CZY WARTO RZUCAĆ "MONETĄ"?

Zbigniew J. Jurek (Uniwersytet Wrocławski, Wrocław)

16 października 2004r.

Plan wykładu :

1) Jak oszacować prawdopodobieństwo otrzymania 'orła' dla nieznanej monety?

2) Ile ryb jest w stawie ?

3) Kto wygra wyścig w grze planszowej?

4) Kiedy losowo wybrana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?

5) Jak znaleźć przbliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ?

6) PODSUMOWANIE.

1. Jak oszacować prawdopodobieństwo uzyskania "orła" dla nieznanej monety?

Ala ma "dziwną" monetę. Nie chce nam jej pokazać, ale zgodziła się na następujące doświadczenie. Będzie rzucać swoją monetą i powie nam ile razy musiała rzucić aby zobaczyć po raz pierwszy "orła".

Wykonała 10 serii takich doświadczeń i podała nam następujące wyniki:

1, 3, 12, 4, 6, 2, 7, 3, 3, 8

Zatem "moneta" była rzucona : $1+3+12+4+6+2+7+3+3+8 = 49$ razy i zaobserwowaliśmy 10 razy "orla". Czyli "średnio" $\overline{x} = \frac{10}{49} \approx 0.2040 \approx 20\%$ na jeden "rzut".

PRAWO ŚREDNICH: *"zaobserwowana" średnia ilość 'orłów' $\overline{x}$ powinna zbliżać się do teoretycznej wartości średniej p (tzw. wartości oczekiwanej).* Formalnie prawo to zapisuje się, że

$$\overline{x} \to p, \quad \text{gdy} \quad n \to \infty, \quad \text{z prawdopodobieństwem 1}$$

Jest to słynne MOCNE PRAWO WIELKICH LICZB KOŁMOGOROWA, jedno z podstatwowych twierdzeń w teorii prawdopodobieństwa.

W rzeczywistości Ala rzucała dwoma monetami monetami: 10-cio i 20-to groszowymi. Wynik dwie reszki, RR, traktowała jako "orła" zaś pozostale trzy mwyniki OR, RO, OO traktowała jako "reszkę". Czyli teoretyczna wartość prwdopodobieństwa "orła" w jednym rzucie jest równe $p = \frac{1}{4} = 0.25$.

Inną realizacją tego modelu może być rzut czworościanu foremnego, który ma trzy ściany oznaczone reszkami i jedną orłem.

2. Ile ryb jest w stawie ?

Eksperyment: wyłowiliśmy 89 ryb, które "zaznaczyliśmy" i ponownie wpuściliśmy do stawu. Po "pewnym" czasie jeszcze raz zarzuciliśmy sieć i tym razem złowiliśmy 68 ryb, a wśród nich mieliśmy 8 znaczonych.

JAK SKORZYSTAĆ Z TEJ INFROMACJI ABY RACJONALNIE OSZACOWAĆ ILOŚĆ RYB W STAWIE ?

Jeśli R oznacza liczbę ryb w stawie to zasadne wydaje się przyjąć, że frakcja ryb znaczonych w stawie $\frac{89}{R}$ powinna być w przybliżeniu równa frakcji ryb znaczonych w sieci, tj. $\frac{8}{68}$. Czyli

$$\frac{89}{R} \approx \frac{8}{68} \quad \text{tzn.} \quad R \approx \frac{89 \cdot 68}{8} = 756.5$$

Stąd $R \approx 756.5$ (!!) Ale oczywiście nigdy nie będzie 'połowy' ryby w stawie !

Nasze statystyczne rozumowanie prowadzi do konkluzji iż można oczekiwać,że w stawie jest **około** 756 ryb.

3. Kto wygra wyścig?

Ala i Ola prowadzą wyścig na planszy. Ala za każdym razem porusza się o trzy kratki do przodu, zaś Ola o tyle kratek ile wypadnie jej na sześciennej kostce. Kto wygra wyścig ? A DOKŁADNIEJ kto ma większą szansę (większe prawdopodobieństwo) zwycięstwa w tej grze ?

Średnia ilość kratek o jaką porusza się Ola;

$$\overline{x} = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \quad (!!)$$

Oczywiście $3.5 > 3$ i stąd w "długiej" grze Ola ma większą szansę zwycięstwa.

Np. po 10 grach szansa, że Ola wygrała wyścig wynosi ok. $0.82 = 82\%$, a po 30 grach wynosi już ok. $0.94 = 94\%$!!

[takie oszacowania otrzymuje się z innego fundamentalnego twierdzenia teorii p-twa, tzw. CENTRALNEGO TWIERDZENIA GRANICZNEGO.]

4. Kiedy przypadkowo wybrana cięciwa okręgu (jednostkowego) jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

CO TO ZNACZY LOSOWO WYBRAĆ CIECIWE ? (Jak to można sformalizować?)

i) Dla ustalonego punktu A na okręgu i prostej stycznej l w tym punkcie do okręgu, wybieramy kąt ϕ jaki cięciwa tworzy z prostą l. Czyli mamy możliwość wyboru ϕ tak, że $0 < \phi < \pi$. Ale aby cięciwa była dłuższa od boku trójkata równobocznego wpisanego w ten okrąg, kat ϕ musi spełniać warunek: $\frac{1}{3}\pi < \phi < \frac{2}{3}\pi$. Stąd

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} \quad = \frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi}{\pi} = \frac{1}{3}$$

(ii) Wybieramy kierunek prowadzenia cięciw, np. północ/południe. Wtedy cięciwa jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt jej przecięcia ze średnicą okręgu. Do wyboru mamy więc punkty z odcinka $(0, 2)$ (okrąg o promieniu 1). Teraz aby cięciwa była dłuższa od boku trójkąta jej punkt przecięcia musi być z odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Zatem

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} \quad = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

(iii) Jesli przyjąć, że cięciwa wyznaczona jest jednoznacznie przez jej środek (tj. punkt w kole jednostkowym) to

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} \quad = \frac{1}{4}$$

KTÓRA ODPOWIEDŹ JEST PRAWDZIWA ? ....

WSZYSTKIE, bo są to trzy różne zadania (trzy matematyczne modele zgadnienia losowego wyboru cieciwy).

W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę PARADOKSU BERTRANDA.

5. Jak znaleźć przbliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ?

Podłoga zrobiona jest z idealnie równych desek o szerokości d. (Myślmy o arkuszu papieru w linie !). Na podłogę rzucamy igłę o długości l, przy czym $l < d$. Zatem igła może przecinać co najwyżej jedną linię (innymi słowy krawędź deski na podłodze). Jaka obliczyć szanę, że losowo rzucona igła na podłogę przetnie linię ?

Dla stwierdzenia czy igła przecina jakąś linię czy nie, wystarczy znać jej położenie na podłodze wyznaczone przez:

$x :=$ odległość środka igły do bliższej z linii;

$\phi :=$ kąt pod jakim igła lub jej przedłużenie przecina się z bliższa linią;

Wtedy wszystkie możliwe położenia igły odpowiadają parom (x, ϕ) takim, że $0 < x < d/2$ oraz $0 < \phi < \pi$. Pole tego prostokąta jest $\pi d/2$.

Natomiast aby igła przecinała linię musi zachodzić nierówność $x \leqslant \frac{l}{2} \sin \phi$. Jest to pole pod krzywą $x = \frac{l}{2} \sin \phi$, gdzie $0 < \phi < \pi$.

Pole to jest równe $= \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \phi \, d\phi = l$. Zatem

$$\text{p-stwo, że igła przecina prostą } = \frac{l}{\pi d/2} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Jeśli w doświadczeniach frakcja rzutów kończących się przecięciem wynosi $\overline{x}$, to uzasdnionym jest oczekiwać, że

$$\overline{x} \approx \frac{2l}{\pi d}; \quad \text{tzn. } \pi \approx \frac{2l}{\overline{x} d}.$$

I po prawej stronie znamy wszystkie wielkości : $d, l, \overline{x}$ co pozwala oszacować wartość liczby π.

W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę ZADANIE BUFFONA O IGLE. (z około 1735 r.)

PODSUMOWANIE.

(i) "moneta" w wykładzie jest synonimem wszystkich sytuacji, w których nie można przyjąć pełnego determinizmu fizycznego.

(ii) intuicyjnie przyjęte przez nas "prawo", że *zaobserwowane średnie wartości "zbliżają" się do wartości oczekiwanej,* wymaga logicznego sformalizowania i ...udowodnienia, w przyjętym modelu teorii prawdopodobieństwa.

(iii) "prawo średnich" jest prawem statystycznym !! NIGDY nie mamy pewności, że nasza odpowiedź jest PRAWDZIWA !!! Ale potrafimy oszacować prawdopodobieństwo błędu; por. zadanie o wyścigu.

(iv) w przyrodzie, w tym w działalności człowieka, mamy bogactwo sytuacji, w którym nie ma pełnego determinizmu i zmuszeni jesteśmy do stosowania metod statystycznych i probabilistycznych.