

DOLNOŚLĄSKI FESTIWAL NAUKI, wrzesień 2017r.

CZY WARTO RZUCAĆ "MONETĄ"?

Zbigniew J. JUREK (Uniwersytet Wrocławski)

Plan wykładu :

- 1) Jak oszacować prawdopodobieństwo otrzymania 'orła' dla nieznanej monety ?
- 2) Problem urodzin ?
- 3) Ile ryb jest w stawie ? (idea sondażu statystycznego)
- 4) Kto wygra wyścig w grze planszowej?
- 5) Kiedy losowo wybrana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?
- 6) Jak znaleźć przybliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ?
- 7) Jak przewidzieć pozycję końcową w spacerze losowym na ciągu cyfr losowych?
- 8) PODSUMOWANIE.

1. Jak oszacować prawdopodobieństwo uzyskania *orła* dla nieznanej monety?

Ala ma "dziwną" monetę. Nie chce nam jej pokazać, ale zgodziła się na następujące doświadczenie. Będzie rzucała swoją monetą i powie nam ile razy musiała rzucić aby zobaczyć po raz pierwszy *orła* .

Wykonała 10 serii takich doświadczeń i podała nam następujące wyniki:

1, 3, 12, 4, 6, 2, 7, 3, 3, 8

Zatem "moneta" była rzucona :

$1 + 3 + 12 + 4 + 6 + 2 + 7 + 3 + 3 + 8 = 49$ razy i
zaobserwowaliśmy 10 razy *orła*.

Czyli "średnio" $\bar{x} = \frac{10}{49} \approx 0.2040 \approx 20\%$ na jeden *rzut*.

PRAWO ŚREDNICH: *zaobserwowana średnia ilość 'orłów' $\bar{x}$ powinna zbliżać się do teoretycznej wartości średniej p (tzw. wartości oczekiwanej).* Formalnie prawo to zapisuje się, że

$$\bar{x} \rightarrow p, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \text{ z prawdopodobieństwem } 1$$

Jest to słynne MOCNE PRAWO WIELKICH LICZB KOŁMOGOROWA, jedno z podstawowych twierdzeń w teorii prawdopodobieństwa.

W rzeczywistości Ala rzucała dwoma monetami monetami: 10-cio i 20-to groszowymi.

Wynik dwie reszki, RR, traktowała jako *orła* zaś pozostałe trzy wyniki OR, RO, OO traktowała jako *reszkę*. Czyli teoretyczna wartość prawdopodobieństwa "orła" w jednym rzucie jest równe $p = \frac{1}{4} = 0.25$.

Inną realizacją tego modelu może być rzut czworościanem foremnym, który ma trzy ściany oznaczone reszkami i jedną orłem.

2. Problem urodzin. Czy duża jest szansa na to, że w grupie 25 osób co najmniej dwie mają w tym samym dniu urodziny ?
(przyjmujemy, że rok ma 365 dni).

(a) ILE JEST MOŻLIWOŚCI, ŻE 25 OSÓB MA RÓŻNE DNI URODZIN?

dla pierwszej osoby jest 365 możliwych wyborów dnia urodzin !

dla drugiej osoby mam 364 możliwości

dla trzeciej osoby 363 możliwości

....

dla 24 osoby mamy ... $365-23=342$

i dla 25 osoby mamy 341

Odp. do a) = $365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 342 \cdot 341 \approx 4.92 \cdot 10^{63}$

(b) NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA WYBRAĆ DZIEŃ URODZIN DLA 25 OSOB ?

dla pierwszej osoby jest 365 możliwych wyborów dnia urodzin !

dla drugiej osoby mam 365 możliwości

dla 24 osoby mamy ... 365 i dla 25 osoby mamy 365

ZATEM

Odp. do **b)** = $365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365 \cdot 365 = 365^{25} \approx 1.14 \cdot 10^{64}$

Szansa, że wśród 25 osób **WSZYSTKIE** mają różne dni urodzin =

$$\frac{\text{Odp. do a)}}{\text{Odp. do b)}} = \frac{4.92 \cdot 10^{63}}{1.14 \cdot 10^{64}} = \frac{4.92}{11.4} = 0.43\%$$

Szansa, że wśród 25 osób są dwie lub więcej osoby o tym samym dniu urodzin =

$$1 - \frac{4.92 \cdot 10^{63}}{1.14 \cdot 10^{64}} = 1 - \frac{4.92}{11.4} = 1 - 0.43 = 0.57 = 57\%$$

Szansa na to, że klasie 30 osobowej dwie osoby lub więcej obchodzić będzie urodziny w tym samym dniu roku wynosi 71%

W KLASIE 100 OSOBOWEJ SZANSA TAKA WYNOSI JUŻ ...

97% (a rok ma ...365 dni !!)

3. Ile ryb jest w stawie ? (idea sondażu statystycznego)

Eksperyment: wyłowiliśmy 89 ryb, które *zaznaczyliśmy* i ponownie wpuściliśmy do stawu.

Po pewnym czasie jeszcze raz zarzuciliśmy sieć i tym razem złowiliśmy 68 ryb, a wśród nich mieliśmy 8 ryb znaczonych.

JAK SKORZYSTAĆ Z TEJ INFORMACJI ABY RACJONALNIE OSZACOWAĆ ILOŚĆ RYB W STAWIE ?

Jeśli R oznacza liczbę ryb w stawie to zasadne wydaje się przyjąć, że frakcja ryb znaczonych w stawie $\frac{89}{R}$ powinna być w przybliżeniu równa frakcji ryb znaczonych w sieci, tj. $\frac{8}{68}$. Czyli

$$\frac{89}{R} \approx \frac{8}{68} \quad \text{tzn.} \quad R \approx \frac{89 \cdot 68}{8} = 765.5$$

Stąd $R \approx 765.5$ (!!)

Ale oczywiście nigdy nie będzie 'połowy' ryby w stawie !

Nasze statystyczne rozumowanie prowadzi do konkluzji, że można oczekiwać, że w stawie jest **około** 765 ryb.

4. Kto wygra wyścig?

Ala i Ola prowadzą wyścig na planszy. Ala za każdym razem porusza się o trzy kratki do przodu, zaś Ola o tyle kratek ile wypadnie jej na sześcienną kostkę. Kto wygra wyścig ? A DOKŁADNIEJ kto ma większą szansę (większe prawdopodobieństwo) zwycięstwa w tej grze ?

Średnia ilość krater o jaką porusza się Ola;

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \quad (!!)$$

Oczywiście $3.5 > 3$ i stąd w "długiej" grze Ola ma większą szansę zwycięstwa.

Np. po 10 grach szansa, że Ola wygrała wyścig wynosi ok.

$0.82 = 82\%$, a po 30 grach wynosi już ok. $0.94 = 94\%$!!

[takie oszacowania otrzymuje się z innego fundamentalnego twierdzenia teorii p-twa, tzw. CENTRALNEGO TWIERDZENIA GRANICZNEGO.]

5. Kiedy przypadkowo wybrana cięciwa okręgu (jednostkowego) jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

CO TO ZNACZY LOSOWO WYBRAĆ CIĘCIWĘ ? (Jak to można sformalizować?)

i) Dla ustalonego punktu A na okręgu i prostej stycznej l w tym punkcie do okręgu, wybieramy kąt ϕ jaki cięciwa tworzy z prosta l . Czyli mamy możliwość wyboru ϕ tak, że $0 < \phi < \pi$. Ale aby cięciwa była dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, kąt ϕ musi spełniać warunek: $\frac{1}{3}\pi < \phi < \frac{2}{3}\pi$.
Stąd

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} = \frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi}{\pi} = \frac{1}{3}$$

(ii) Wybieramy kierunek prowadzenia cięciw, np. pół noc/południe. Wtedy cięciwa jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt jej przecięcia ze średnicą okręgu. Do wyboru mamy więc punkty z odcinka $(0, 2)$ (okrąg o promieniu 1). Teraz aby cięciwa była dłuższa od boku trójkąta jej punkt przecięcia musi być z odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.

Zatem

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

(iii) Jeśli przyjąć, że cięciwa wyznaczona jest jednoznacznie przez jej środek (tj. punkt w kole jednostkowym) to

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} = \frac{1}{4}$$

KTÓRA ODPOWIEDŹ JEST PRAWDZIWA ?

WSZYSTKIE !!! Bo są to trzy różne zadania (trzy matematyczne modele zgadnienia losowego wyboru cięciwy). (W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę PARADOKSU BERTRANDA.)

6. Jak znaleźć przybliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ?

Podłoga zrobiona jest z idealnie równych desek o szerokości d .
(Myślmy o arkuszu papieru w linie !).

Na podłogę rzucamy igłę o długości l , przy czym $l < d$. Zatem igła może przecinać/dotykać co najwyżej jedną linię (innymi słowy krawędź deski na podłodze).

Jaka obliczyć szansę, że losowo rzucona igła na podłogę przetnie linię ? Dla stwierdzenia czy igła przecina jakąś linię czy nie, wystarczy znać jej położenie na podłodze wyznaczone przez:

$x :=$ odległość środka igły do bliższej z linii;

$\phi :=$ kąt pod jakim igła lub jej przedłużenie przecina się z bliższą linią;

Wtedy wszystkie możliwe położenia igły odpowiadają parom (x, ϕ) takim, że $0 < x < d/2$ oraz $0 < \phi < \pi$. Pole tego prostokąta jest równe $\pi d/2$.

Natomiast aby igła przecinała linię musi zachodzić nierówność $x \leq \frac{l}{2} \sin \phi$. Jest to pole pod krzywą $x = \frac{l}{2} \sin \phi$, gdzie $0 < \phi < \pi$.

Pole to jest równe : $\int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \phi d\phi = l$. Zatem

$$\text{p-stwo, że igła przecina prostą} = \frac{l}{\pi d/2} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Jeśli w doświadczeniach frakcja rzutów kończących się przecięciem wynosi $\bar{x}$, to uzasadnionym jest oczekiwać, że

$$\bar{x} \approx \frac{2l}{\pi d}; \quad \text{tzn.} \quad \pi \approx \frac{2l}{\bar{x}d}.$$

I po prawej stronie znamy wszystkie wielkości : $d, l, \bar{x}$ co pozwala oszacować wartość liczby π .

W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę ZADANIE BUFFONA O IGLE. (z około 1735 r.)

7. Jak przewidzieć pozycję końcową w spacerze losowym na ciągu cyfr losowych?

Z tabeli liczb losowych (co to jest?) wybieramy dowolny ciąg długości co najmniej stu kolejnych cyfr losowych; np. taki:

5, 9, 8, 1, 9, 1, 6, 8, 3, 8, 2, 1, 8, 8, 1, 7, 3, 9, 1, 6,
6, 6, 5, 9, 7, 5, 4, 3, 9, 1, 0, 1, 3, 8, 5, 3, 7, 2, 8, 2,
9, 7, 0, 7, 6, 3, 0, 4, 1, 8, 2, 1, 1, 1, 3, 6, 5, 0, 6, 2,
5, 8, 1, 0, 5, 2, 6, 6, 6, 0, 5, 9, 7, 3, 3, 0, 6, 6, 3, 8,
8, 3, 5, 9, 0, 3, 3, 5, 9, 5, 4, 7, 7, 9, 0, 4, 2, 3, 3, 2.

Gracz A spośród pierwszych 10 cyfr ciągu wybiera jedną !
np. cyfrę 8 na trzeciej pozycji (trzeci wyraz ciągu) i wykonuje 8
kroków ("spaceruje") wzdłuż ciągu.

Zatrzymuje się więc na cyfrze 2 (jedenastym wyrazie ciągu).

Zatem przesuwamy się o dwie pozycje ...

5, 9, **8**, 1, 9, 1, 6, 8, 3, 8, **2**, 1, **8**, 8, 1, 7, 3, 9, 1, 6,
6, 6, 5, 9, 7, 5, 4, 3, 9, 1, 0, 1, 3, 8, 5, 3, 7, 2, 8, 2,
9, 7, 0, 7, 6, 3, 0, 4, 1, 8, 2, 1, 1, 1, 3, 6, 5, 0, 6, 2,
5, 8, 1, 0, 5, 2, 6, 6, 6, 0, 5, 9, 7, 3, 3, 0, 6, 6, 3, 8,
8, 3, 5, 9, 0, 3, 3, 5, 9, 5, 4, 7, 7, 9, 0, 4, 2, 3, 3, **2**.

... i jesteśmy na cyfrze 8.

Posuwamy się więc o 8 pozycji itd tak długo jak jest to możliwe.

OSTATECZNIE ZATRZYMALISMY SIĘ NA CYFRZE 2 !!
(ostatniej w ciągu).

CZY NA DOWOLNYM CIĄGU, CO NAJMNIEJ STU CYFR
LOSOWYCH, GRACZ B MOŻE, W WYŻEJ OPISANYM
SPACERZE ", **przewidzieć**" GDZIE SIĘ ZATRZYMAŁ GRACZ A
?

Odpowiedz: TAK, z prawdopodobieństwem ok. 97,5 % !

Gracz B wykonuje taki sam spacer zaczynając z pierwszej pozycji
ciągu tj. cyfry 5 ! (tzw. coupling).

8. PODSUMOWANIE.

(i) "moneta" w dzisiejszym wykładzie jest synonimem wszystkich sytuacji, w których nie można przyjąć pełnego determinizmu fizycznego.

(ii) intuicyjnie przyjęte przez nas "prawo", że *zaobserwowane średnie wartości "zbliżają" się do wartości oczekiwanej*, wymaga logicznego sformalizowania i ... udowodnienia, w przyjętym modelu teorii prawdopodobieństwa. (**mocne prawo wielkich liczb.**)

(iii) "prawo średnich" jest prawem statystycznym !! NIGDY nie mamy pewności, że nasza odpowiedź jest PRAWDZIWA !!! Ale potrafimy oszacować prawdopodobieństwo błędu; por. zadanie o wyścigu. (**centralne twierdzenie graniczne.**)

(iv) w przyrodzie, w tym w działalności człowieka, mamy bogactwo sytuacji, w których nie ma pełnego determinizmu i zmuszeni jesteśmy do stosowania metod statystycznych i probabilistycznych.

(v) W 2013 roku nagrodę Nobla w Ekonomii przyznano E. Farnie, L. Hansenowi i R. Shillerowi za wykorzystanie stochastycznych metod dla wyceny tzw. pochodnych instrumentów finansowych.

Na stronie

www.math.uni.wroc.pl/~zjjurek

oprócz niniejszego wykładu jest też artykuł biograficzno - naukowy o twórcy teorii prawdopodobieństwa A. N. Kołmogorowie,

oraz mój wykład MATEMATYCZNE ZARZĄDZANIE RYZYKIEM - LOSOWOSCIĄ wygłoszony na inauguracji roku akademickiego 2013/2014.

DZIĘKUJĘ ZA UWAGĘ !!!!

I zapraszam do studiowania nauk matematyczno-przyrodniczych i ... logiczno - krytycznego analizowania każdego tekstu i każdej informacji !!!

Zbigniew J. Jurek