jest większa e^π czy π^e .

Ćwiczenie 7: Zbadaj jaka cyfra znajduje się na trzynastym miejscu “po przecinku” w rozwinięciu dziesiętnym liczby π .

UWAGA: Użycie komendy $N[\text{Pi},13]$ daje 3.141592653590, ale zero nie jest dobrą odpowiedzią. Wynika to z tego, że komenda $N[\text{Pi},13]$ podaje przybliżenie numeryczne liczby π składające się z trzynastu cyfr (włączając cyfry użyte do zapisania jedności). Użycie komendy $N[\text{Pi},14]$ daje 3.1415926535898, ale osiem ponownie nie jest dobrą odpowiedzią, wynika to z tego, że przybliżenie numeryczne jest zaokrąglane. Użycie komendy $N[\text{Pi},15]$ daje 3.14159265358979, co pozwala odkryć, że szukaną cyfrą jest siedem.

Ćwiczenie 8: Zbadaj jaka cyfra znajduje się na czterdziestym szóstym miejscu “po przecinku” w rozwinięciu dziesiętnym liczby e .

UWAGA: Użycie komendy $N[E,48]$ daje końcówkę 70, ale siedem nie musi być dobrą odpowiedzią ze względu na to, że kolejną otrzymaną cyfrą jest zero. Podobnie użycie komend $N[E,49]$ oraz $N[E,50]$ nie pozwala osiągnąć konkluzji. Dopiero użycie komendy $N[E,51]$ pozwala poznać odpowiedź.

2 Analiza

2.1 Indukcja i rekurencja

Sum[i^3, {i,7}] - suma wyrazów ciągu i^3 od i równego 1 do 7

Sum[i^3, {i,2,7}] - suma wyrazów ciągu i^3 od i równego 2 do 7

Sum[i^3, {i,2,7,3}] - suma wyrazów ciągu i^3 od i równego 2 do 7 co trzeci wyraz

Product[i^3, {i,7}] - iloczyn wyrazów ciągu i^3 od i równego 1 do 7

Product[i^3, {i,2,7}] - iloczyn wyrazów ciągu i^3 od i równego 2 do 7

Product[i^3, {i,2,7,3}] - iloczyn wyrazów ciągu i^3 od i równego 2 do 7 co trzeci wyraz

a[1]=1; a[n_]:=2*a[n-1] - sposób definiowania ciągu rekurencyjnego $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1}$

; - umieszczenie średnika na końcu linii w arkuszu kalkulacyjnym powoduje, że wynik operacji danej w tej linii nie jest wyświetlany na ekranie.

Clear[a] - oczyszcza zmienną **a** z przypisanych jej wcześniej wartości, dzięki czemu może być ona ponownie użyta jako wolna zmienna.

RSolve[{a[n] == 2*a[n-1], a[1] == 1}, a[n], n] - rozwiązuje równanie rekurencyjne

Ćwiczenie 1: Sprawdź równość

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2.$$

Ćwiczenie 2: Wyprowadź wzory na $\sum_{i=1}^n i^k$ dla kilku $k = 1, 2, 3, \dots$. To samo, gdy w sumie występują same składniki nieparzyste lub parzyste.

UWAGA: Wpisując komendę Sum[i^k, {i, n}] uzyskujemy odpowiedź HarmonicNumber[n, -k]. Jeśli jednak wyszczególnimy wartość **k**, to uzyskamy rządany wzór, np. Sum[i^2, {i, n}] daje wynik $\frac{1}{6}n(1+n)(1+2n)$.

Ćwiczenie 3: Wykonaj działanie Sum[1/(1 + Sqrt[i]), {i, n}].

Ćwiczenie 4: Sprawdź czy $\sum_{i=1}^9 \frac{1}{1 + \sqrt{i}}$ jest mniejsze od 3.

Ćwiczenie 5: Sprawdź, czy

$$1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + \dots + n \cdot 3^{n-1} \geq \frac{2n-1}{4} \cdot 3^n.$$

Ćwiczenie 6: Znajdź a_{71} , gdzie a_n zdefiniowane jest rekurencyjnie jako $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1}^2 - 3$.

Ćwiczenie 7: Powtórz poprzednie ćwiczenie z ciągiem $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1}^2 - 4$.

UWAGA: Mimo “drobnej” zmiany we wzorze rekurencyjnym generuje on na tyle duże liczby, że wykraczają one poza zdolności obliczeniowe programu *Mathematica*, co skutkuje wyrzuceniem komunikatu Overflow[].

Ćwiczenie 8 (Niebezpieczne): Powtórz poprzednie ćwiczenie z wyrazem a_{31} zamiast a_{71} .

UWAGA: Mimo, że tym razem żądamy wyznaczenia wcześniejszego wyrazu, efekt jest o wiele gorszy. *Mathematica* nie jest w stanie szybko ocenić, czy tego typu obliczenie przekracza jej możliwości i stara się procesować to zadanie. Bardzo ważne jest zauważenie, że “*Mathematica* liczy”. Program nie jest zawieszony, tylko zanurzony w gąszczu obliczeń. Świadczy o tym pogrubiona kłamra obejmująca dany blok obliczeniowy po prawej stronie arkusza kalkulacyjnego: $\parallel$. Aby przerwać te obliczenia należy wybrać w panelu arkusza kalkulacyjnego zakładkę **Evaluation**, a w niej opcję **Abort Evaluation** i... poczekać.

Ćwiczenie 9: Znajdź wzór na a_n zdefiniowane rekurencyjnie jako $a_1 = 1$, $a_n = 2a_{n-1} + 3$.

UWAGA: Użycie komendy `RSolve[{a[n] == 2*a[n-1] + 3, a[1] == 1}, a[n], n]` nie przyniesie pożądanego rezultatu. Wynika to z tego, że w poprzednim ćwiczeniu zmiennej **a** zostały już przypisane pewne wartości. Dlatego przed użyciem komendy `RSolve` należy oczyścić zmienną **a** używając komendy `Clear[a]`. Inną metodą jest zmiana oznaczeń, można np. użyć `RSolve[{c[n] == 2*c[n-1] + 3, c[1] == 1}, c[n], n]`, o ile zmienna **c** jest wolna. Podobnie musimy zadbać o to, aby zmienna **n** również była wolna (czyli nie miała przypisanych wcześniej wartości).

Po poprawnym zastosowaniu komendy `RSolve` powinien się pojawić wynik $\{\{a[n] \rightarrow -3 + 2^{1+n}\}\}$. Niestety w zależności od rozdzielczości ekranu znak “+” w wykładniku może przypominać szarą kropkę. Aby wyjaśnić tego typu wątpliwość można kliknąć na szarą kropkę i wcisnąć klawisz Enter.

Ćwiczenie 10: Znajdź wzór na a_n zdefiniowane rekurencyjnie jako $a_1 = 1$, $a_n = a_{n-1}^2 - 1$.

UWAGA: Użycie komendy `RSolve[{a[n] == a[n-1]^2 - 1, a[1] == 1}, a[n], n]` nie przyniesie pożądanego rezultatu. *Mathematica* nie jest w stanie rozwiązać tego równania rekurencyjnego. A czy Ty potrafisz to zrobić?

Ćwiczenie 11: Na farmie są dwa młode króliki z rasy która ma następujące własności.

- Króliki żyją wiecznie.
- Młode króliki nie rozmnażają się.
- Po roku młode króliki dojrzejają.
- Dojrzała para królików rozmnaża się co roku, dając jako potomstwo jedną parę młodych królików.

Znajdź wzór na ilość par królików, które będą mieszkały na tej farmie po n latach.

2.2 Dwumian Newtona

$a=x+y$ - wprowadza oznaczenie $a = x + y$

`Expand[(x+y)^3]` - komenda `Expand` rozwija zadane wyrażenie, w tym przypadku wielomian $(x + y)^3$ zostanie rozwinięty zgodnie z formułą na dwumian Newtona.

$7!$ - silnia (równoważna komenda to `Factorial[7]`)

$7!!$ - podwójna silnia

`Binomial[10,3]` - $\binom{10}{3}$.

`Table[i^3, {i,2,7}]` - tworzy tzw. listę, czyli skończony ciąg wyrażeń danego typu poczynawszy od i równego 2 do 7, w tym przypadku ciąg $\{2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3\}$

`ListPlot[lista]` - pokazuje wykres wyrazów ciągu zdefiniowanego jako **list**a

`ListPlot[lista, PlotRange -> Full]` - komenda `PlotRange -> Full` powoduje, że wykres pokazany jest w pełnym zakresie

Ćwiczenie 1: Wykonaj działanie `Expand[(x+y)^3]`.

Ćwiczenie 2: Wykonaj działania: `a=x+y`; `Expand[a^3]`.

Ćwiczenie 3: Wykonaj działania: `a=x+y`; `Clear[a]`; `Expand[a^3]`.

Ćwiczenie 4: Sprawdź, czy $\binom{10}{3} = 5!$.

Ćwiczenie 5: Sprawdź, która liczba jest większa $\binom{15}{6}$ czy $7!$.

Ćwiczenie 6: Sprawdź, która liczba jest większa $\frac{(2012!!)^2}{(2011!!)^2 \cdot (2013!!)^2}$ czy $\frac{\pi}{2}$.

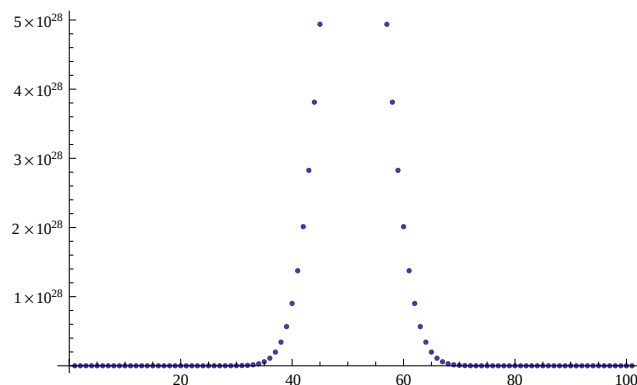
Ćwiczenie 7: Wykonaj działanie `Table[i^3, {i,2,7}]`.

Ćwiczenie 8: Wykonaj działanie `list=Table[Binomial[7,i], {i,0,7}]`. Porównaj uzyskany wynik z wynikiem operacji `Expand[(x+y)^7]`.

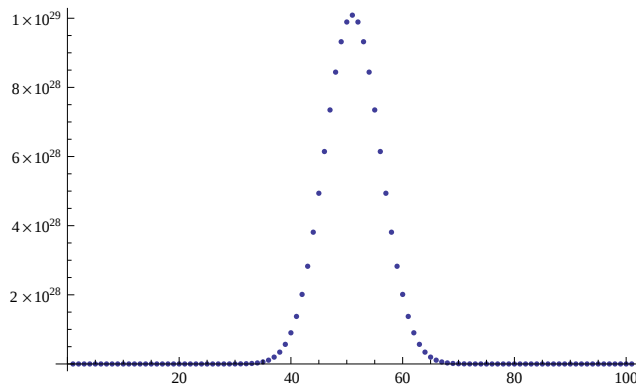
Ćwiczenie 9: Wykonaj działanie `ListPlot[lista]`.

Ćwiczenie 10: Wykonaj działania: `list=Table[Binomial[100,i], {i,0,100}]`; `ListPlot[lista]`.

UWAGA: Celem ćwiczenia jest uzyskanie wykresu rozkładu współczynników Newtona. Dlatego warto jest użyć średnika po komendzie definiującej listę. W przeciwnym wypadku przed wykresem na ekranie pojawi się długi ciąg liczb. Otrzymany wykres powinien mieć poniższą postać:



Należy zauważyć, że otrzymana grafika nie pokazuje pełnego wykresu. Aby uzyskać pełny obraz należy użyć komendy `ListPlot[lista, PlotRange -> Full]`. Wówczas otrzymany wynik powinien uzyskać postać:



2.3 Ciągi

`Less[x, y]` - komenda porównująca liczby x i y , jeśli $x < y$, to wynikiem jest komunikat **True**, jeśli $x \geq y$, to wynikiem jest komunikat **False**.

`LessEqual[x, y]` - komenda porównująca liczby x i y , jeśli $x \leq y$, to wynikiem jest komunikat **True**, jeśli $x > y$, to wynikiem jest komunikat **False**.

`Sort[{3,7,5}]` - komenda sortująca listę rosnąco według ustalonego sposobu porządkowania, w tym wypadku liczby zostaną ułożone w ciąg rosnący

`Sort[{3,7,5},Less]` - komenda sortująca listę rosnąco zgodnie z wartością numeryczną elementów listy

`Sort[{3,7,5},Greater]` - komenda sortująca listę malejąco zgodnie z wartością numeryczną elementów listy

`Do[Print[n^2], {n,9}]` - wyświetla na ekranie kolejne wyrazy danego ciągu począwszy od n równego 1 do 9

`Do[Print[n^2], {n,2,9}]` - wyświetla na ekranie kolejne wyrazy danego ciągu począwszy od n równego 2 do 9

`Do[Print[n^2], {n,2,9,3}]` - wyświetla na ekranie co trzeci wyraz danego ciągu począwszy od n równego 2 do 9

`Limit[ $\frac{1}{n}$ , n -> Infinity]` - liczy granicę ciągu

Ćwiczenie 1: Wykonaj działanie $2 < 7$.

Ćwiczenie 2: Wykonaj działanie `Less[2,7]`.

Ćwiczenie 3: Wykonaj działanie `Sort[{2,7}]`.

Ćwiczenie 4: Wykonaj działanie `Sort[{do,re,mi,fa,sol,la,si,do}]`.

UWAGA: W tym przypadku sortowanie odbywa się według kolejności alfabetycznej.

Ćwiczenie 5: Wykonaj działanie `Sort[{do,re,mi,fa,sol,la,si,do},Less]`.

UWAGA: W tym przypadku sortowanie odbywa się według wartości numerycznych. Ponieważ

nie zostały one przypisane, to wynikiem jest oryginalna lista.

Ćwiczenie 4: Wykonaj działanie $\text{Sort}[\{\text{Pi}, \text{E}, 2, 3, 1, \text{Sqrt}[2]\}]$.

UWAGA: Lista nie zostanie posortowana według wartości numerycznych. Aby uporządkować te liczby należy użyć komendy $\text{Sort}[\{\text{Pi}, \text{E}, 2, 3, 1, \text{Sqrt}[2]\}, \text{Less}]$.

Ćwiczenie 5: Spróbuj porównać liczbę $2^{1000!}$ z $999^{999!}$.

UWAGA: Użycie komendy “<” jak i użycie komendy Less lub Sort powoduje pojawienie się komunikatu **Overflow** [] świadczącego o tym, że porównywane liczby są zbyt duże.

Ćwiczenie 6: Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby 26^{99} , 10^{151} , 123^{65} .

Ćwiczenie 7: Uporządkuj w kolejności rosnącej liczby

$$(5 - \sqrt{37})^{2008}, (6 - \sqrt{37})^{2009}, (7 - \sqrt{73})^{2011}, (9 - \sqrt{79})^{2013}.$$

Ćwiczenie 8: Uporządkuj w kolejności malejącej liczby

$$(-1)^n \sqrt{n^2 + 5n + 3} + (-1)^{n+1} \sqrt{2n^2 - 2},$$

gdzie $n \in \{1, \dots, 20\}$.

Ćwiczenie 9: Zbadaj, czy ciąg $a_n = \frac{n^3 + n^2 + \sqrt{n+1}}{n^3 + n + 1}$ jest monotoniczny

Ćwiczenie 10: Dla poniższych ciągów wykonaj następujące czynności:

- Wylicz dostateczną ilość wyrazów, aby zorientować się do czego dążą.
- Narysuj ich wykres dla dostatecznie dużych n , aby utwierdzić się co do swoich przypuszczeń.
- Oblicz ich granicę, i sprawdź, czy twoje przypuszczenia były słuszne.

$$\frac{4n^2 - 5n + 6}{3n^2 - 6n + 300}$$

$$\frac{6n^2 - 5n + 600}{13n^2 - 6n + 7}$$

$$\frac{\sqrt{4n^2 - 5n + 6}}{6n + 300}$$

$$\frac{\sqrt{4n^4 - 5^3 + 6}}{3n^2 - 6n + 300}$$

$$\sqrt{n^2 + 6n - 3} - n$$

$$\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}.$$

2.4 Kresy

$\text{Maximize}[x - x^2 + 1, x]$ - znajduje maksimum danej funkcji (zmiennej x) oraz punkt, w którym jest ono osiąmane

$\text{Maximize}[x^2 - y^3, \{x, y\}]$ - znajduje maksimum danej funkcji (zmiennej x, y) oraz punkt, w którym jest ono osiąmane

$\text{Maximize}[\{x - x^2 + 1, x < 5\}, x]$ - znajduje maksimum danej funkcji pod pewnym warunkiem na zmienną x

NMaximize - komenda działająca analogicznie jak Maximize tyle, że wykonująca obliczenia numerycznie

Minimize - komenda działająca analogicznie jak Maximize służąca znajdowaniu minimum

Table[n^2+m,{m, 4},{n, 4}] - tworzy listę indeksowaną m, której elementami są listy indeksowane n, wynikiem jest więc macierz o zadanym wymiarze (tutaj cztery na cztery), elementami otrzymanej listy są wiersze macierzy

MatrixForm[Table[n^2+m,{m, 4},{n, 4}]] - przedstawia listę w formie macierzy (równoważna komenda to Table[n^2+m,{m, 4},{n, 4}]/MatrixForm)

Flatten[Table[n^2+m,{m, 4},{n, 4}]] - tworzy listę, której elementami są wyrazy macierzy

Ćwiczenie 1: Znajdź kresy zbioru $\{x \in \mathbb{R} : x^2 < 2\}$ i zbadaj czy należą one do zbioru.

UWAGA: Użycie komendy Maximize[{x, x^2 < 2}, x] jest poprawne, mimo iż generuje ostrzeżenie. Treść ostrzeżenia świadczy o tym, że kres nie należy do zbioru.

Ćwiczenie 2: Znajdź kresy zbioru $\{xy : x, y \in \mathbb{R} \wedge x^2 + y^4 \leq 2\}$ i zbadaj czy należą one do zbioru.

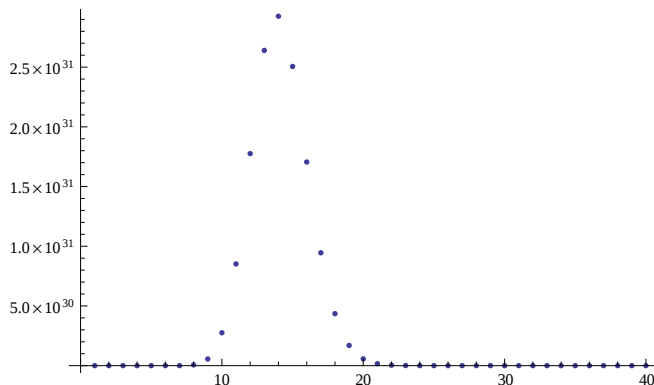
UWAGA: Użycie komendy Maximize[{xy, x^2+y^4 <= 2}, {x,y}] jest błędne. O ile *Mathematica* interpretuje “2y” jako “dwa razy y”, to “xy” nie jest interpretowane jako “x razy y”, lecz jako nowa zmienna o nazwie “xy” (podobnie “y2” jest również interpretowane jako nowa zmienna - warto zwrócić uwagę na kolory, których *Mathematica* używa do wyświetlania różnych znaków). Użycie poprawnej składni w tej komendzie, czyli Maximize[{x*y, x^2+y^4 <= 2}, {x,y}] daje wynik algebraiczny zakodowany komendą **Root**, która jest wyjaśniona w panelu pomocy (np. Root[-32 + 27 #1^4 &, 1] oznacza pierwszy pierwiastek zespolony równania $-32 + 27x^4 = 0$). Dlatego, w celu uzyskania odpowiedzi numerycznej należy użyć komendy NMaximize, lub N[%].

Ćwiczenie 3: Znajdź kresy zbioru $\{\frac{37^n}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$ i zbadaj czy należą one do zbioru.

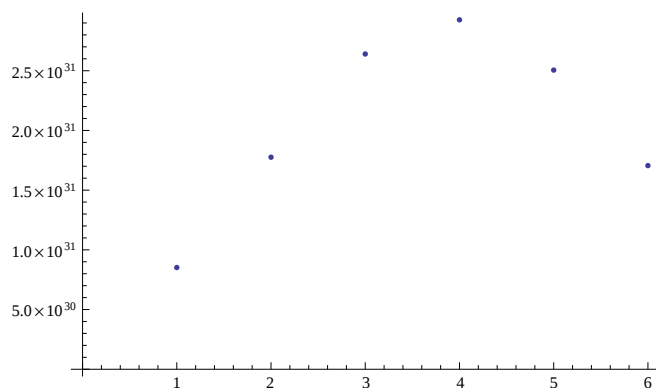
UWAGA: *Mathematica* prawdopodobnie nie posiada specjalnej komendy wyznaczonej do tego typu zadania. Ze względu na to, że problem jest dyskretny, można użyć komendy ListPlot do zbadania elementów powyższego zbioru.

Ćwiczenie 4: Znajdź kresy zbioru $\{\frac{37^n + n^{37}}{n!} : n \in \mathbb{N}\}$ i zbadaj czy należą one do zbioru.

UWAGA: Użycie komendy ListPlot[Table[(37^n + n^37)/n!, {n, 40}]] daje wynik



co nie pozwala na odczytanie n , w którym przyjmowana jest wartość maksymalna. Próba zawężenia zakresu n i użycie komendy `ListPlot[Table[(37^n + n^37)/n!, {n, 11, 16}]]` daje wynik, w którym liczby na osi n są przesunięte. W istocie, to co na osi n oznaczane jest jedynką odpowiada pierwszej wskazanej przez nas wartości dla n w komendzie tworzącej listę, czyli jedenastce. Szóstka zaś odpowiada końcowej wartości n , którą zadaliśmy w liście, czyli szesnastce. Dzięki temu możemy poprawnie zinterpretować poniższy wynik:



Możemy też upewnić się, że maksimum osiągane jest dla $n = 14$ stosując komendę `N[Table[(37^n + n^37)/n!, {n, 11, 16}]]`, która powinna dać wynik $\{8.51871 \times 10^{30}, 1.7757 \times 10^{31}, 2.64012 \times 10^{31}, 2.92637 \times 10^{31}, 2.5054 \times 10^{31}, 1.70537 \times 10^{31}\}$.

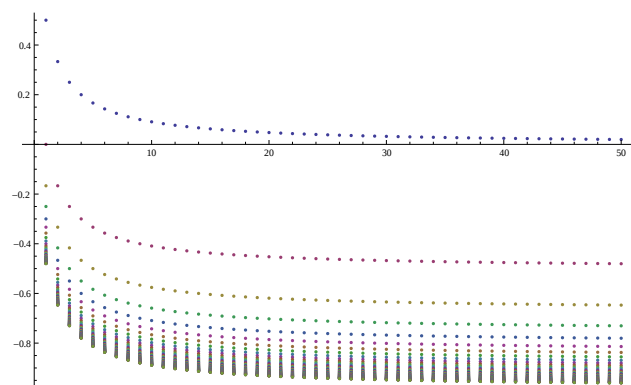
Ćwiczenie 5: Wykonaj działanie `lista=Table[1/m - n/(n+1), {m, 4},{n, 4}]`

Ćwiczenie 6: Wykonaj działania: `MatrixForm[lista]` oraz `lista//MatrixForm`

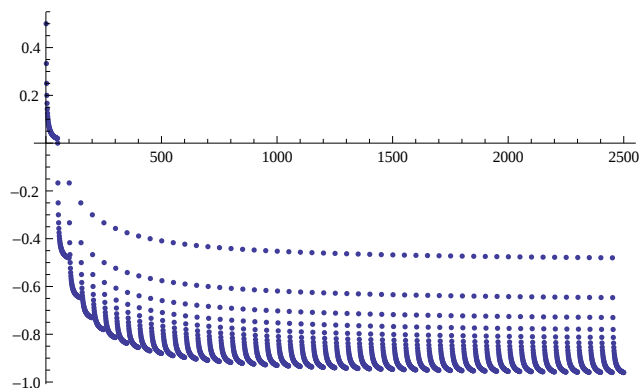
Ćwiczenie 7: Wykonaj działanie `Flatten[lista]`

Ćwiczenie 8: Znajdź kresy zbioru $\{\frac{1}{m} - \frac{n}{n+1} : m, n \in \mathbb{N}\}$.

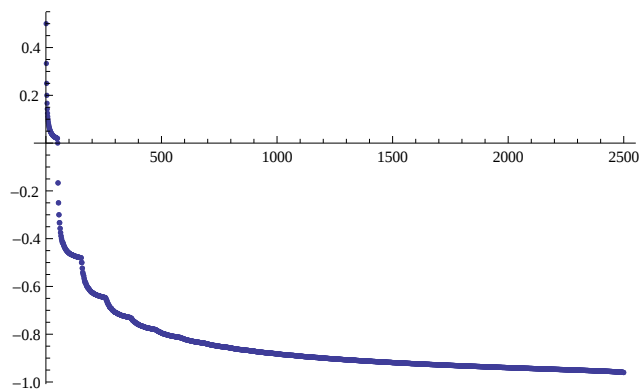
UWAGA: Użycie komendy `ListPlot[Table[1/m - n/(n+1), {m, 50},{n, 50}],PlotRange-> Full]` daje wykres



na którym przedstawiono kolejne wiersze macierzy zdefiniowanej komendą `Table`. Po użyciu komendy `ListPlot[Flatten[Table[1/m - n/(n+1), {m, 50},{n, 50}],PlotRange-> Full]` otrzymujemy wynik



który można posortować malejąco komendą `ListPlot[Sort[Flatten[Table[1/m - n/(n+1), {m, 50}, {n, 50}]], Greater], PlotRange -> Full]` uzyskując



Ćwiczenie 9: Znajdź kresy zbioru $\left\{ \frac{mn^2 + 3}{m^3 + 3n^3} : m, n \in \mathbb{N}, m < n \right\}$.

UWAGA: Aby ująć warunek $m < n$ możesz użyć komendy `Table[(m*n^2 + 3)/(m^3 + 3n^3), {n, 10}, {m, n - 1}]`, gdzie ostatni element, czyli $\{m, n - 1\}$ oznacza, że m zmienia się od 1 do $n-1$.

Ćwiczenie 10: Wykonaj działanie `ListPlot3D[Table[2*m*n/(m^2 + n^2), {n, 10}, {m, 10}]]`.

UWAGA: Powyższa komenda przedstawia wykres powierzchni łączącej punkty dane jako $(n, m, \frac{2mn}{m^2+n^2})$, co pozwala na wizualizację ciągu $\frac{2mn}{m^2+n^2}$.

2.5 Szeregi

`Sum[1/n^2, {n, Infinity}]` - suma szeregu od n równego 1 do nieskończoności

`Sum[1/n^2, {n, 3, Infinity}]` - suma szeregu od n równego 3 do nieskończoności

`NSum` - sumowanie numeryczne

`SumConvergence[1/n^2, n]` - bada zbieżność danego szeregu

Ćwiczenie 1: Wykonaj działanie $\text{Sum}[1/n^2, \{n, \text{Infinity}\}]$

Ćwiczenie 2: Wykonaj działanie $\text{Sum}[1/n^z, \{n, \text{Infinity}\}]$

UWAGA: Wynikiem jest $\text{Zeta}[z]$, czyli funkcja zeta Riemanna zdefiniowana jako $\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. W szczególności, *Mathematica* jest w stanie podać przybliżenie numeryczne sumy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ dla wszystkich $z > 1$. Ponadto suma ta wyraża się prostym wzorem dla $z = 2k$, gdzie $k \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 3: Wykonaj działania $\text{Sum}[1/n^3, \{n, \text{Infinity}\}]$ oraz $\text{Sum}[1/n^4, \{n, \text{Infinity}\}]$

Ćwiczenie 4: Wykonaj działanie $\text{Sum}[1/(n^2-x), \{n, \text{Infinity}\}]$

UWAGA: Funkcja $\text{Cot}[]$ pojawiająca się w wyniku to cotangens. Ponadto *Mathematica* zakłada, że x jest nieujemne.

Ćwiczenie 5: Wykonaj działanie $\text{Sum}[1/(n^2+x), \{n, \text{Infinity}\}]$

UWAGA: Funkcja $\text{Coth}[]$ pojawiająca się w wyniku to cotangens hiperboliczny. *Mathematica* ponownie zakłada, że x jest nieujemne.

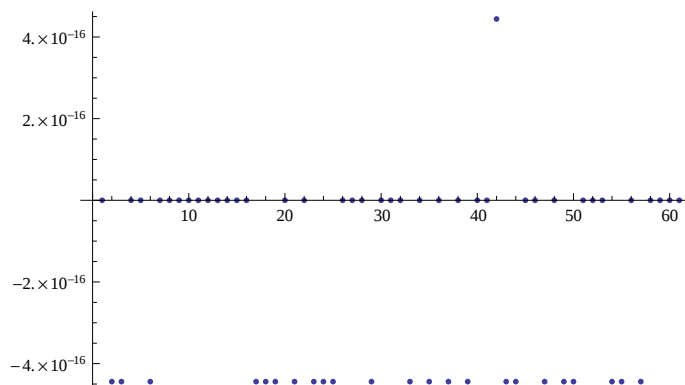
Ćwiczenie 6: Wykonaj działanie $\text{Sum}[1/(n^2 + n^{(1/2)}), \{n, \text{Infinity}\}]$

UWAGA: *Mathematica* nie potrafi wysumować tego szeregu. Jednakże użycie komendy numerycznej $\text{NSum}[1/(n^2 + n^{(1/2)}), \{n, \text{Infinity}\}]$ nie sprawia jej żadnych trudności. Podobnie jak zbadanie zbieżności tego szeregu komendą $\text{SumConvergence}[1/(n^2 + n^{(1/2)}), n]$.

Ćwiczenie 7: Wykonaj działanie $\text{Sum}[1/n!, \{n, 0, \text{Infinity}\}]$

Ćwiczenie 8: Zbadaj który ciąg szybciej przybliży liczbę e : ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ czy ciąg sum częściowych $s_n = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!}$.

UWAGA: Użycie komendy $\text{ListPlot}[\text{Table}[E - \text{Sum}[1/m!, \{m, 0, n\}], \{n, 20, 80\}]]$ generuje wynik



który jest błędny (ze względu na to, że każda suma częściowa jest mniejsza od e), co świadczy o słabej precyzji programu *Mathematica* w tym zadaniu.

Ćwiczenie 9: Znajdź szereg, który rozłoży *Mathematicę* na łopatki.

UWAGA: Szukamy szeregu, którego *Mathematica* nie będzie w stanie obliczyć. Możemy zacząć od $\text{Sum}[1/n, \{n, \text{Infinity}\}]$, co daje komunikat, że szereg ten nie jest zbieżny. Próby typu $\text{Sum}[1/n^{1.00001}, \{n, \text{Infinity}\}]$ kończą się szybkim sukcesem przy wykładniku 1.00 000

000 000 001. *Mathematica* traktuje taki szereg jak $\sum \frac{1}{n}$ i twierdzi, że jest rozbieżny. Kłopoty zgłaszane są również, gdy dla tego szeregu zamiast komendy Sum użyjemy komendy NSum.

Ciekawe wyniki można również uzyskać próbując NSum[1/(n^0.999999+1),{n,Infinity}]. *Mathematica* bez problemu zgłasza błędny wynik 8.61528. Co więcej, użycie komendy SumConvergence[1/(n^0.999999+1), n] potwierdza jej przekonanie, że szereg jest zbieżny.

Inna klasa przykładów, to szeregi “oscylujące” takie jak $\sum \frac{\sin(n)}{n}$. Dla tego szeregu komendy Sum, NSum i SumConvergence działają bez zarzutu. Szereg $\sum \frac{\sin(n)}{\sqrt{n}}$ jest jednak bardziej problematyczny. O ile komenda Sum wylicza taką sumę przy pomocy funkcji specjalnych, to NSum oraz SumConvergence nie działają już tak gładko. Prawdziwa katastrofa następuje jednak przy szeregu $\sum \frac{|\sin(n)|}{n^2}$, komenda Sum nie działa, a po mozolnych obliczeniach NSum i SumConvergence nie przynoszą pożądaných konkluzji. A Ty wiesz czy ten ostatni szereg jest zbieżny?

.... postaraj się znaleźć inne przykłady :)

2.6 Funkcje

E^x - funkcja e^x

Log[x] - logarytm naturalny

Log[2,x] - logarytm o podstawie 2

Sin[x] - sinus

Cos[x] - cosinus

Tan[x] - tangens

Cot[x] - cotangens

ArcTan[x] - arcus tangens

f[x_]=x^2+Sin[x] - sposób definiowania funkcji

Plot[x^2+Sin[x], {x,-3,7}] - rysuje wykres danej funkcji na zadanym przedziale

Plot[{x^2, Sin[x]}, {x,-3,7}] - rysuje wykresy dwóch funkcji na zadanym przedziale

Animate[Plot[x*Sin[1/x], {x, -a, a}], {a, 1, 2}] - stwarza animację otrzymanego wykresu odpowiadającą zmianie parametru **a** w danym zakresie

Manipulate[Plot[x^a, {x, -1, 1}], {a, 0, 10}] - stwarza możliwość manipulacji otrzymanego wykresu odpowiadającą zmianie parametru **a** w danym zakresie

Limit[1/x, x->Infinity] - oblicza granicę w nieskończoności

Limit[1/x, x->-Infinity] - oblicza granicę w minus nieskończoności

Limit[1/x, x->0] - oblicza prawostronną granicę w zerze (równoważna komenda to Limit[1/x, x->0, Direction->1])

Limit[1/x, x->0, Direction->-1] - oblicza lewostronną granicę w zerze

Ćwiczenie 1: Wykonaj działania `Plot[E^x+Sin[x],{x,-10,5}]` oraz `Plot[E^x+Sin[x],{x,-10,10}]`

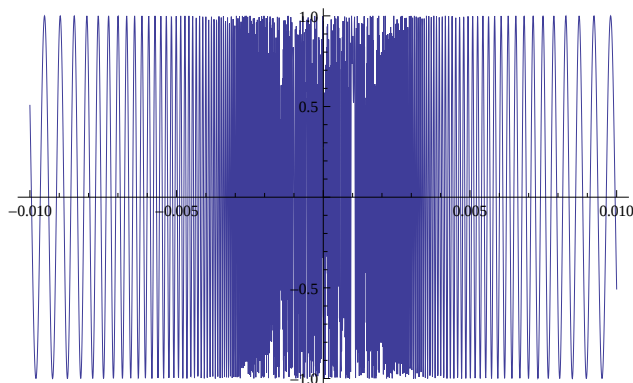
Ćwiczenie 2: Wykonaj działania `f=x^2`; `Plot[f,{x,-2,2}]`

Ćwiczenie 3: Wykonaj działania `Clear[f]`; `f[x_]=x^2`; `Plot[f[t],{t,-2,2}]`

UWAGA: Komenda `Clear[f]` jest potrzebna aby usunąć informację, że $f=x^2$, która została zakodowana w poprzednim ćwiczeniu. Możesz sprawdzić co się stanie, jeśli nie użyjesz komendy `Clear[f]`.

Ćwiczenie 4: Zobacz wykres funkcji $\sin \frac{1}{x}$ na przedziałach $[-1, 1]$, $[-0.01, 0.01]$, $[-0.001, 0.001]$ oraz $[0.000001, 0.0001]$.

UWAGA: Warto zauważyć, że standard z użyciem kropki do zapisu liczb dziesiętnych jest lepszy niż nasze krajowe podejście z przecinkiem, przedział $[-0.01, 0.01]$ wygląda o wiele lepiej niż $[-0,01, 0,01]$ (szczególnie, jeśli ktoś zapomni o spacji: $[-0,01,0,01]$). W tym przedziale *Mathematica* generuje wykres



Jak myślisz, czy jest on poprawny?

Ćwiczenie 5: Wykonaj działanie `Animate[Plot[x*Sin[1/x], {x, -a, a}], {a, 0.1, 10^(-6)}]`

Ćwiczenie 6: Wykonaj działanie `Manipulate[Plot[x*Sin[1/x], {x, -a, a}], {a, 0.1, 10^(-6)}]`

UWAGA: Po przeciągnięciu suwaka odczekaj chwilę, aż *Mathematica* doprecyzuje wykres. Ponadto w prawym górnym rogu pod znakiem “+” postaraj się odnaleźć opcję `Autorun`.

Ćwiczenie 7: Wykonaj działanie `Animate[Plot[x^a, {x, -1, 1}, PlotRange -> All], {a, 2, 100, 2}]`

UWAGA: W zakresie parametru, czyli w $\{a, 2, 100, 2\}$ ostatnia liczba wskazuje, że parametr nie zmienia się w sposób ciągły, tylko przyrasta o dwa dając $a = 2, 4, 6, \dots, 100$.

Ćwiczenie 8: Stwórz analogiczną animację jak w poprzednim ćwiczeniu dla nieparzystych wykładników a .

Ćwiczenie 9: Dla $n=2,3,4$ pokaż punkty przecięcia funkcji x^n oraz n^x na jednym wykresie.

Ćwiczenie 10: Sprawdź czy uda Ci się pokazać punkty przecięcia funkcji x^2 oraz 1.01^x na jednym wykresie.

Ćwiczenie 11: Wykonaj działanie `Animate[Plot[{x^2, 1.001^x}, {x, 0, a}, Ticks -> None], {a, 14000, 40000}]`

UWAGA: Komenda **Ticks** -> **None** usuwa znaczniki z osi liczbowych. Spróbuj zwolnić animację przyciskiem Slower. Czy potrafisz wyjaśnić tajemnicę dziwnych drgań występujących w animacji?

2.7 Liczby zespolone

$x+I*y$ - liczba zespolona $x + iy$

$\text{Re}[z]$ - część rzeczywista liczby z

$\text{Im}[z]$ - część urojona liczby z

$\text{Abs}[z]$ - moduł liczby z

$\text{Conjugate}[z]$ - sprzężenie liczby z

Ćwiczenie 1: Rozwiąż równanie $\bar{z} = z^2$

Ćwiczenie 2: Rozwiąż równanie $\bar{z} = z^{-1}$

Ćwiczenie 3: Rozwiąż równanie $3 + 4i = z^2$

Ćwiczenie 4: Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} z^2 = w \\ w^2 = z \end{cases}$$

Ćwiczenie 5: Zaznacz na płaszczyźnie (zespolonej) zbiór rozwiązań nierówności

$$\text{Re}(z) + \text{Re}(z^2) \geq 0$$

Ćwiczenie 6: Zaznacz na płaszczyźnie (zespolonej) zbiór rozwiązań nierówności

$$\text{Re}(z) + \text{Re}(z^n) \geq 0$$

dla wybranych przez Ciebie parametrów $n \in \mathbb{N}$.

Ćwiczenie 7: Zaznacz na płaszczyźnie (zespolonej) zbiór rozwiązań nierówności

$$3|z| \leq |z^2| + 1$$

Ćwiczenie 8: Zaznacz na płaszczyźnie (zespolonej) zbiór rozwiązań równania

$$|z| = |\bar{z} + 1|$$

Ćwiczenie 9: Zaznacz na płaszczyźnie (zespolonej) zbiór rozwiązań równania

$$\text{Im}\left(\frac{z}{z^2 + 1}\right) = 0$$

Ćwiczenie 10: Zaznacz na płaszczyźnie (zespolonej) zbiór rozwiązań nierówności

$$|z + i| \leq |z - i|$$

ROZWIĄZANIA:

Ćw 1: `Solve[Conjugate[z] == z^2, z]`

Ćw 2: Wypróbuj

`Solve[Conjugate[z] == 1/z, z]`

`ContourPlot[Conjugate[x + I*y] == 1/(x + I*y), {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

`ContourPlot[Conjugate[x + I*y] == (x + I*y)^{-1}, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

`ContourPlot[(x + I*y)*Conjugate[x + I*y] == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

`ContourPlot[Abs[x + I*y] == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

`ContourPlot[Abs[x + Iy] == 1, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

Ćw 3: Wypróbuj

`Solve[3+4*I==z^2, z]`

`Solve[3+4I==z^2, z]`

Ćw 4: Wypróbuj

`Solve[z^2 == w && w^2 == z, {z, w}]`

`NSolve[z^2 == w && w^2 == z, {z, w}]`

Ćw 5: `RegionPlot[Re[x + I*y] + Re[(x + I*y)^2] >= 0, {x, -100, 100}, {y, -100, 100}]`

Ćw 6: Wypróbuj mini-program

`n = 100;`

`m = 100;`

`RegionPlot[Re[x + I*y] + Re[(x + I*y)^n] >= 0, {x, -m, m}, {y, -m, m}]`

i pozmieniam wartości n,m wedle swego uznania (np. ustal m i użyj Manipulate lub Animate do zmiany wartości n)

Ćw 7: Wypróbuj

`m = 5;`

`RegionPlot[3*Abs[x + I*y] <= Abs[(x + I*y)^2] + 1, {x, -m, m}, {y, -m, m}]`

a potem zmień m=5 na m=6.

Ćw 8: Wypróbuj

`ContourPlot[Abs[x + I*y] == Abs[Conjugate[x + I*y] + 1], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

`ContourPlot[Abs[x + I*y] == Abs[x - I*y + 1], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

`ContourPlot[Abs[x + I*y] == Abs[x + I*y + 1], {x, -2, 2}, {y, -2, 2}]`

Ćw 9: Wypróbuj

`m = 1;`

`ContourPlot[ Im[(x + I*y)/((x + I*y)^2 + 1)] == 0, {x, -m, m}, {y, -m, m}]`

a potem zmień `m=1` na `m=1.1`, `m=1.2` oraz `m=1.3`.

Sprawdź też jak działa mini-program:

`Clear[m];`

`For[m = 0, m <= 10, m++, Print[ContourPlot[ Im[(x + I*y)/((x + I*y)^2 + 1)] == 0, {x, -1 - m/10, 1 + m/10}, {y, -1 - m/10, 1 + m/10}]]]`

Ćw 10: Wypróbuj

`RegionPlot[Abs[x + I*y + I] <= Abs[x + I*y - I], {x, -100, 100}, {y, -100, 100}]`

i w końcu przygotuj się na Euro 2012:

`RegionPlot[Abs[x + I*y + I] <= Abs[x + I*y - I], {x, -100, 100}, {y, -100, 100}, PlotStyle -> Red]`

2.8 Kolory

`RegionPlot[{(x - 2)^2 + y^2 <= 1, (x + 2)^2 + y^2 <= 1}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotStyle -> {Magenta, Cyan}]` - zaznacza na płaszczyźnie dwa regiony określone nierównościami w danym zakresie zmiennych `x` i `y` oraz barwi każdy z regionów na wskazany kolor

Red, Blue, Green - trzy podstawowe kolory

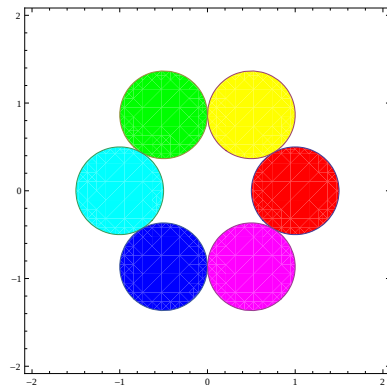
Cyan, Magenta, Yellow - trzy kolory dopełniające

`Hue[t]` - kolor odpowiadający parametrowi `t`, który zmienia się między 0 i 1

`ParametricPlot[{u, Sin[u]}, {u, 0, 1}]` - zaznacza na płaszczyźnie daną krzywą

Ćwiczenie 1: Wykonaj działanie `RegionPlot[{(x - 2)^2 + y^2 <= 1, (x + 2)^2 + y^2 <= 1}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}, PlotStyle -> {Red, Cyan}]`. A potem trochę nałóż na siebie uzyskane kółka, żeby sprawdzić, czy kolory się mieszają.

Ćwiczenie 2: Uzyskaj obrazek:



Ćwiczenie 3: Wykonaj działanie

```
Animate[RegionPlot[x^2 + y^2 <= 1, {x, -1, 1}, {y, -1, 1}, PlotStyle -> {Hue[t]}], {t, 0, 1}]
```

Ćwiczenie 4: Wykonaj działania

```
om = E^(Pi*I/6);
```

```
list = Table[(x - Re[om^t])^2 + (y - Im[om^t])^2 <= 1/4, {t, 1, 12, 2}];
```

```
RegionPlot[list, {x, -2, 2}, {y, -2, 2}, PlotStyle -> {Hue[1/12], Hue[3/12], Hue[5/12], Hue[7/12],  
Hue[9/12], Hue[11/12]}]
```

Ćwiczenie 5: Wykonaj działanie

```
ParametricPlot[{Cos[2*Pi*u], Sin[2*Pi*u]}, {u, 0, 1}, ColorFunction -> (Hue[#3] &)]
```

Ćwiczenie 6: Wykonaj działanie

```
PieChart[Table[Style[1, Hue[h, 1, 1]], {h, -.5, .5, .01}], ChartStyle -> EdgeForm[None]]
```

Ćwiczenie 7: Wykonaj działania

```
n = 0;
```

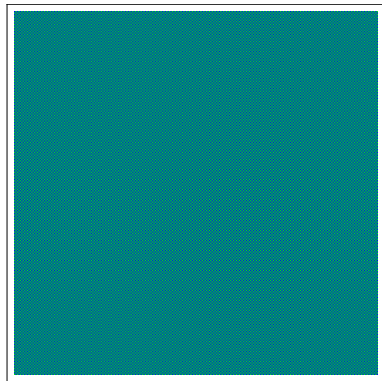
```
list = {{1, 1}, {1, 1}};
```

```
Lista = {{1, 0}, {0, 1}};
```

```
For[i = 0, i < n, i++, Lista = KroneckerProduct[list, Lista]];
```

```
ArrayPlot[Lista, ColorRules -> {1 -> Blue, 0 -> Green}]
```

a potem zmień n tak aby uzyskać spektakularną mieszaninę niebieskiego i zielonego:



Wypróbuj inne kolory zamiast Blue i Green (ale nie bierz $n \geq 12$, bo zawieszysz system :)

3 Algebra

3.1 Wektory w R^1 i R^2

Abs[-6] - wartość bezwzględna,

{1,3} - wektor,

{2,4}*{3,5} - daje {2*3,4*5},

Total[{5,6}] - suma liczb.

Ćwiczenie 1: Oblicz odległości między liczbami 5 i -6.

Ćwiczenie 2: Dany jest punkt $A(-196, 206)$. Znajdź współrzędne punktu B leżącego na osi Ox jeżeli wiadomo, że odcinek AB tworzy z osią Ox kąt 135° .

Ćwiczenie 3: Znajdź na osi Ox punkt równo oddalony od punktów $(231, 242)$ i $(142, 933)$.

Ćwiczenie 4: Znaleźć punkt równo oddalony od obu osi współrzędnych i od punktu $(-13, 74)$.

Ćwiczenie 5: Wykaż, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu M od wierzchołków danego prostokąta różni się od poczwórnego kwadratu odległości punktu M od środka prostokąta o stałą wartość liczbową, niezależną od położenia punktu M .

Ćwiczenie 6 Uzasadnij, że dowolny kąt wpisany w okrąg i oparty na jego średnicy jest kątem prostym.

3.2 Wektory, równania prostych, kąty biegunowe

Solve[{2x+3y==4, 4x+6y==9},{x,y}] - rozwiązuje układ równań.

Eliminate[{2x+3y==4, 4x+6y==9},x] - eliminuje zmienną z układu równań.

Ćwiczenie 1: Zamień równanie parametryczne prostej $x = 2 + 3t, y = 5 + 7t$ na równanie ogólne.

Ćwiczenie 2: Znajdź kąty biegunowe wektorów $[2, 2]$, $[1, -1]$, $[-3, 3]$, $[0, -4]$, $[2, 0]$, $[\sqrt{3}, 1]$, $[-1, \sqrt{3}]$.

Ćwiczenie 3: Rozłóż wektor $[3, 7]$ na kombinację liniową wektorów $[26, 35]$ i $[74, 32]$. To samo dla $[39, 42]$, $[65, 70]$.

Ćwiczenie 4: Dla jakich x wektory (a) $[x, 1]$ i $[4, 2]$; (b) $[x, x^2]$ i $[-3, 9]$; (c) $[x, 1]$ i $[9, x]$; (d) $[x, x^2]$ i $[1, x]$; są liniowo zależne?

Ćwiczenie 5: Uzasadnij, że środkowe (w trójkącie) przecinają się w jednym punkcie i dzielą się w proporcji 1 : 2.

Ćwiczenie 6: Uzasadnij, że symetralne i dwusieczne przecinają się w jednym punkcie.

Ćwiczenie 7: Uzasadnij, że środki boków dowolnego czworokąta tworzą równoległobok.

Ćwiczenie 8: Dane są współrzędne punktów P, Q, R będących środkami boków trójkąta ABC . Znajdź współrzędne punktów A, B, C .

Ćwiczenie 9: Uzasadnij, że w trapezie o podstawach a i b przekątne przecinają się w stosunku $a : b$.

3.3 Algorytm Euklidesa

Quotient[17,3] - dzieli całkowicie (wynik całkowity)

Mod[17,3] - daje resztę z dzielenia

$n = 1$; While[$n < 6$, Print[n]; $n++$] - pętla

If [$2==2$, Print["Prawda"], Print["Nieprawda"]]

Ćwiczenie 1: Używając powyższych funkcji, napisz funkcję dwóch zmiennych, która działa jak algorytm Euklidesa.

Ćwiczenie 2: Znajdź GCD[12,16,18]

3.4 Iloczyn skalarny i wyznacznik

$u.v$ - iloczyn skalarny wektorów o współczynnikach rzeczywistych

Det[A] - wyznacznik macierzy A

Ćwiczenie 1: Zdefiniuj iloczyn skalarny i wyznacznik.

Ćwiczenie 2: Sprawdź, czy trójkąt o wierzchołkach $A(5, -4)$, $B(3, 2)$ i $C(2, -5)$ jest prostokątny.

Ćwiczenie 3: Punkty $A(0, 0)$ i $B(-3, 5)$ są wierzchołkami trójkąta, którego trzeci wierzchołek leży na osi Ox . Znajdź ten trzeci wierzchołek wiedząc, że środkowe poprowadzone z punktów A i B są wzajemnie prostopadłe.

Ćwiczenie 4: Rozstrzygnij czy punkty (a) $A(1, -1)$, $B(3, 3)$, $C(13, 23)$; (b) $A(1, -1)$, $B(3, 3)$, $C(23, 33)$; są współliniowe.

Ćwiczenie 5: Oblicz odległość punktu $(2, 3)$ od prostej przechodzącej przez punkty $(-2, 0)$ i $(1, -3)$.

Ćwiczenie 6: Dane są punkty $A(-2, -3)$, $B(3, 2)$, $M(2, 0)$, $N(5, 0)$. Rozstrzygnij czy punkty M i N leżą po tej samej stronie prostej AB czy po przeciwnych stronach.

3.5 Krzywe

`ContourPlot[{x^3==y^2, 2x-3==y^2+x*y}, {x, -10, 10}, {y, -10, 10}]` - rysuje zbiór rozwiązań równania w podanym zakresie.

Ćwiczenie 1: Rozpoznaj następujące krzywe, następnie narysuj ich wykresy i sprawdź poprawność swoich przypuszczeń (a) $x - y + 5 = 0$; (b) $x^2 + 2x + y^2 = 0$; (c) $x + y^2 + 5 = 0$; (d) $x^2 + 4y^2 - 6x = 0$; (e) $2x + 3y + 5 = 0$; (f) $2x^2 + 3y + 2y^2 = 0$; (g) $2x - 3y^2 + 6y = 0$; (h) $xy - x - 1 = 0$.

Ćwiczenie 2: Znajdź punkty przecięcia następujących par krzywych. Narysuj ich wykresy i sprawdź poprawność swoich obliczeń:

(a) $x^2 + y^2 = 25$, $x^2 - 10x + y^2 - 10y + 45 = 0$; (b) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 4$, $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$; (c) $x^2 - 12x + 3y^2 + 3y = 140$, $2x - 3 = 5y^2$; (d) $x^2 - 12x + 3y^2 + 3y = 140$, $xy = 5$; (e) $2x - 3 = 5y^2$, $xy = 4$.

Ćwiczenie 3: Znajdź równania prostych zawierających wysokości w trójkącie o wierzchołkach $A(2, 1)$, $B(-1, 3)$, $C(-2, -1)$. Sprawdź, że przecinają się one w jednym punkcie. Zadanie rozwiąż również graficznie.

Ćwiczenie 4: W trójkącie ABC dane są wierzchołki $A(-4, 3)$, $B(4, -1)$ oraz punkt $M(3, 3)$ przecięcia się wysokości trójkąta. Oblicz współrzędne wierzchołka C . Narysuj wykresy.

3.6 Odwzorowania liniowe

- $\{a, b\}$ - wektor $[a, b]$
- $f[\{a, b\}]$ - działanie odwzorowania f na wektorze $[a, b]$
- **Subscript** $[a, j]$ - indeks dolny (pojedynczy) a_j
- **Subscript** $[a, j, k]$ - indeks dolny (podwójny) $a_{j,k}$

- **TranslationTransform[a, b]** - translacja o wektor $v = [a, b]$
- **AffineTransform[m]** - transformacja afiniczna liniowa postaci $u \mapsto mu$ (m—macierz)
- **AffineTransform[m,v]** - transformacja afiniczna postaci $u \mapsto mu + v$ (m—macierz, v—wektor)
- **AffineTransform[{{a1,1, a1,2}, {a2,1, a2,2}}, {b1, b2}]** - transformacja afiniczna we współrzędnych
- **RotationTransform[Pi/3]** - obrót o kąt $\frac{\pi}{3}$
- **RotationTransform[30Degree]** - obrót o kąt 30 stopni
- **ContourPlot[g[x,y]==0,{x,a,b},{y,c,d}]** - rysuje krzywą będącą rozwiązaniem równania $g(x,y) = 0$, dla $a \leq x \leq b$ i $c \leq y \leq d$.
- **ContourPlot[g[x,y],{x,a,b},{y,c,d}]** - rysuje poziomice funkcji $g(x,y)$, dla $a \leq x \leq b$ i $c \leq y \leq d$.

Ćwiczenie 1. Napisać odwzorowanie przesunięcia na płaszczyźnie o wektor $v = [-2, 3]$ i sprawdzić jakie będą obrazy i przeciwobrazy kilku wybranych wektorów. Podobnie dla $v = [3, -1]$.

Ćwiczenie 2. Napisać wzorem odwzorowanie afiniczne (liniowe), działające jako macierz $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ i znaleźć obrazy kilku wybranych wektorów.

Ćwiczenie 3. Napisać wzorem odwzorowanie afiniczne $u \mapsto mu + v$, działające poprzez macierz $m = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ oraz przesunięcie o wektor $v = [-2, 1]$, i znaleźć obrazy kilku wybranych wektorów.

Ćwiczenie 4. Napisać wzorem odwzorowanie polegające na obrocie na płaszczyźnie o kąt $\frac{\pi}{3}$ i wyznaczyć obrazy kilku wybranych wektorów. Sprawdzić, w którą stronę obracany jest dany wektor.

Ćwiczenie 5. Narysować krzywą będącą rozwiązaniem równania $x^2 + 3xy + y^2 - 2 = 0$, a następnie jej przesunięcia o kilka wybranych wektorów.

Ćwiczenie 6. Wykonać przekształcenie polegające na obrocie o 60 stopni krzywej otrzymanej w Ćwiczeniu 5.

3.7 Odwzorowania liniowe i afiniczne

- **ScalingMatrix** $[a, b, c]$ - transformacja liniowa postaci $u = (u_1, u_2, u_3) \mapsto (au_1, bu_2, cu_3)$
- **ScalingMatrix** $[s]$ - mnożenie każdej współrzędnej przez liczbę s
- **Transpose** $\{\{a, b\}, \{c, d\}\}$ - transponuje macierz: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Transpose}} \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$
- **AffineTransform** $[m]$ - transformacja afiniczna liniowa postaci $u \mapsto mu$ (m -macierz)
- **AffineTransform** $[m, v]$ - transformacja afiniczna postaci $u \mapsto mu + v$
(m -macierz (część liniowa), v -wektor (część translacyjna))
- **Inverse** $[m]$ - odwraca macierz m .
- **Projection** $[u, v]$ - rzut wektora u w kierunku wektora v

Ćwiczenie 1. Skonstruować jednokładność J_S^k o środku $S = (1, 3)$ i skali $k = 3$. Wyznaczyć obrazy wektorów $u = [2, -5]$, $u' = [-1, -2]$ oraz $u'' = [-3, 4]$.

Wskazówka: wyznaczyć translację T , przekształcającą punkt S na $(0, 0)$, następnie zastosować skalowanie J o skali 3, a potem translację T_u o wektor u :

$$J_S^3(u) := T_u \circ J \circ T(u); \quad \text{czyli} \quad u \xrightarrow{T} Tu \xrightarrow{J} J(Tu) \xrightarrow{T_u} T_u(J(Tu)) := J(Tu) + u$$

Ćwiczenie 2. Napisać macierz przekształcenia liniowego T , które przeprowadza wersory odpowiednio na wektory $T : e_1 \mapsto [1, 1]$ i $T : e_2 \mapsto [0, 2]$. Wyznaczyć obrazy wektorów $[1, 1]$, $[-1, 2]$, $[0, -3/2]$ oraz $[0, 0]$.

Ćwiczenie 3. Orientację wektorów wyznacza znak wyznacznika, utworzonego z nich. Wyznaczyć orientację par wektorów u, v dla

$$(1) \ u = [-1, 1], v = [-1, -1], \quad (2) \ u = [-1, 1], v = [-2, 2]$$

Ćwiczenie 4. Za pomocą operacji **AffineTransform** $[m, v]$ wyznaczyć przekształcenie afiniczne zadane wzorem $T[x, y] = [3x + 4y + 1, 4x - 3y - 2/3]$. Znaleźć obrazy wektorów $[-1, 2]$, $[0, -3]$ oraz $[-2, 4]$ oraz obrazy wersorów.

Ćwiczenie 5. Wyznaczyć część liniową m oraz część translacyjną v przekształcenia afinicznego $Tw = mw + v$, określonego w Ćwiczeniu 5.

Ćwiczenie 6. Wyznaczyć przekształcenie $S : w \mapsto nw + u$ odwrotne do T : (1) wyznaczyć macierz n odwrotną do m za pomocą przekształcenia, (2) wyznaczyć wektor u rozwiązując odpowiednie równanie, (3) sprawdzić, że przekształcenie $R : w \mapsto m^{-1}w - v$ nie jest odwrotne do T .

Ćwiczenie 7. Wyznaczyć rzut wektora u w kierunku wektora v dla następujących par wektorów (u, v) : (1) $([1, 2], [3, -1])$, (2) $([-2, -1], [2, 3])$, (3) $([2, -3], [3, 2])$

3.8 Znajdowanie postaci kanonicznej

- **RotationTransform[30Degree]** - obrót o 30 stopni
- **RotationTransform[Pi/4]** - obrót o $\pi/4$
- **ContourPlot** $[g[x, y], \{x, a, b\}, \{y, c, d\}, Axes \rightarrow True]$ - rysowanie poziomicy funkcji dwóch zmiennych w podanym zakresie wraz z osiami OX i OY

Ćwiczenie 1. Narysować poziomice funkcji $g(x, y) := 2x^2 + 3y^2 - 4x + 18y$. Spróbować zgadnąć o ile należy przesunąć zmienne x, y aby punkt $(0, 0)$ stał się środkiem symetrii otrzymanego rysunku. Następnie podstawić to przesunięcie do wzoru $g(x, y)$ i sprawdzić, czy otrzymana postać jest kanoniczną.

Ćwiczenie 2. Narysować poziomice funkcji $g(x, y) := 2x^2 + 3xy + y^2$. Spróbować zgadnąć o ile należy obrócić (ew. przeuwać) rysunek tak, aby punkt $(0, 0)$ stał się jego środkiem symetrii. Następnie podstawić to przesunięcie do wzoru $g(x, y)$ i sprawdzić, czy otrzymana postać jest kanoniczną.

Ćwiczenie 3. Narysować poziomice funkcji $g(x, y) := x^2 - 5y^2 - 4x - 50y$. Spróbować zgadnąć o ile należy obrócić (ew. przeuwać) rysunek tak, aby punkt $(0, 0)$ stał się jego środkiem symetrii. Następnie podstawić to przesunięcie do wzoru $g(x, y)$ i sprawdzić, czy otrzymana postać jest kanoniczną.

Ćwiczenie 4. Narysować krzywą, będącą rozwiązaniem równania $x^2 - 2xy + y^2 + x + y = 0$, a następnie obrócić ją tak, aby jedna z osi układu stanowiła jej oś symetrii.

Ćwiczenie 5. W powyższych ćwiczeniach narysować kilka poziomicy podanej funkcji $g(x, y)$ na jednym wykresie, a następnie, na innym wykresie, kilka dowolnych obrotów tych krzywych.

3.9 Układy równań liniowych

- **MatrixRank[m]** oblicza rząd macierzy **m**
- **Det[m]** oblicza wyznacznik macierzy **m**
- **Solve[ax+by==p & & cx+dy==q, {x,y}]** rozwiązuje podany układ równań
- **Inverse[m]** wyznacza macierz odwrotną do macierzy kwadratowej **m**

Ćwiczenie 1. Wyznaczyć rząd każdej z następujących macierzy:

$$m_1 := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad m_2 := \begin{bmatrix} -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -5 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad m_3 := \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

Ćwiczenie 2. Wyznaczyć rząd macierzy głównej W i rząd macierzy rozszerzonej $[W|B]$ dla następujących układów równań:

$$a) \quad \begin{cases} x+2y = 8 \\ 2x-3y = 2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x-2y = 3 \\ -2x+4y = -6 \end{cases}, \quad \begin{cases} 2x-6y = 1 \\ -3x+9y = -2 \end{cases}.$$

$$b) \quad \begin{cases} -x+3y-2z = 4 \\ 2x-3y-z = -2 \\ 2x-5y+z = 3 \end{cases}, \quad \begin{cases} -y+z = 0 \\ -x+y-z = -1 \\ x-z = 1 \end{cases}.$$

Ćwiczenie 3. Rozwiązać układy równań z Ćwiczenia 2., korzystając z polecenia `Solve`.

Ćwiczenie 4. Rozwiązać układy równań z Ćwiczenia 2., metodą wyznaczników, obliczając wyznaczniki W, W_x, W_y .

Ćwiczenie 5. Sprawdzić, który z układów równań z Ćwiczenia 2. ma dokładnie jedno rozwiązanie. Następnie wyznaczyć to rozwiązanie, znajdując macierz odwrotną do macierzy głównej tego układu.

3.10 Wektory i macierze

- **VectorAngle[u,v]** – oblicza kąt między wektorami $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$.
- **Norm[u]** – oblicza normę wektora $\mathbf{u}$
- $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ – mnożenie skalarne wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$.
- **Det[u,v,...]** – oblicza wyznacznik macierzy utworzonej z wektorów $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$
- **CharacteristicPolynomial[m, x]** – oblicza wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{m}$ dla zmiennej x

Ćwiczenie 1. Obliczyć iloczyny skalarne wszystkich par wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$, jeśli $\mathbf{u} \in \{(1, 2, 3), (-2, 0, 3), (-1, 1, -1)\}$ oraz $\mathbf{v} \in \{(2, 0, -1), (1, 3, 1), (2, -1, 0)\}$.

Ćwiczenie 2. Wyznaczyć w przybliżeniu kąty między poszczególnymi parami wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ z Ćwiczenia 1.

Ćwiczenie 3. Wyznaczyć normy wektorów $\mathbf{u}$ i $\mathbf{v}$ z Ćwiczenia 1.

Ćwiczenie 4. Zbadać, które trójki spośród powyższych wektorów są liniowo niezależne.

Ćwiczenie 5. Utworzyć macierz zdefiniowaną wzorem $a_{i,j} := i - j$, dla $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i obliczyć jej wyznacznik oraz wielomian charakterystyczny. Wyznaczyć wartości własne tej macierzy.

Ćwiczenie 6. Utworzyć macierz zdefiniowaną wzorem $b_{i,j} := i + j$, dla $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ i obliczyć jej wyznacznik oraz wielomian charakterystyczny. Wyznaczyć wartości własne tej macierzy.

Ćwiczenie 7. Utworzyć macierz zdefiniowaną wzorem $c_{i,j} := i^2 - j + 1$, dla $i, j \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ i obliczyć jej wyznacznik oraz wielomian charakterystyczny. Wyznaczyć wartości własne tej macierzy.