

CZY WARTO RZUCAĆ "MONETĄ"?

Zbigniew J. Jurek (Uniwersytet Wrocławski)

16 stycznia 2010r.

Plan wykładu :

- 1) Jak oszacować prawdopodobieństwo otrzymania 'orła' dla nieznanej monety ?
- 2) Problem urodzin ?
- 3) Ile ryb jest w stawie ?
- 4) Kto wygra wyścig w grze planszowej?
- 5) Kiedy losowo wybrana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ?
- 6) Jak znaleźć przybliżoną wartość liczby π mając ... podłgę i igłę ?
- 7) PODSUMOWANIE.

1. Jak oszacować prawdopodobieństwo uzyskania órla dla nieznannej monety?

Ala ma "dziwną" monetę. Nie chce nam jej pokazać, ale zgodziła się na następujące doświadczenie. Będzie rzucać swoją monetą i powie nam ile razy musiała rzucić aby zobaczyć po raz pierwszy órla".

Wykonała 10 serii takich doświadczeń i podała nam następujące wyniki:

1, 3, 12, 4, 6, 2, 7, 3, 3, 8

Zatem "moneta" była rzucona : $1 + 3 + 12 + 4 + 6 + 2 + 7 + 3 + 3 + 8 = 49$ razy i zaobserwowaliśmy 10 razy órla". Czyli "średnio" $\bar{x} = \frac{10}{49} \approx 0.2040 \approx 20\%$ na jeden rzut".

PRAWO ŚREDNICH: *zaobserwowana "średnia ilość 'orłów' $\bar{x}$ powinna zbliżać się do teoretycznej wartości średniej p (tzw. wartości oczekiwanej).* Formalnie prawo to zapisuje się, że

$$\bar{x} \rightarrow p, \text{ gdy } n \rightarrow \infty, \text{ z prawdopodobieństwem } 1$$

Jest to słynne MOCNE PRAWO WIELKICH LICZB KOŁMOGOROWA, jedno z podstawowych twierdzeń w teorii prawdopodobieństwa.

W rzeczywistości Ala rzucała dwoma monetami monetami: 10-cio i 20-to groszowymi. Wynik dwie reszki, RR, traktowała jako *orłazaś* pozostałe trzy wyniki OR, RO, OO traktowała jako *reszkę*. Czyli teoretyczna wartość prawdopodobieństwa órla" w jednym rzucie jest równe $p = \frac{1}{4} = 0.25$.

Inną realizacją tego modelu może być rzut czworościanu foremego, który ma trzy ściany oznaczone reszkami i jedną orłem.

2. Problem urodzin.

Czy duża jest szansa na to, że w grupie 25 osób co najmniej dwie mają w tym samym dniu urodziny ? (przyjmujemy, że rok ma 365 dni).

(a) ILE JEST MOŻLIWOŚCI, ŻE WSZYSTKIE OSOBY MAJĄ RÓŻNE DNI URODZIN!

dla pierwszej osoby jest 365 możliwych wyborów dnia urodzin !

dla drugiej osoby mam 364 możliwości

dla trzeciej osoby 363 możliwości

.... dla 24 osoby mamy ... 365-23=342 i dla 25 osoby mamy 341

$$\text{Odp. do a)} = 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot \dots \cdot 342 \cdot 341 \approx 4.92 \cdot 10^{63}$$

(b) ILE JEST WSZYSTKICH MOŻLIWOŚCI PRYZNANIA DNIA URODZIN DLA 25 OSOB ?

dla pierwszej osoby jest 365 możliwych wyborów dnia urodzin !

dla drugiej osoby mam 365 możliwości

dla trzeciej osoby 365 możliwości

.... dla 24 osoby mamy ... 365 i dla 25 osoby mamy 365

$$\text{Odp. do b)} = 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot \dots \cdot 365 \cdot 365 = 365^{25} \approx 1.14 \cdot 10^{64}$$

Szansa, że wśród 25 osób są dwie lub więcej osoby o tym samym dniu urodzin =

$$1 - \frac{4.92 \cdot 10^{63}}{1.14 \cdot 10^{64}} = 1 - \frac{4.92}{11.4} = 1 - 0.43 = 0.57 = 57\%$$

Szansa na to, że klasie 30 osobowej dwie osoby lub więcej obchodzą urodziny w tym samym dniu roku wynosi 71%

W KLASIE 50 OSOBOWEJ SZANSA TAKA WYNOSI JUŻ... 97%

3. Ile ryb jest w stawie ?

Eksperyment: wyłowiliśmy 89 ryb, które zaznaczyliśmy i ponownie wpuściliśmy do stawu. Po "pewnym czasie" jeszcze raz zarzuciliśmy sieć i tym razem złowiliśmy 68 ryb, a wśród nich mieliśmy 8 znaczonych.

JAK SKORZYSTAĆ Z TEJ INFORMACJI ABY RACJONALNIE OSZACOWAĆ ILOŚĆ RYB W STAWIE ?

Jeśli R oznacza liczbę ryb w stawie to zasadne wydaje się przyjąć, że frakcja ryb znaczonych w stawie $\frac{89}{R}$ powinna być w przybliżeniu równa frakcji ryb znaczonych w sieci, tj. $\frac{8}{68}$. Czyli

$$\frac{89}{R} \approx \frac{8}{68} \quad \text{tzn.} \quad R \approx \frac{89 \cdot 68}{8} = 765.5$$

Stąd $R \approx 765.5$ (!!) Ale oczywiście nigdy nie będzie 'połowy' ryby w stawie !

Nasze statystyczne rozumowanie prowadzi do konkluzji iż można oczekiwać, że w stawie jest **około** 765 ryb.

3. Kto wygra wyścig?

Ala i Ola prowadzą wyścig na planszy. Ala za każdym razem porusza się o trzy kratki do przodu, zaś Ola o tyle kratek ile wypadnie jej na sześciennym kostce. Kto wygra wyścig ? A DOKŁADNIEJ kto ma większą szansę (większe prawdopodobieństwo) zwycięstwa w tej grze ?

Średnia ilość kratek o jaką porusza się Ola;

$$\bar{x} = \frac{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5 \quad (!!)$$

Oczywiście $3.5 > 3$ i stąd w "dłuższej" grze Ola ma większą szansę zwycięstwa.

Np. po 10 grach szansa, że Ola wygrała wyścig wynosi ok. $0.82 = 82\%$, a po 30 grach wynosi już ok. $0.94 = 94\%$!!

[takie oszacowania otrzymuje się z innego fundamentalnego twierdzenia teorii p-twa, tzw. CENTRALNEGO TWIERDZENIA GRANICZNEGO.]

4. Kiedy przypadkowo wybrana cięciwa okręgu (jednostkowego) jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?

CO TO ZNACZY LOSOWO WYBRAĆ CIECIWE ? (Jak to można sformalizować?)

i) Dla ustalonego punktu A na okręgu i prostej stycznej l w tym punkcie do okręgu, wybieramy kąt ϕ jaki cięciwa tworzy z prostą l . Czyli mamy możliwość wyboru ϕ tak, że $0 < \phi < \pi$. Ale aby cięciwa była dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, kąt ϕ musi spełniać warunek: $\frac{1}{3}\pi < \phi < \frac{2}{3}\pi$. Stąd

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} = \frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi}{\pi} = \frac{1}{3}$$

(ii) Wybieramy kierunek prowadzenia cięciw, np. północ/południe. Wtedy cięciwa jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt jej przecięcia ze średnicą okręgu. Do wyboru mamy więc punkty z odcinka $(0, 2)$ (okrąg o promieniu 1). Teraz aby cięciwa była dłuższa od boku trójkąta jej punkt przecięcia musi być z odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$. Zatem

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

(iii) Jeśli przyjąć, że cięciwa wyznaczona jest jednoznacznie przez jej środek (tj. punkt w kole jednostkowym) to

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} = \frac{1}{4}$$

KTÓRA ODPOWIEDŹ JEST PRAWDZIWA ?

WSZYSTKIE, bo są to trzy różne zadania (trzy matematyczne modele zgadnienia losowego wyboru cięciwy).

W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę PARADOKSU BERTRANDA.

5. Jak znaleźć przybliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ?

Podłoga zrobiona jest z idealnie równych desek o szerokości d . (Myślmy o arkuszu papieru w linie !). Na podłogę rzucamy igłę o długości l , przy czym $l < d$. Zatem igła może przecinać co najwyżej jedną linię (innymi słowy krawędź deski na podłodze). Jaka obliczyć szansę, że losowo rzucona igła na podłogę przetnie linię ?

Dla stwierdzenia czy igła przecina jakąś linię czy nie, wystarczy znać jej położenie na podłodze wyznaczone przez:

$x :=$ odległość środka igły do bliższej z linii;

$\phi :=$ kąt pod jakim igła lub jej przedłużenie przecina się z bliższą linią;

Wtedy wszystkie możliwe położenia igły odpowiadają parom (x, ϕ) takim, że $0 < x < d/2$ oraz $0 < \phi < \pi$. Pole tego prostokąta jest $\pi d/2$.

Natomiast aby igła przecinała linię musi zachodzić nierówność $x \leq \frac{l}{2} \sin \phi$. Jest to pole pod krzywą $x = \frac{l}{2} \sin \phi$, gdzie $0 < \phi < \pi$.

Pole to jest równe $= \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \phi d\phi = l$. Zatem

$$\text{p-stwo, że igła przecina prostą} = \frac{l}{\pi d/2} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Jeśli w doświadczeniach frakcja rzutów kończących się przecięciem wynosi $\bar{x}$, to uzasadnionym jest oczekiwać, że

$$\bar{x} \approx \frac{2l}{\pi d}; \quad \text{tzn.} \quad \pi \approx \frac{2l}{\bar{x}d}.$$

I po prawej stronie znamy wszystkie wielkości : $d, l, \bar{x}$ co pozwala oszacować wartość liczby π .

W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę ZADANIE BUFFONA O IGLE. (z około 1735 r.)

PODSUMOWANIE.

(i) "moneta" w wykładzie jest synonimem wszystkich sytuacji, w których nie można przyjąć pełnego determinizmu fizycznego.

(ii) intuicyjnie przyjęte przez nas "prawo", że *zaobserwowane średnie wartości zbliżają się do wartości oczekiwanej*, wymaga logicznego sformalizowania i ...udowodnienia, w przyjętym modelu teorii prawdopodobieństwa.

(mocne prawo wielkich liczb—strong law of large numbers(SLLN))

(iii) "prawo średnich" jest prawem statystycznym !! NIGDY nie mamy pewności, że nasza odpowiedź jest PRAWDZIWA !!! Ale potrafimy oszacować prawdopodobieństwo błędu; por. zadanie o wyścigu.

(centralne twierdzenie graniczne—central limit theorem (CLT))

(iv) w przyrodzie, w tym w działalności człowieka, mamy bogactwo sytuacji, w którym nie ma pełnego determinizmu i zmuszeni jesteśmy do stosowania metod statystycznych i probabilistycznych.