DOLNOŚLĄSKI FESTIWAL NAUKI, 20 wrzesień 2023r.

CZY WARTO RZUCAĆ "MONETĄ"?

Zbigniew J. JUREK (Uniwersytet Wrocławski)

http://www.math.uni.wroc.pl/~zjjurek
zbigniew.jurek@math.uni.wroc.pl

Plan wykładu :

1) Problem urodzin ?

2) Jak "wygrać" spacer na ciągu cyfr losowych?

3) Caspar Neumann (1648-1715) i "wrocławskie" tablice przeżycia wg Edmonda Halleya z 1693r.

4) Kiedy losowo wybrana cięciwa okręgu jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg ? (Paradoks Bertranda z 1888r.)

5) Jak znaleźć przbliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ? (Zadnie Buffona rozwiązane w 1777r.)

6) PODSUMOWANIE.

1. Problem urodzin. Czy duża jest szansa na to, że w grupie 25 osób co najmniej dwie mają w tym samym dniu roku urodziny ? (przyjmujemy, że rok ma 365 dni).

(**a**) ILE JEST MOŻLIWOŚCI, ŻE 25 OSÓB MA RÓŻNE DNI URODZIN?

dla pierwszej osoby jest 365 możliwych wyborów dnia urodzin !

dla drugiej osoby mam 364 możliwości

dla trzeciej osoby 363 możliwości

....

dla 24 osoby mamy ... 365-23=342
i .... dla 25 osoby mamy 341

Odp. do **a)** $= \; 365 \cdot 364 \cdot 363 \cdot ... \cdot 342 \cdot 341 \approx 4.92 \cdot 10^{63}$

(**b**) NA ILE SPOSOBÓW MOŻNA WYBRAĆ DZIEŃ URODZIN DLA 25 OSOB ?

dla pierwszej osoby jest 365 możliwych wyborów dnia urodzin !

dla drugiej osoby mam 365 możliwości ....

dla 24 osoby mamy ... 365 i .... dla 25 osoby mamy 365

ZATEM
Odp. do **b)** $= 365 \cdot 365 \cdot 365 \cdot ... \cdot 365 \cdot 365 = 365^{25} \approx 1.14 \cdot 10^{64}$

Szansa, że wsród 25 osób WSZYSTKIE mają różne dni urodzin =
$\frac{\textit{Odp. do } \mathbf{a)}}{\textit{Odp. do } \mathbf{b)}} = \frac{4.92 \cdot 10^{63}}{1.14 \cdot 10^{64}} = \frac{4.92}{11.4} = 0.43\%$
Szansa, że wsród 25 osób są dwie lub więcej osoby o tym samym dniu urodzin =

$1 - \frac{4.92 \cdot 10^{63}}{1.14 \cdot 10^{64}} = 1 - \frac{4.92}{11.4} = 1 - 0.43 = 0.57 = 57\%$

Szansa na to, że klasie 30 osobowej dwie osoby lub więcej obchodzć będzie urodziny w tym samym dniu roku wynosi 71%

W KLASIE 100 0S0BOWEJ SZANSA TAKA WYNOSI JUŻ ... 97% (a rok ma ...365 dni !!)

2. Jak przewidzieć pozycję końcową w spacerze losowym na ciągu cyfr losowych?

Z tabeli liczb losowych (co to jest?) wybieramy dowolny ciąg długosci co najmniej stu kolejnych cyfr losowych; np. taki:

5, 9, 8, 1, 9, 1 ,6 ,8, 3 ,8, 2, 1 , 8, 8, 1, 7, 3, 9, 1, 6,
6, 6, 5, 9, 7, 5, 4, 3, 9, 1, 0, 1, 3, 8, 5, 3, 7, 2, 8, 2,
9, 7, 0, 7, 6, 3, 0, 4, 1, 8, 2, 1, 1, 1, 3, 6, 5, 0, 6, 2,
5, 8, 1, 0, 5, 2, 6, 6, 6, 0, 5, 9, 7, 3, 3, 0, 6, 6, 3, 8,
8, 3, 5, 9, 0, 3, 3, 5, 9, 5, 4, 7, 7, 9, 0, 4, 2, 3, 3, 2.

Gracz A spośród pierwszych początkowych 10 cyfr ciągu wybiera jedną !
np. cyfrę 8 na trzecie pozycji (trzeci wyraz ciągu) i wykonuje 8 kroków (”spaceruje”) wzdłuż wybranego ciągu.
Zatrzymuje się więc na cyfrze 2 (jedenastym wyrazie ciągu).

Zatem przesuwamy się o dwie pozycje ...

5, 9, **8**, 1, 9, 1 ,6 ,8, 3 ,8, **2**, 1 , **8**, 8, 1, 7, 3, 9, 1, 6,
6, 6, 5, 9, 7, 5, 4, 3, 9, 1, 0, 1, 3, 8, 5, 3, 7, 2, 8, 2,
9, 7, 0, 7, 6, 3, 0, 4, 1, 8, 2, 1, 1, 1, 3, 6, 5, 0, 6, 2,
5, 8, 1, 0, 5, 2, 6, 6, 6, 0, 5, 9, 7, 3, 3, 0, 6, 6, 3, 8,
8, 3, 5, 9, 0, 3, 3, 5, 9, 5, 4, 7, 7, 9, 0, 4, 2, 3, 3, **2**.

... i jestesmy na cyfrze 8.
Posuwamy się więc o 8 pozycji itd, tak długo jak jest to mozliwe.

OSTATECZNIE ZATRZYMALIŚMY SIĘ NA CYFRZE 2 !!
(ostatniej w ciągu).

CZY NA DOWOLNYM CIĄGU, CO NAJMNIEJ STU CYFR LOSOWYCH, GRACZ B MOŻE, W WYŻEJ OPISANYM SPACERZE, "**przewidzieć**"GDZIE SIĘ ZATRZYMAŁ GRACZ A?

Odpowiedz: TAK ! Ale z prawdopodobieństwem ok. 97,5 % !
Gracz B wykonuje taki sam spacer zaczynając z dowolnej cyfry, z pierwszych dziesięciu cyfr danego ciągu !! Np. od cyfry 5 (pierwsza pozycja) ! "Liczymy" na tzw. coupling, dwóch spacerów na ciągu 100 losowych cyfr, którego prawdopodobieństwo wynsi 97.5%.

3. Caspar Neumann (1648-1715) i "wrocławskie"tablice przeżycia opublikowne w 1693 przez Edmonda Halleya.

Od roku 1584, mieście Breslau prowadzono Księgę Urodzin i Śmierci. Caspar Neumann (ksiądz i teolog) próbuje matematycznie oszacować/prognozować długość życia człowieka ... ale bez powodzenia.

Zebrane dane przesłane zostały do Royal Society of London i trafiają do Edmonda Halley (1656 -1742), który w 1693 roku opublikował pracę pt.**An Estimate of Degrees of Mortality of Mankind Drawn from the Curious Tables of Births and Funerals of the City of Breslaw.**

(Obecnie nazwisko Haley'a głównie kojarzymy z kometą Haley, która "odwiedza" nas co 75 lat. Ostatnio była 9 lutego 1986r. (widziałem !!) Następne w 2061 roku.)

Celem sporządzenia tablic było użycie ich do oszacowania wysokości składek na ... ubezpieczenia życia !!

(Z tablic Halleya: z 1000 urodzonych do 18 roku przeżyło 610 ! Do 74 roku przeżyło 98 !)

4. Kiedy przypadkowo wybrana cięciwa okręgu (jednostkowego) jest dłuższasza od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg?
CO TO ZNACZY LOSOWO WYBRAĆ CIĘCIWĘ ? (Jak to można to fizycznie sformalizować?)
i) Dla ustalonego punktu A na okręgu i prostej stycznej *l* w tym punkcie do okręgu, wybieramy kąt ϕ jaki cięciwa tworzy z prostą *l*. Czyli mamy możliwość wyboru ϕ tak, że $0 < \phi < \pi$. Ale aby cięciwa była dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, kąt ϕ musi speł niać warunek: $\frac{1}{3}\pi < \phi < \frac{2}{3}\pi$.
Stąd

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} \quad = \frac{\frac{2}{3}\pi - \frac{1}{3}\pi}{\pi} = \frac{1}{3}$$

(ii) Wybieramy kierunek prowadzenia cięciw, np. północ/południe. Wtedy cięciwa jest jednoznacznie wyznaczona przez punkt jej przecięcia ze średnicą okręgu. Do wyboru mamy więc punkty z odcinka $(0, 2)$ (okrąg o promieniu 1). Teraz aby cięciwa był a dłuższa od boku trójkąta jej punkt przecięcia musi być z odcinka $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$.
Zatem

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku} \quad = \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{2 - 0} = \frac{1}{2}$$

(iii) Jesli przyjąć, że cięciwa wyznaczona jest jednoznacznie przez jej środek (tj. punkt w kole jednostkowym) to

$$\text{p-stwo, że cięciwa jest dłuższa od boku trójkąta} \quad = \frac{1}{4}$$

KTÓRA ODPOWIEDŹ JEST PRAWDZIWA ? ....

WSZYSTKIE !!! Bo są to trzy różne modele matematyczne fizycznego zgadnienia jak łosowo"wybrać cięciwę; trzy tzw. trójki Kołmogorowa $(\Omega, \mathcal{F}, P)$; (Praca A. N. Kołmogorowa z 1933r. dała początek obecnej teorii prawdopodobieństwa.)
(W sali 602 IM, przed kilku laty, moi byli studenci "trójke"

5. Jak znaleźć przbliżoną wartość liczby π mając ... podłogę i igłę ?

Podłoga zrobiona jest z idealnie równych desek o szerokości d. (Myślmy o arkuszu papieru w linie !).
Na podłogę rzucamy igłę o długości l, przy czym $l < d$. Zatem igła może przecinać/dotykać co najwyżej jedną linię (innymi słowy krawędź deski na podłodze).

Jaka obliczyć szanę, że losowo rzucona igła na podłogę przetnie linię ? Dla stwierdzenia czy igła przecina jakąś linię czy nie,

wystarczy znać jej położenie na podłodze wyznaczone przez:

$$x := \text{odleglość środka igły do bliższej z linii;}$$

$\phi :=$ kąt pod jakim igła lub jej przedłużenie przecina się z bliższą linią;

Wtedy wszystkie możliwe położenia igły odpowiadają parom (x, ϕ) takim, że $0 < x < d/2$ oraz $0 < \phi < \pi$. Pole tego prostokąta jest równe $\pi d/2$.

Natomiast aby igła przecinała (bliższą) linię musi zachodzić nierówność $x \leq \frac{l}{2}\sin\phi$. Jest to pole pod krzywą $x = \frac{l}{2}\sin\phi$, gdzie $0 < \phi < \pi$.

Pole to jest równe : $\int_0^\pi \frac{l}{2}\sin\phi\, d\phi = l$. Zatem

$$\text{p-stwo, że igła przecina prostą } = \frac{l}{\pi d/2} = \frac{2l}{\pi d}.$$

Jeśli w doświadczeniach frakcja rzutów kończących się przecięciem bliższej lini wynosi $\overline{x}$, to uzasadnionym jest oczekiwanie, że

$$\overline{x} \approx \frac{2l}{\pi d}; \quad \text{tzn.} \quad \pi \approx \frac{2l}{\overline{x} d}.$$

I po prawej stronie znamy wszystkie wielkości : $d, l, \overline{x}$, co pozwala oszacować wartość liczby π.

W literaturze powyższe zadanie nosi nazwę ZADANIE BUFFONA O IGLE. (z około 1735 r.; rozwiązane w 1777r.)

6. PODSUMOWANIE. (i) "moneta" w tytule dzisjeszego odczytu wykładzie jest synonimem (metaforą) wszystkich sytuacji, w których nie można przyjąć pełnego determinizmu fizycznego.
(ii) intuicyjnie przyjęte przez nas "prawo", że *zaobserwowane średnie wartości źbliżająśię do wartości oczekiwanej* wymaga sformalizowania i ... udowodnienia, w przyjętym modelu teorii prawdopodobieństwa. (**mocne prawo wielkich liczb.**) (SLLN)
(iii) "prawo średnich" jest prawem statystycznym !! NIGDY nie mamy pewności, że odpowiedź jest PRAWDZIWA !!! Ale potrafimy oszacować prawdopodobieństwo błędu; (**centralne twierdzenie graniczne.** CLT)
(iv) w przyrodzie, w tym w działalności człowieka, mamy bogactwo sytuacji, w którym nie ma pełnego determinizmu i zmuszeni jesteśmy do stosowania metod statystycznych i probabilistycznych; (np. mechanika kwantowa w fizyce;)
(v) Nagrodę Nobla w Ekonomii w 1997r. otrzymali R. C. Merton and M. S. Scholes za wzór $C = SN(d) - Le^{-rt}N(d - \sigma\sqrt{t})$, na wycenę tzw. opcji, który ukazał się w codziennym wydaniu gazety Ńew York Times"!

Na stronie internetowej

http://www.math.uni.wroc.pl/∼zjjurek

oprócz dzisiejszego wykładu są także:

(**i**) artykuł biograficzno-naukowy o twórcy teorii prawdopodobieństa A. N. Kołmogorowie z czasopisma dla nauczycielei matematyki (Hugo Steinhaus i Antoni Łomnicki mieli istototny wkład w powstanie współczesnej teorii prawdopodobieństwa !! Kazimierz Urbanik (mój Nauczyciel i patron Biblioteki Matemtyki i Informatyki UWr.) mówił: **"Kołmogorowi bezwzględnie należy się FINAŁ ale Steinhaus i Łomnicki byli w PÓŁFINALE tworzenia współczesnej probabilistyki")**

(**ii**) wykład inauguracyjny na UWr. w dn. 1 października 2013,pt. " Matematyczne zarządzanie ryzykiem-losowością"; z apelem "Wyłącz wiarę włącz myślenie"!

(**iii**) "Breslau/Wrocław - C.Neumann - E. Halley- Insurance - the most beautiful math equation-- sesja Wrocławskiej Akademii Młoduch Uczonych i Artystów.

DZIĘKUJĘ !!!! I zapraszam do studiowania nauk ścisłych !

Zbigniew J. Jurek