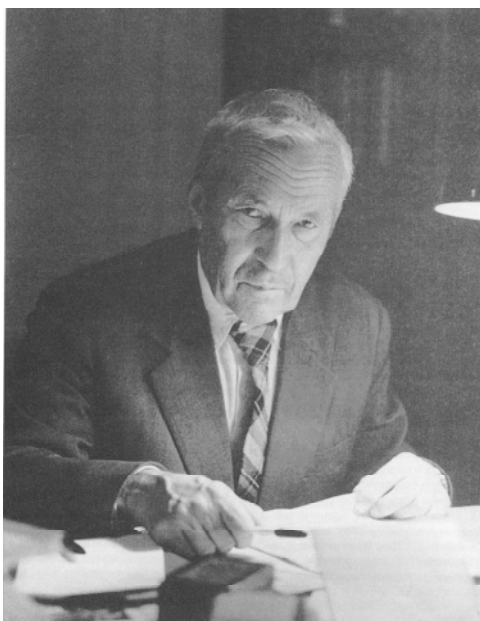




Andrej Nikołajewicz Kołmogorow (1903–1987)

TWÓRCA MATEMATYCZNEJ TEORII PRAWDOPODOBIENSTWA

W październiku bieżącego roku obchodzimy 25-lecie śmierci wielkiego matematyka rosyjskiego, Andrieja Kołmogorowa.



■ ZBIGNIEW J. JUREK

Choć losowość towarzyszy Człowiekowi od zawsze¹ i często swoje subiektywne decyzje próbował On opierać na tzw. ślepych losie², to matematyczna teoria zdarzeń losowych – teoria prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych – powstała dopiero w latach dwudziestych i trzydziestych XX wieku. Jej głównym twórcą i liderem wyznaczającym kierunki badań był rosyjski matematyk Andrej Nikołajewicz Kołmogorow. Jego niewielką, stustronicową książkę [2] *Podstawowe pojęcia teorii prawdopodobieństwa* z 1933 roku powszechnie uważa się za początek matematycznego rachunku prawdopodobieństwa. To, co było

¹ Ponad 2500 lat temu, w starożytnej Grecji, losowo wybierano osoby, które w danym dniu rozstrzygały handlowe spory na Agorze. W muzeum Stoaou Attalosa, w greckiej części Agory, w Atenach, można jeszcze dziś zobaczyć „maszynę do losowania”!

² Chrześcijaństwo od 2000 lat co roku słucha o losowym podziale szat ukrzyżowanego Jezusa.



do czasu Kołmogorowa, Joseph Doob (1910–2004), wybitny probabilista amerykański, nazywał „niematematyczną probabilistyką”.

Podkreślenia wymaga również i to, że Kołmogorow miał także fundamentalny wkład do niemal wszystkich dziedzin matematyki: analizy, algebry, topologii, teorii informacji, algorytmów, logiki, mechaniki, fizyki matematycznej (turbulencje), układów dynamicznych, teorii ergodycznej i innych. Rozwiązał on trzynasty problem Hilberta dowodząc, że funkcje ciągłe trzech zmiennych można wyrazić jako złożenie funkcji ciągłych o jednej i dwóch zmiennych.

W Rosyjskiej Encyklopedii Matematyki jest około 30 pojęć, faktów i twierdzeń noszących imię Kołmogorowa. Niewątpliwie Andrej Nikołajewicz należy do najwybitniejszych matematyków wszechczasów, obok takich jak F. Gauss, D. Hilbert, B. Riemann, I. Newton, J. von Neuman.

W niniejszym artykule oprócz wątków biograficznych koncentrujemy się jedynie na wkładzie Kołmogorowa we współczesną teorię prawdopodobieństwa i teorię procesów stochastycznych.

Dzieciństwo i szkoła średnia

Andrej Nikołajewicz urodził się w dniu 25 kwietnia w 1903 roku, w miejscowości Tambow, w Rosji. Jego niezamężna matka Maria Jakowlewna Kołmogorowa, zmarła przy porodzie. Andrej został adoptowany przez siostrę matki, Wierę Jakowlewną, i otrzymał jej nazwisko Kołmogorow. Ojciec jego, Mikołaj Matwiejewicz Katajew, z wykształcenia agronom i statystyk, był zesłany do Jarosławia za działalność w ruchach narodowo-rewolucyjnych. Tam poznał Marię Jakowlewną. Wydaje się, że nie miał on większego udziału w wychowaniu syna zwłaszcza, że praca jego wiązała się ciągłym podróżowaniem. Po Rewolucji Październikowej w 1917 roku był dyrektorem w Ministerstwie Rolnictwa. Ale już w 1919 roku zginął we walkach z armią Denikina – przeciwnikiem nowego ustroju.

Dzieciństwo Andrej spędził we wsi Tunoszna nad rzeką Wołgą, ok. 30 km od miasta Jarosław, w domu dziadków ze strony matki. Przez całe swoje życie z wielką miłością i głębokim szacunkiem mówił o swojej przybranej matce.

Trzy przybrane siostry (Maria, Wiera i Nadeżda) Kołmogorowa brały czynny udział w rewolucyjnym podziemiu i, jak wspominał on, kiedyś przy przeszukaniu ich domu nielegalną literaturę ukryto w jego kołysce. Z kolei ciotki Kołmogorowa zorganizowały małą, lokalną, ale no-



Wiera Jakowlewna i Andrej, 1909 r.



woczesną jak na tamte czasy i warunki, szkołę dla wiejskich dzieci. W tej to szkole po raz pierwszy mały Andrej zauważył jaką satysfakcję i przyjemność sprawiały mu „odkrycia” matematyczne. W wieku 5 czy 6 lat odkrył, że:

$$1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 3^2, 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2, \dots$$

W szkolnej gazetce zamieścił zadanie: *Na ile sposobów można przyszyć guzik z czterema dziurkami, gdy do przyszywania potrzebne są co najmniej dwie dziurki?*

W 1910 roku razem z matką przeprowadził się do Moskwy, gdzie rozpoczął naukę w prywatnym gimnazjum E.A. Repmana. Mimo że był jednym z najlepszych uczniów z matematyki, to jego pierwszym wyborem była biologia, a drugim historia Rosji. O nauczycielach swojej pierwszej formalnej szkoły mówił, iż to oni byli inspiracją jego przyszłych naukowych ambicji i dociekań.

Trudne politycznie i ekonomicznie lata 1918–1920, Kołmogorow wraz z innymi starszymi uczniami spędził na budowie kolei z Kazania do Jekaterynburga (obecnie Swierdłowski). Mimo ciężkiej pracy fizycznej nie zaniedbywał samodzielnych przygotowań do egzaminów końcowych szkoły średniej. Dyplom jej ukończenia uzyskał, po powrocie z budowy, w 1920 roku.

Uniwersytet Moskiewski 1920–1925 i 1925–1929

Jesienią 1920 roku Andrej Nikołajewicz Kołmogorow zapisał się (nie było egzaminów wstępnych) na kierunki fizyka i matematyka na Uniwersytecie Moskiewskim. Posiadając już znaczne przygotowanie z matematyki postanowił, że równolegle zapisze się też na metalurgię. Wspominał wiele lat później, że choć nigdy nie porzucił myśli o poświęceniu się naukom inżynierskim, to nie pamiętał dlaczego wybrał akurat metalurgię. Nie zapominał też o swoich zainteresowaniach historią Rosji. Na tę okoliczność czasami przypomina się następującą anegdotę. Otóż na Seminarium z Historii Rosji Kołmogorow przedstawił pracę (tezę) na temat własności nieruchomości w XIV–XVI wieku w Nowogrodzie. Tezę uzasadnił (statystycznym) bayesowskim rozumowaniem. Profesor tegoż seminarium miał powiedzieć: *Podaj Pan jeden dowód na poparcie swojej tezy, i w matematyce, którą Pan studiuje, być może to wystarczy, ale my historycy potrzebujemy co najmniej 10 dowodów.*

Będąc studentem Kołmogorow aktywnie uczestniczył w wielu seminariach i wykładach wybitnych matematyków rosyjskich. Słowo aktywnie jest tu zdecydowanie niewystarczające.

Zadanie (hipotezę) N.N. Łuzina o tym, że w kwadracie podzielonym na mniejsze (pod) kwadraty, dla każdej stałej C istnieje stała C' taka, że jeśli krzywa (w tym kwadracie) jest długości nie większej niż C to suma obwodów (pod) kwadratów, które ta krzywa dotyka jest nie większa niż C' , Kołmogorow rozwiązał negatywnie. Poprawność jego dowodu i konstrukcji sprawdził znany matematyk P.S. Uryshon. I na seminarium studenckim, w dniu 4 stycznia 1921 roku, A.N. Kołmogorow przedstawił publicznie swoje pierwsze znaczące osiągnięcie matematyczne.

Na jesieni tego samego roku, wskazał on lukę w dowodzie twierdzenia Uryshona o wymiarze topologicznym przestrzeni trójwymiarowych. Dowód został natychmiast

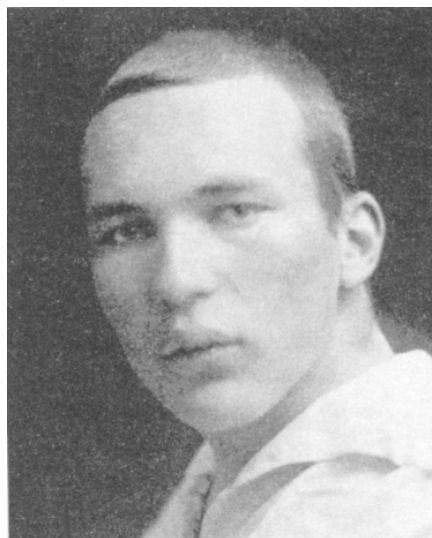


poprawiony przez autora, ale student Kołmogorow został zauważony jako wybitny talent matematyczny. W tym samym czasie, uczestnicząc w bardzo znanym seminarium N.N. Łuzina³ (potocznie w środowisku nazywanym Łuzytanią) Kołmogorow podał swoje słynne konstrukcje w teorii szeregów trygonometrycznych. M.in. podał przykład funkcji całkowalnej, której szereg trygonometryczny jest rozbieżny w każdym punkcie. Jego wkład w tę dziedzinę matematyki można szybko docenić przeglądając monografię [6] wybitnego polskiego matematyka Antoniego Zygmunda.

W 1924 r. będąc studentem czwartego roku udowodnił twierdzenie o trzech szeregach (więcej o tym powiemy poniżej), które obecnie jest w każdym podręczniku matematycznej teorii prawdopodobieństwa.

Rok później ukończył studia na Uniwersytecie Moskiewskim, gdzie też natychmiast rozpoczął studia doktoranckie pod kierunkiem wspomnianego N.N. Łuzina. W okresie tym jego badania były skupione na teorii prawdopodobieństwa. Niektóre z tych wyników są omówione poniżej.

W maju 1929 roku Kołmogorow ukończył studia doktoranckie mając w dorobku już 18 wybitnych prac naukowych.



Andrej Kołmogorow, 1925 r.

Dalsza kariera zawodowa

W czerwcu 1929 roku Kołmogorow został zatrudniony w Instytucie Matematyki i Mechaniki Uniwersytetu Moskiewskiego, z którym pozostał związanym na zawsze. Tam w 1931 roku został profesorem, a w 1933 powierzono mu stanowisko dyrektora Instytutu Matematycznego Uniwersytetu Moskiewskiego. Zajmował je do kwietnia 1939 roku i ponownie później w latach 1951–53.

Stopień naukowy doktora fizyki i matematyki został mu nadany w 1935 roku na podstawie zestawu opublikowanych prac. [Obecny system stopni naukowych w Rosji, w tym odpowiednik polskiej habilitacji, został wprowadzony w 1934 r.] W 1939 r. Kołmogorow został członkiem Akademii Nauk Związku Radzieckiego.

Z historycznego punktu widzenia interesujący jest fakt, że Kołmogorow, wspólnie z Pawłem Sergiejewiczem Aleksandrowem, w okresie od czerwca 1930 do marca 1931 odbył, niemal roczną, podróż naukową po Niemczech i Francji. W Getyndze odwiedzili, m.in. D. Hilberta, R. Couranta, L.D. Landaua i Emmy Noether. W Paryżu spot-

³ O N.N. Łuzinie i jego seminarium artykuł w „Matematyce” 8/2010.



Wręczenie Orderu Lenina

kali się z M. Frechetem i Paulem Lévy, który także wniósł fundamentalne osiągnięcia do teorii prawdopodobieństwa. Jego imieniem nazywamy dziś pewną klasę procesów stochastycznych.

Za znaczące osiągnięcia naukowe Kołmogorow otrzymał najwyższe odznaczenia i nagrody państwowe, w tym Bohatera Pracy ZSRR oraz siedmiokrotnie Order Lenina i inne. Był jednym z najbardziej wpływowych ludzi nauki w Związku Radzieckim, co pozwalało mu pomagać młodym i utalentowanym naukowcom.

A.N. Kołmogorow i matematyczna teoria prawdopodobieństwa

□ Paradoks Bertranda

We wspomnianej niematematycznej probabilistyce znane były paradoksy logiczne. Najsłynniejszym z nich jest tzw. paradoks Bertranda. Otóż na pytanie o prawdopodobieństwo tego, że „losowo” wybrana cięciwa w okręgu jednostkowym jest dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, można podać trzy „prawdziwe” odpowiedzi: $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ i $\frac{1}{2}$!

(a) Jeśli wybór cięciwy identyfikujemy z wylosowaniem jej środka (punktu w kole jednostkowym), to otrzymujemy odpowiedź $\frac{1}{4}$. Zauważmy bowiem, że punkty z koła



Willi Kołmogorowa w Komarowce



o promieniu $\frac{1}{2}$, umieszczonego centralnie w kole jednostkowym, dają – przy takim systemie losowania – cięciwy dłuższe od boku trójkąta równobocznego. Stosunek pól tych kół jest równy 1 : 4.

(b) Jeśli cięciwę będziemy wyznaczać przez kąt, jaki tworzy ona z prostą styczną do okręgu, w punkcie będącym jednym z końców tej cięciwy, to spośród wszystkich kątów od 0 do π , tylko kąty pomiędzy $\frac{1}{3}\pi$ a $\frac{2}{3}\pi$ dają cięciwy dłuższe niż bok trójkąta. Zatem prowadzi to do odpowiedzi $\frac{1}{3}$.

(c) Ale wybór cięciwy można także identyfikować z wyborem punktu jej przecięcia z średnicą tego okręgu, prostopadłą do tej cięciwy. Wtedy z przedziału (0; 2) (średnica) tylko punkty z podprzedziału $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ dają cięciwy dłuższe niż bok trójkąta. Stąd odpowiedzią jest $\frac{1}{2}$.

Która odpowiedź jest zatem prawdziwa?

Ten i inne podobne „paradoksy” powodowały, że rachunek prawdopodobieństwa nie miał prawa wstępu na „salony” matematyki. Kołmogorow, opierając się między innymi na pracach polskich matematyków Hugona Steinhausa i Antoniego Łomnickiego, zaproponował aby zjawiskom losowym najpierw przypisywać ich modele matematyczne, i w przyjętym modelu znajdować odpowiedzi na stawiane pytania. Taki model to trójka $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie Ω to pewien zbiór elementów (tzw. zdarzeń elementarnych), $\mathcal{F}$ to rodzina podzbiorów zbioru Ω (tzw. zdarzeń losowych)⁴, zaś $P: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ to funkcja prawdopodobieństwa, która każdemu wydarzeniu losowemu A przypisuje liczbę $P(A)$ z odcinka $[0, 1]$ w taki sposób, że $P(\Omega) = 1$ i wartość P na sumie ciągu zdarzeń losowych parami rozłącznych jest równa sumie wartości na poszczególnych zdarzeniach⁵.

Istnienie takich trójek (modeli matematycznych) nazywanych przestrzeniami probabilistycznymi lub przestrzeniami Kołmogorowa, nie jest oczywiste. Na prostej rzeczywistej miara Lebesgue’a I_1 , będąca uogólnieniem pojęcia długości odcinka, a na płaszczyźnie miara Lebesgue’a I_2 , będąca uogólnieniem pojęcia pola, są przykładami funkcji zbiorów spełniających warunek przeliczalnej addytywności z przypisu 5, na odpowiednio dobranych σ -algebrach. Dla prostoty tego artykułu pominiemy dyskusję sposobów ich wyboru.

⁴ Dokładniej, $\mathcal{F}$ to σ -algebra podzbiorów zbioru Ω , tzn., że

- (i) rodzina $\mathcal{F}$ jest niepusta ($\Omega \in \mathcal{F}$);
- (ii) jeśli $A \in \mathcal{F}$ to jego dopełnienie $A^C \in \mathcal{F}$;
- (iii) dla każdego ciągu zdarzeń losowych $A_1, A_2, \dots$ (tzn: $A_j \in \mathcal{F}$) ich suma $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots$ też jest zdarzeniem czyli należy do rodziny $\mathcal{F}$.

⁵ Dla każdego ciągu zdarzeń losowych $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ parami rozłącznych żądamy aby

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) + \dots$$



Stosując paradygmat Kołmogorowa do zadania o cięciwie, widzimy, że wszystkie odpowiedzi są poprawne, ale w różnych modelach matematycznych fizycznego zjawiska losowania cięciwy. Wybór odpowiedniego modelu i jego konstrukcja są oddzielnymi zagadnieniami matematycznymi.

W rozwiązaniu (a) $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$ oraz $P(A) = I_2(A)/\pi$. (Dzielimy przez π aby spełniony był warunek, że $P(\Omega) = 1$). Wtedy zdarzenie $B = \{(x, y) : x^2 + y^2 < \frac{1}{2}\}$ opisuje dokładnie te sytuacje, w których cięciwy są dłuższe od boku trójkąta równobocznego wpisanego w okrąg. Stąd $P(B) = \frac{1}{4}$.

W (b), gdy $\Omega = (0, \pi)$ i $P(\cdot) = I_1(\cdot)/\pi$, otrzymujemy odpowiedź $\frac{1}{3}$. W (c) przyjęliśmy $\Omega = (0, 2)$ i $P(\cdot) = I_1(\cdot)/\pi$, co dało z kolei odpowiedź $\frac{1}{2}$.

□ Rzut monetą i jego model matematyczny

Gdy wykonujemy wiele kolejnych rzutów (uczciwą) monetą, dosyć naturalne jest oczekiwanie, że częstotliwość występowania orłów (ilość orłów w n rzutach, podzielona przez n) winna przybliżać się do $\frac{1}{2}$. Jak wybrać model matematyczny, a następnie (spróbować) udowodnić w nim naszą hipotezę?

Zauważmy, że ciąg rzutów: O (orzeł), O, O, O, O, O, ... (same orły) daje kolejne częstotliwości równe 1, 1, 1, ... Natomiast wynik (reszka), R, R, R, R, R, ... (same reszki) daje częstotliwości 0, 0, 0, 0, ...! Widać więc, że nie dla wszystkich możliwych ciągów dostajemy w granicy $\frac{1}{2}$.

Kluczowym dla naszego zadania jest spostrzeżenie, że przyporządkowanie ciągów (1) O, O, O, R, O, R, R, O, O... ciągu 0,111010011... gdzie O (orzeł) zastępujemy przez 1 (jedynekę) zaś R(reszka) przez 0 (zero), jest wzajemnie jednoznaczne. Dopisując zero przed przecinkiem, ciąg zero-jedynkowy możemy uważać za rozwinięcie liczby z przedziału $[0, 1]$ w systemie dwójkowym. Ciąg (1) to liczba

$$x = \frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{2^9} + \dots$$

Jako model przyjmujemy: $\Omega = [0, 1]$, $P(A) = I_1(A)$ (miara Lebesgue'a) dla $A \subset [0, 1]$. Definiując funkcje $\xi_j: \Omega \rightarrow \{0, 1\}$ (dwie wartości), gdzie $\xi_j(x) = j$ -ta cyfra w rozwinięciu dwójkowym liczby x , zauważamy, że częstotliwość występowania orła, przy wybranej liczbie x , to ciąg

$$(2) \quad (\xi_1(x) + \xi_2(x) + \dots + \xi_n(x))/n,$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$. Dla jak wielu $x \in [0, 1]$ powyższy ciąg jest zbieżny do $\frac{1}{2}$? Równoważnie, w jak wielu nieskończonych ciągach rzutów monetą zaobserwujemy częstotliwość $\frac{1}{2}$ występowania orła?

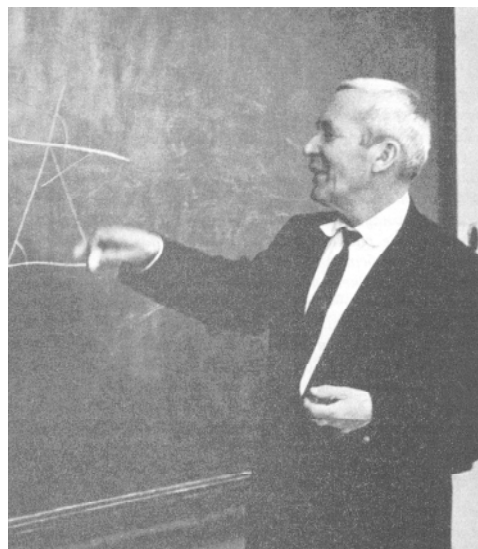
Na to pytanie odpowiada następujące twierdzenie Borela:

$$(3) \quad I_1\left(\left\{x \in [0, 1] : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\xi_1(x) + \xi_2(x) + \dots + \xi_n(x)}{n} = \frac{1}{2}\right\}\right) = 1$$



Choć „długość” (miara Lebesgue’a) określonego w (3) podzbioru odcinka $[0; 1]$, na którym częstotliwości w granicy są równe $1/2$, jest równa jeden, to ten podzbiór nie zawiera na przykład wszystkich liczb wymiernych. Liczby wymierne mają skończone rozwinięcia w systemie dwójkowym, tzn. dla wymiernej liczby q , $\xi_j(q) = 0$ poza skończoną ilością j .

Borel udowodnił coś znacznie więcej! A mianowicie, że miara Lebesgue’a zbioru liczb z odcinka $[0,1]$, których cyfry w systemie N -kowym (nie tylko dwójkowym, ale też trójkowym itd.) mają w granicy częstotliwość równą $1/N$, wynosi 1! Wacław Sierpiński podał efektywnie przykład liczby o tej własności. W systemie dziesiętkowym ma ona następujący zapis: $0,1234567891011121314151617181920212223\dots$, gdzie po przecinku występują wszystkie kolejne liczby naturalne.



Na wykładzie

□ Mocne prawo wielkich liczb Kołmogorowa

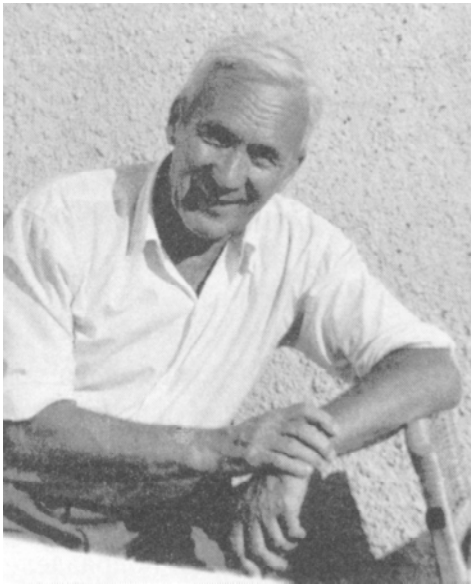
Własność opisana w (3) nie jest szczególną własnością miary Lebesgue’a i funkcji ξ_j . Kołmogorow udowodnił, że na każdej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, każdy ciąg zmiennych losowych X_j stochastycznie niezależnych⁶ o tym samym rozkładzie prawdopodobieństwa i skończonej wartości oczekiwanej m spełnia *mocne prawo wielkich liczb* (strong law of large numbers (SLLN)). To znaczy, że

$$(4) \quad P\left(\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1(\omega) + X_2(\omega) + \dots + X_n(\omega)}{n} = m\right\}\right) = 1$$

Innymi słowami mówimy, że z *prawdopodobieństwem 1* (albo *prawie zawsze*) średnie arytmetyczne ze stochastycznie niezależnych obserwacji zbiegają do wartości oczekiwanej m (nadzieja matematyczna). „Z prawdopodobieństwem 1” niekoniecznie ozna-

⁶ Jest to jedno z najbardziej podstawowych pojęć teorii prawdopodobieństwa i bardzo często nierozumiane. Formalnie oznacza ono, że dla każdego skończonego zbioru liczb naturalnych $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ i każdego skończonego zbioru liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_m$, zachodzi równość:

$$\begin{aligned} P(\{\omega \in \Omega : X_{k_1}(\omega) \leq a_1, X_{k_2}(\omega) \leq a_2, \dots, X_{k_m}(\omega) \leq a_m\}) &= \\ = P(\{\omega \in \Omega : X_{k_1}(\omega) \leq a_1\}) \cdot P(\{\omega \in \Omega : X_{k_2}(\omega) \leq a_2\}) \cdot \dots \cdot P(\{\omega \in \Omega : X_{k_m}(\omega) \leq a_m\}) & \\ \text{(tzw. reguła mnożenia prawdopodobieństw).} \end{aligned}$$



Na wakacjach

Przykład: Szereg harmoniczny $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ jest rozbieżny. Ale już szeregi $1 \pm \frac{1}{2} \pm \frac{1}{3} + \dots \pm \frac{1}{n} \pm \dots$ gdzie znaki $\pm$ są wstawiane „losowo”, na przykład: $+1$ gdy w rzucie monetą otrzymujemy orła oraz -1 w przypadku otrzymania reszki, są zbieżne z prawdopodobieństwem 1. Jest to prosty wniosek z kryterium Kołmogorowa o trzech szeregach.

□ Twierdzenie Kołmogorowa o zgodnych rodzinach rozkładów

Botanik angielski Robert Brown (ok. 1825) zaobserwował chaotyczne ruchy mikroskopijnych drobin w cieczach, co powszechnie teraz określa się jako ruchy brownowskie. Marian Smoluchowski, a w szczególności Albert Einstein, jako pierwsi to zjawisko fizyczne opisali na gruncie mechaniki statystycznej. Ścisłą matematyczną konstrukcję takiego procesu podał Norbert Wiener⁷. Twierdzenie Kołmogorowa o zgodnych rodzinach miar jest fundamentalne dla matematycznej teorii procesów stochastycznych, a w tym dla procesu Wienera ($W_t, t \geq 0$), który jest matematycznym modelem ruchów brownowskich.

□ Warunkowe prawdopodobieństwo i warunkowe wartości oczekiwane

W książce [2] podana jest definicja warunkowego prawdopodobieństwa i warunkowej wartości oczekiwanej zmiennej losowej względem innej zmiennej losowej, a nie, jak to definiowano wcześniej, tylko względem zdarzenia losowego. Pomysł ten

cza „zawsze”. Na przykład w podzbiorze (3) odcinka jednostkowego, nie ma liczb wymiernych ale jego prawdopodobieństwo (miara Lebesgue’a) jest dalej równa 1.

□ Twierdzenie Kołmogorowa o trzech szeregach

Kołmogorow wykazał, że dla każdego ciągu $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ stochastyczne niezależnych zmiennych losowych szereg $X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots$ jest albo zbieżny z prawdopodobieństwem 1 albo zbieżny z prawdopodobieństwem 0 (tzw. prawo zero-jedynkowe Kołmogorowa). Kołmogorow podał też proste kryterium, w formie zbieżności trzech szeregów liczbowych, na to aby szereg $X_1 + X_2 + \dots + X_n + \dots$ był zbieżny z prawdopodobieństwem 1.

⁷ Postać Norberta Wienera była przedstawiona w Matematyce nr 7 Lipiec/Sierpień 2011.



obejmuje przypadek zdarzenia losowego, ale też o wiele więcej. Warunkowe wartości oczekiwane względem σ -algebr zdarzeń losowych pozwoliły J. Doobowi wprowadzić bardzo ważne pojęcie martyngału⁸. Obecnie martyngały są podstawowym narzędziem matematyki finansowej, które wykorzystali R. Merton i B. Scholes⁹.

□ Procesy stochastyczne, a w szczególności procesy Markowa

W pracy [1] o metodach analitycznych w rachunku prawdopodobieństwa Kołmogorow dał matematyczne podstawy dla procesów stochastycznych, a w szczególności dla procesów Markowa. Procesy stochastyczne to matematyczne modele zjawisk losowych zmieniających się w czasie. Choć na ogół nie mamy, albo wręcz nie możemy mieć, stochastycznej niezależności, to zachodzą jednak dla nich twierdzenia typu mocnych praw liczb czy centralnych twierdzeń granicznych.

Już w latach 40-tych XX wieku, w Japonii Kyoshi Ito (1915–2008), opierając się na osiągnięciach Kołmogorowa zapoczątkował analizę stochastyczną, która ma zaskakująco inne własności niż analiza deterministyczna. Na przykład dla procesu Wienera $W(t)$, wspomnianego wyżej, zachodzi równość:

$$2 \int_0^t W(s) dW(s) = W^2(t) - t,$$

podczas gdy dla deterministycznej funkcji $u(t)$ znikającej w zerze powyższa całka jest równa $u^2(t)$. Ale ta „dziwna” analiza stochastyczna święci obecnie triumf w matematyce finansowej (wycena opcji finansowych), w fizyce i w biologii.

□ Kołmogorow: kształcenie matematyków i zdolnej młodzieży

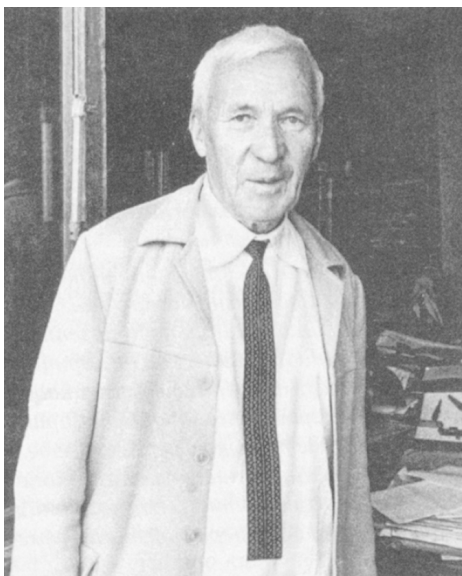
Ten genialny uczony znajdował czas, aby podejmować się obowiązków nauczyciela szkoły średniej. Już jako 19-latek w trudnych latach 1922–25 uczył matematyki i fizyki w szkole średniej i nawet był sekretarzem rady szkoły.

W 1963 roku decyzją władz państwowych, w Związku Radzieckim utworzono cztery specjalne szkoły średnie dla utalentowanej młodzieży: w Moskwie, w Leningradzie, w Kijowie i w Nowosybirsku. Szkoła nr 18 w Moskwie była nierozłącznie związana z nazwiskiem Kołmogorowa. Przez 15 lat nie tylko uczył tam, ale opiekował się też uczniami. Pisał im opinie i jeździł z nimi na obozy wakacyjne i naukowe. Jeszcze dziś mówi się o niej jako „o szkole Kołmogorowa”, a nie o szkole nr 18.

W 1956 roku Kołmogorow zainicjował powstanie nowego czasopisma poświęconego probabilistyce *Teoria Vjerojatnostiej i jej Primienienia*, które od samego początku było i jest jednym z najbardziej prestiżowych czasopism probabilistycznych. Obecnie nosi ono imię swojego założyciela.

⁸ Termin „martyngał” znany jest dla amatorów wyścigów konnych. Jest to nazwa paska z uprzęży, który pozwala kontrolować ruchy konia.

⁹ R. Merton i B. Scholes w 1995 roku otrzymali Nagrodę Nobla za wyniki dotyczące matematycznej wyceny opcji finansowych.



Pod koniec życia

A.N. Kołmogorow miał ogromny wpływ na rozwój matematyki również przez kształcenie doktorantów. Miał ich ponad pięćdziesięciu, w tym byli późniejsi tacy uczeni jak I.M. Gelfand, A.I. Malcev, V.I. Arnold, J.V. Prochorow, B.V. Gniedenko, R.L. Dobruszyn, V.M. Zołotariew, E.B. Dynkin, A.N. Szirjajew (Shiryaev). Można śmiało powiedzieć, że Moskwa przez lata była światową stolicą probabilistyki, a i dziś jest jednym z kilku wiodących ośrodków, choć formy jej oddziaływania i kontakty są już inne.

Łączny dorobek naukowy Kołmogorowa obejmuje ponad 500 artykułów matematycznych, książek i haseł w encyklopediach naukowych. Pełna bibliografia jest zamieszczona w artykule [3].

□ Kołmogorow... człowiek

Wspomnienia dzieciństwa spędzonego nad Wołgą i bliski kontakt z przyrodą były bardzo ważne w całym jego późniejszym życiu. Aktywnie uprawiał sport, w tym pływanie, żeglownictwo, narciarstwo, wspinaczkę wysokogórską. Lato 1929 roku, wspólnie ze swoim najbliższym przyjacielem Pawłem Sergejewiczem Aleksandrowem, spędził żeglując ponad 1000 km Wołgą, aby zakończyć rejs po Morzu Czarnym i wędrowką w górach Kaukazu. I nie były to tylko wakacje ale też czas intensywnych prac naukowych i przygotowywania publikacji.

Przyjaźń z Aleksandrowem przetrwała „zasy burzy i naporu”. I o ile on, Kołmogorow, jako matematyk mógł zaistnieć samodzielnie, o tyle to, jakim stał się człowiekiem: znawcą sztuki, koneserem muzyki i wielbiciele literatury, zawdzięcza właśnie swojemu najlepszemu przyjacielowi Aleksandrowowi.

Od połowy lat trzydziestych Kołmogorow miał słynną daczę (willę) – Komarowka – pod Moskwą. Była ona miejscem wielu dyskusji i spotkań naukowych. Zaproszenie do Komarowki było formą nobilitacji ze strony jej gospodarza. Do legendy przeszły jego regularne wędrowki piesze z gośćmi, doktorantami i kolegami. A było to często 20, 30 i więcej kilometrów.

Na ścianie w swoim gabinecie w Komarowce, Kołmogorow umieścił słynny cytat *Ludzie są okrutni, ale człowiek jest dobry*¹⁰ wiele mówiący o nim jako człowieku.

¹⁰ Men are cruel but Man is kind – to cytat z książki *Stray Birds* pisarza i poety indyjskiego Rabindranatha Tagore.



W 1942 roku Kołmogorow ożenił się z rozwiedzioną wówczas, koleżanką z lat szkolnych, Anną Dmitriewną Jegorow. Oprócz przybranego wtedy 15-letniego syna Olega, nie mieli innych dzieci.

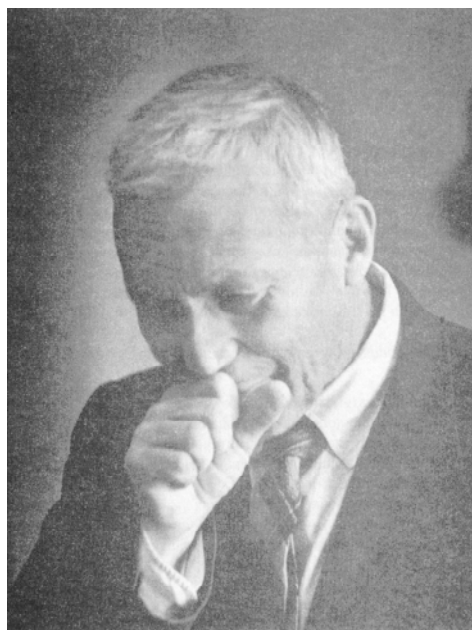
Ostatnie lata życia naznaczone były walką z postępującą chorobą Parkinsona. W końcowych dramatycznych miesiącach była to utrata mobilności, wzroku i ograniczenia mowy. Ale, jak wspominał jego uczeń Albert N. Szirjajew, świadomość i jasność umysłu pozostała do końca i na tę okoliczność przytoczył ostatnią swoją z nim rozmowę: *Gdzie ja jestem teraz? – na oddziale Chorób płuc. Dlaczego? – Są jakieś kłopoty z płucami. Jakie są tego konsekwencje? – Zostaniesz tu jakiś czas, aby wrócić do domu ze zdrowymi płucami. – No to w porządku.*

Andrzej Nikołajewicz Kołmogorow zmarł w Moskwie, 20 października 1987 roku o godzinie 2 po południu.

Związki Kołmogorowa z polską matematyką i matematykami

Interesujący jest fakt, że Kołmogorow swoje trzy pierwsze prace z lat 1922 i 1923 opublikował w polskich czasopismach, w *Fundamenta Mathematicae* i w *Biuletynie Polskiej Akademii Nauk*. W słynnej, opisaney powyżej książce [2], Kołmogorow cytował prace tylko 14 autorów, w tym dwóch Polaków: Antoniego Łomickiego¹¹ i Hugona Steinhausa¹². Obaj byli blisko matematycznej teorii prawdopodobieństwa opartej na pojęciu miary, całki i funkcji mierzalnych. Kazimierz Urbanik zwykł mawiać, że w wyścigu do aksjomatycznej teorii prawdopodobieństwa „finał należał do Kołmogorowa, ale Łomicki i Steinhaus doszli do półfinału.”

Po roku 1945 wielu polskich matematyków wizytowało i odbywało staże naukowe w Związku Radzieckim. W 1956 roku przez jeden semestr u Kołmogorowa był Kazimierz Urbanik (promotor mojej rozprawy doktorskiej). W trakcie pobytu rozwiązał on problem postawiony przez Kołmogorowa dotyczący teorii informacji. A w 1962 roku na Uniwersyte-



Zamyślony...

¹¹ Antoni Łomicki, zamordowany przez Niemców we Lwowie, wymieniony jest na tablicy pomnika Nasz Los Przestroga, na pl. Grunwaldzkim, we Wrocławiu.

¹² Sylwetka H. Steinhausa zamieszczona jest w Matematyce Nr 1, styczeń 2012.



cie Wrocławskim utworzono pierwszą w Polsce Katedrę Teorii Prawdopodobieństwa pod kierunkiem Urbanika. W jakimś sensie można uważać Kołmogorowa za ojca chrzestnego – inicjatora powojennej wrocławskiej probabilistyki.

Wśród bardzo wielu społecznych, naukowych i matematycznych wyróżnień międzynarodowych wymienimy tylko trzy związane z Polską. I tak w 1956 roku A.N. Kołmogorow został członkiem zagranicznym Polskiej Akademii Nauk. Dwa lata później Uniwersytet Warszawski nadał mu godność doktora honoris causa, a promotorem w tym postępowaniu był, wspomniany już, Wacław Sierpiński. W 1975 roku Kołmogorow otrzymał dyplom honorowego członka Polskiego Towarzystwa Matematycznego.

Podziękowanie. Serdeczne podziękowania składam Albertowi Shiryayevowi, (Szirajajewowi) którego artykuł [4] i przysłana mi książka [3], były kanwą dla niniejszego opracowania.

Post scriptum. Osobiście spotkałem A.N. Kołmogorowa tylko raz, w 1977 roku uczestnicząc w II Światowej Konferencji z Teorii Prawdopodobieństwa i Statystyki Matematycznej w Wilnie, gdzie przedstawiłem wyniki mojego doktoratu. 33 lata później na X Konferencji Wileńskiej miałem zaproszony wykład na temat mojej hipotezy dotyczącej reprezentacji całkowitych miar probabilistycznych; [5].

ZBIGNIEW J. JUREK

###

LITERATURA

- [1] A.N. Kołmogorow (1931), *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, (O analitycznych metodach rachunku prawdopodobieństwa) Math. Ann. vol. 104, 415–458.
- [2] A.N. Kołmogorow (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. (Podstawowe pojęcia teorii prawdopodobieństwa) Springer, Berlin. (Rosyjskie wydanie 1936; angielskie wydanie Chelsea, New York 1950 i drugie angielskie 1956; drugie rosyjskie wydanie 1974.
- [3] A.N. Shiryayev i N.G. Chimczenko (Redaktorzy) (2003), *Kołmogorow, wydanie jubileuszowe w trzech księgach*, Fizmatlit, Moskwa (w j. rosyjskim).
- [4] A.N. Shiryayev (1989), *Kolmogorov: life and creative activities*, The Annals of Probability, vol. 17, s. 866–944. (Decyzją Council of the Institute Mathematical Statistics (USA) powyższy tom był dedykowany pamięci i dorobkowi A.N. Kołmogorowa).
- [5] Z.J. Jurek (2011), *The Random Integral Representation Conjecture: a quarter of a century later*, Lithuanian Mathematical Journal, vol. 51 no 3, 361–369.
- [6] A. Zygmund (1959), *Trigonometric series 1, 2*, 2nd ed. Cambridge Uni. Press Cambridge.