Wykład inauguracyjny
na Uniwersytecie Wrocławskim
Październik 2013

Zbigniew Jan Jurek

Matematyczne zarządzanie ryzykiem — losowością

(*The Mathematics of Risk and Randomness*)

Wykład inauguracyjny
na Uniwersytecie Wrocławskim
Październik 2013

O, Aulo Leopoldyńska, tyś naszą Świątynią Wiedzy i Nauki,
o czym przekonać się może każdy ignorant,
o ile tu trafi taki
(inaczej nigdy się nie dowie, ile stracił...)

Aula Leopoldyńska była świadkiem ważnych wydarzeń w moim życiu studenckim i zawodowym. Jako nastolatek w 1962 r. byłem tu na szkolnej wycieczce. Pamiętam, że oszołomiony wystrojem Auli nie wiedziałem, czy nie jestem aby w świątyni, bo klęczników (podnóżków) nigdy wcześniej poza kościołem nie widziałem! W 1967 r. otrzymałem tu indeks studenta Uniwersytetu Wrocławskiego, aby już w pamiętnym Marcu '68, niesiony wielkimi emocjami i nadziejami, spędzić w Auli dwie noce w czasie strajków studenckich. Także tu, w roku 1972 otrzymałem dyplom magisterski, a pięć lat później profesor Kazimierz Urbanik[1], mój mistrz i promotor, a także Rektor Uniwersytetu, wręczył mi dyplom doktora nauk matematycznych. W 1996 r. moja rola się odmieniła i to ja wręczyłem dwa dyplomy doktorskie.

I wreszcie dziś spotyka mnie tu ogromny zaszczyt przedstawienia wykładu inauguracyjnego, który w moim zamierzeniu ma przybliżyć i uświadomić Państwu wszechobecną losowość. Cieszę się tym bardziej, bo w tym roku ogólnoświatowa społeczność matematyków obchodzi trzechsetlecie wydania fundamentalnego dzieła *Ars Conjectandi* Jakuba Bernoullego[2]. A właśnie s z t u k a p r z e w i d y w a n i a jest motywem głównym mojego wykładu.

1. Ale zacznijmy od słów...

Wielu, także tu dziś obecnych, twierdzić będzie, że rozumie takie słowa, jak: losowość, próba losowa, błąd statystyczny, niezależ-

[1] Kazimierz Urbanik (1930–2005), jeden z najwybitniejszych polskich matematyków drugiej połowy XX w. Rektor Uniwersytetu Wrocławskiego w okresie 1975–1981 i przez ponad 25 lat dyrektor Instytutu Matematycznego. Jego imię nosi biblioteka Wydziału Matematyki i Informatyki. Założyciel i redaktor naczelny międzynarodowego czasopisma „Probability and Mathematical Statistics" (PMS), wydawanego obecnie przez Uniwersytet i Politechnikę Wrocławską. Od br. PMS jest na „filadelfijskiej liście czasopism". Zob. www.math.uni.wroc.pl/~pms.

[2] J. Bernoulli, *Opus posthumum*, Basel 1713.

ność obserwacji, wnioskowanie statystyczne, poziom ufności, miara, prawdopodobieństwo, zwarty, grupa itp. W potocznej warstwie językowej pewnie tak, ale czy rozumiemy je jako jednoznaczne terminy i pojęcia funkcjonujące w matematyce?

Uważam, że rację ma Wilhelm Johannsen, który w 1910 r., przed Amerykańskim Stowarzyszeniem Przyrodników, powiedział: „Jest powszechnie uznanym faktem, że język jest nie tylko naszym sługą, który umożliwia nam wyrażanie — lub skrywanie — naszych myśli, ale może być również naszym panem krępującym nas za pomocą znaczeń przypisywanych poszczególnym słowom. Z tej przyczyny pożądane jest tworzenie nowej terminologii we wszystkich dziedzinach... Proponuję wprowadzenie podstawowych terminów »gen« i »genotyp« oraz dalszych takich jak »fenotyp« i »biotyp«, które byłyby używane w genetyce”[3].

Z ubiegłorocznego wykładu inauguracyjnego profesora Otlewskiego[4] pamiętamy, że terminy „gen”, „genotyp” są do dziś powszechnie używane i jednoznacznie rozumiane w biologii, mimo że upłynęło ponad sto lat.

A oto inny cytat: „Dobrze znasz matematykę i wiem, że i teraz studiujesz... Otóż, zacznij jej wykładać całki, jak Boga kocham nie żartuję, mówię serio, jej będzie zupełnie wszystko jedno; będzie na ciebie patrzyła i wzdychała, i tak przez okrągły rok... Ale pamiętaj, o miłości ani mru-mru...”. Tak! To Razumichin do Zosimowa (o Praskowii Pawłownie) w *Zbrodni i karze* Fiodora Dostojewskiego[5]. Czytelnik-humanista może zapytać: Cóż u licha mają w sobie te całki? A jeśli zna on też pierwotne znaczenie całki jako dziewicy, to może już kompletnie „odlecieć” w inne, niewłaściwe rejony swojej „duszy”[6].

Zatem w debacie medialnej, w debacie różnych środowisk, w wykładzie adresowanym do szerokiego grona słuchaczy, bardzo ważne jest, abyśmy jednakowo rozumieli terminy i słowa, których wzajemnie używamy!

[3] R. Dawkins, *Ewolucja myślenia*, red. A. Grafen, M. Ridley, Gliwice 2008 (wyd. oryg.: Richard Dawkins — *How a Scientist Changed the Way We Think*, Oxford 2006).

[4] J. Otlewski, *O DNA, genach i medycynie molekularnej*, Wrocław 2012.

[5] F. Dostojewski, *Zbrodnia i kara*, Wrocław 1997, s. 184.

[6] Niestety, to właśnie Janowi Śniadeckiemu zawdzięczamy te „dziewice” w matematyce. Na szczęście jego termin „rachunek chybi trafi” na określenie rachunku prawdopodobieństwa trafił do językowego lamusa!

2. Na początku był... wektor losowy

Jak w Leopoldinum mówić o matematyce, bez tablicy czy komputera, tym bardziej będąc świadomym tego, o czym przestrzegł Paul Dirac[7]: „W nauce ścisłej próbujemy w sposób zrozumiały dla wszystkich opowiedzieć o tym, o czym nikt wcześniej nie wiedział. A w poezji — wręcz odwrotnie”[8].

Każdy z nas pojawił się gdzieś (miejsce urodzenia X_1), w jakimś czasie (data urodzenia X_2), będąc potomkiem płci męskiej lub żeńskiej (X_3), z jakąś wagą (X_4) i długością (X_5)[9]. Czyli na początku naszego istnienia opisano nas wektorem losowym.

Oczywiście, można dodawać wiele innych trudnych do zdeterminowania naszych cech, ale w dzisiejszych czasach tradycyjnie rodzice otrzymują tylko płeć, długość (która z czasem zamieni się we wzrost) i wagę (w późniejszym czasie zwykle za dużą!).

Ale to nie my, dzisiejsi mieszkańcy Ziemi, byliśmy pierwszymi, którzy zmagali się z losowością! W każdej kulturze Człowiek odwoływał się i wykorzystywał „ślepy los”. W Muzeum Stoatou Attalosa, w greckiej części Agory, w Atenach, oprócz powszechnie znanych pozostałości sądów skorupkowych, o których tak chętnie mówią prawnicy na całym świecie, jest też, sprzed dwóch i pół tysiąca lat, „maszyna” do losowania składu sądu rozstrzygającego spory na Agorze! Chrześcijanie zaś od dwóch tysięcy lat słuchają o rzucie kośćmi, mającym zdecydować, jak podzielić szaty ukrzyżowanego Jezusa!

Choć w wielu sytuacjach dnia codziennego człowiek spotykał się ze zjawiskami i sytuacjami, w których deterministyczne prawa zawodziły, to nowoczesny i powszechnie akceptowany paradygmat teorii prawdopodobieństwa pochodzi z 1933 r. Zawdzięczamy go wybitnemu matematykowi rosyjskiemu A.N. Kołmogorowowi[10]. Choć tu warto

[7] Paul Dirac (1902–1984), fizyk angielski, który w 1933 r., wspólnie z Erwinem Schroedingerem, otrzymał Nagrodę Nobla.

[8] „In science one tries to tell people, in such a way as to be understood by everyone, something that no one ever knew before. But in poetry it's the exact opposite”.

[9] Mamy więc pięciowymiarowy wektor (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5) z losowymi współrzędnymi.

[10] Z.J. Jurek, *Andrej Nikołajewicz Kołmogorow (1903–1987), twórca matematycznej teorii prawdopodobieństwa*, „Matematyka” 2012, nr 8, s. 2–14. Artykuł ten jest także na stronie www.math.uni.wroc.pl/~zjjurek.

wspomnieć, iż Polacy Hugo Steinhaus[11] i Antoni Łomnicki[12] mieli ogromny wkład w budowę współczesnej probabilistyki. Wspomniany Kazimierz Urbanik, używając terminologii sportowej, zwykł nam mówić, że: „Kołmogorow osiągnął finał, ale Polakom należy się półfinał".

Otóż Kołmogorow zaproponował, aby ze zjawiskiem losowym stowarzyszać jego model probabilistyczny (model matematyczny). Taki model to tak zwana trójka kołmogorowowska $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (inaczej — przestrzeń probabilistyczna): zbiór Ω (tak zwana przestrzeń zdarzeń elementarnych), rodzina $\mathcal{F}$ podzbiorów Ω (elementy A z $\mathcal{F}$ nazywamy zdarzeniami losowymi) i funkcja prawdopodobieństwa P, która zdarzeniom losowym A z $\mathcal{F}$ przyporządkowuje liczbę $P(A)$ z przedziału $[0, 1]$, która określa prawdopodobieństwo zdarzenia A.

Na sformułowane pytanie dotyczące zjawiska losowego odpowiada się w przyjętym modelu matematycznym. Jednak trzeba pamiętać, że wybór modelu matematycznego nie jest ani łatwy, ani jednoznaczny. W przeszłości przedkołmogorowowskiej prowadziło to do wielu paradoksów. Najsłynniejszym z nich jest chyba paradoks Bertranda, w którym na zadane pytanie można podać trzy poprawne odpowiedzi![13] Stąd między innymi probabilistyka przez wieki nie miała należnego jej miejsca w świecie nauki, choć w sytuacjach codziennych, w tym szczególnie w grach hazardowych, ciągle stawiano pytania, na które nie było jednoznacznych odpowiedzi. Ale też przypomnijmy — w starożytnym Egipcie na społeczne zapotrzebowanie mierzenia pól, powierzchni czy objętości stworzono geometrię, z której elementami wszyscy do dziś spotykamy się w szkole średniej!

[11] Hugo Steinhaus (1887–1972), jeden z najwybitniejszych przedstawicieli słynnej lwowskiej szkoły matematycznej, po drugiej wojnie światowej profesor Uniwersytetu Wrocławskiego i pierwszy dziekan Wydziału Matematyki, Fizyki i Chemii. Zob. R. Duda, *Lwowska szkoła matematyczna*, Wrocław 2007.

[12] Antoni Łomnicki (1881–1941), matematyk, profesor Politechniki Lwowskiej, rozstrzelany przez Niemców. Jego nazwisko umieszczone jest na pomniku *Nasz Los — Przestrogą* na placu Grunwaldzkim we Wrocławiu.

[13] Paradoks Bertranda: w zadaniu obliczenia prawdopodobieństwa, że losowo wybrana cięciwa w okręgu jednostkowym będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w ten okrąg, można podać trzy poprawne odpowiedzi: 1/4, 1/3 i 1/2!

W dzisiejszym wykładzie przedstawię Państwu tylko dwa modele probabilistyczne: dla rzutu monetą i ruchów Browna.

3. Rzut monetą i jego model probabilistyczny

Wiele sytuacji losowych daje się sprowadzić do modelu, w którym wyniki eksperymentu można podzielić na dwie grupy. Umownie wyniki z jednej grupy zwyczajowo nazywamy sukcesem, a z drugiej porażką. Rozważmy tu najprostszy przykład takiej sytuacji.

Większość z nas (a może wszyscy?) przyzna, że jeśli będziemy rzucać (uczciwą) monetą[14] wiele, wiele razy, to około połowy rzutów pokaże orła. Zamiast „wiele, wiele razy" chciałoby się mieć... „nieskończenie wiele rzutów", czego fizycznie nie jesteśmy w stanie zrobić. Ale w modelu matematycznym już tak!

Za H. Steinhausem wystarczy zauważyć, że wyniki kolejnych rzutów (orzeł albo reszka) możemy identyfikować z ciągami zero-jedynkowymi, a te z kolei możemy utożsamiać z rozwinięciami w systemie dwójkowym liczb z odcinka o początku w zerze i końcu w jeden (tak zwany odcinek jednostkowy)[15]. Zatem w paradygmacie kołmogorowowskim odcinek jednostkowy jest przestrzenią zdarzeń elementarnych. Zdarzeniami losowymi są (pewne) podzbiory odcinka jednostkowego. Natomiast za funkcję prawdopodobieństwa weźmiemy miarę Lebesgue'a. Jest to bardzo naturalna miara, która odcinkom przyporządkowuje ich długość. Zatem odcinek jednostkowy ma miarę równą jeden. Ale, co trudniej zaakceptować, tenże odcinek jednostkowy bez wszystkich ułamków ma dalej miarę jeden![16]

[14] To taka moneta, że w każdym pojedynczym rzucie szanse otrzymania orła są takie same jak szanse otrzymania reszki.

[15] Np. wynik rzutów: O (orzeł), O, O, R (reszka), O, R identyfikujemy z ciągiem 111010 (1 to orzeł, 0 to reszka). Poprzedzając ten ciąg zerem i przecinkiem, mamy ciąg 0,111010, który reprezentuje liczbę w zapisie dwójkowym. Zatem jest to liczba równa: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{0}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} = \frac{29}{32}$. Tak jak w systemie dziesiątkowym liczby zapisujemy w postaci kombinacji potęg dziesiątki, tak w systemie dwójkowym czynimy to, stosując potęgi dwójki. Warto wiedzieć, że komputery używają systemu dwójkowego!

[16] Modelem probabilistycznym dla rzutu monetą jest $\Omega = (0, 1)$, F to sigma-algebra podzbiorów borelowskich (są tam wszystkie odcinki i wiele więcej, ale nie wszystkie podzbiory $(0, 1)$), a $P = l$ (miara Lebesgue'a). Miara Lebesgue'a każdego nieskończonego

Nasze pytanie o częstotliwość występowania orłów w rzutach monetą sprowadza się teraz do pytania: „Jaka jest miara Lebesgue'a zbioru tych liczb z odcinka jednostkowego, dla których w ich rozwinięciu dwójkowym, frakcja jedynek zbliża się do jednej drugiej?". I zgodnie z tym, czego intuicyjnie oczekiwaliśmy, miara (prawdopodobieństwo) tego zbioru jest równa jeden. Ale nie jest to cały odcinek jednostkowy[17].

Fenomen, który zaobserwowaliśmy przy rzucie monetą, jest bardzo szczególnym przypadkiem tak zwanego mocnego prawa wielkich liczb (*strong law of large numbers*; SLLN) Kołmogorowa. Mówi ono, że z prawdopodobieństwem jeden, ale niekoniecznie zawsze, średnie arytmetyczne z ciągu obserwacji (ściślej: z ciągu stochastycznie niezależnych jednakowo rozłożonych zmiennych losowych) są zbieżne do wartości oczekiwanej[18].

Choć może nam się wydawać dziś w XXI w., że mówimy o bardzo trudnych zagadnieniach, to warto przypomnieć, że we wspominanej już *Ars Conjectandi* znajduje się, między innymi, wersja tak zwanego słabego prawa wielkich liczb.

4. Tablice przeżycia i Breslau/Wrocław

Od około 1580 r. w śląskim mieście Breslau odnotowywano dane o pochówkach i długości życia jego mieszkańców. Danymi tymi zainteresował się Kaspar Neuman, ksiądz i ówczesny uczony, który chciał oszacować prawdopodobieństwo przeżycia kolejnego roku lub kolejnych kilkunastu lat. Wydaje się, że nie sprostał on wyzwaniu. Zebrane dane przesłano do Londyńskiego Królewskiego Towarzystwa Naukowego, które z kolei przekazało je astronomowi Edmundowi Halleyowi (dziś pamiętamy jego nazwisko głównie w związku z noszącą jego imię i odwiedzającą nas kometą).

przeliczalnego zbioru jest równa zero! Stąd jeśli z odcinka (0, 1) usuniemy wszystkie ułamki, to i tak zostanie nam zbiór o mierze jeden! Ale nie jest to cały odcinek jednostkowy!

[17] W artykule dla uczniów szkół średnich *Czy warto rzucać monetą*, na stronie www.math.uni.wroc.pl/~zjjurek, jest więcej takich elementarnych i (chyba?) intrygujących przykładów.

[18] Dawniej w literaturze polskiej używano określenia nadzieja matematyczna. Zauważmy na przykład, że dla rzutu kostką sześcienną wartość oczekiwana (nadzieja matematyczna) wynosi $3{,}5 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)/6$, której nigdy nie zobaczymy jako wyniku na kostce!

W 1693 r., dwadzieścia lat przed ukazaniem się wspomnianej *Ars Conjectandi*, Halley opublikował intrygującą pracę pt. *Oszacowanie stopnia śmiertelności ludzkości na podstawie ciekawych tabel urodzeń i pogrzebów w mieście Breslau*[19]. Sto dwadzieścia pięć lat później Jan Śniadecki, w listopadzie 1817 r., w dyskusji na Uniwersytecie Wileńskim, mówiąc o rachunku prawdopodobieństwa i jego potencjalnych zastosowaniach, przytoczył jako przykład zastosowań właśnie tablice przeżycia sporządzone przez Halleya. Komentując zaś wartość danych zebranych w Breslau/Wrocławiu (w dzisiejszym języku powiedzielibyśmy wartość statystyczną tejże próby losowej)), powiedział „[we Wrocławiu] kilkakrotne rejestra pokazały ludność jak w zastanowieniu, gdzie przy mniejszym zbytku i rozpuście bieg przyrodzenia porządniejszy".

Być może powinniśmy być dumni, że nasi poprzednicy żyjący na tej ziemi „przy mniejszym zbytku i rozpuście" dali impuls do powstania współczesnego aktuariatu i innych ubezpieczeń. A może istotnie działa tu jakiś śląski *genius loci*, o którym mówił profesor Harasimowicz w wykładzie inauguracyjnym[20] przed dwoma laty?

Ale zanim uniesiemy się naszą lokalną wrocławską dumą, to wiedzmy, że Domitius Ulpianus, żyjący na przełomie drugiego i trzeciego wieku w Rzymie, także układał pierwsze, niezbyt precyzyjne i wyrafinowane, tablice przeżycia!

5. Ruchy Browna

„Księga przyrody jest napisana w języku matematyki"[21], jak powiedział Galileusz.

W 1828 r. botanik Robert Brown zaobserwował pod mikroskopem, że pyłki kwiatowe umieszczone w wodzie dalej rozbijają się na maleńkie cząsteczki, które poruszają się po bardzo nieregularnych trajektoriach. Ruchy te nie zmieniają się w polu elektrycznym czy

[19] Edmund Halley (1656–1742), *An estimate of the degrees of mortality of mankind drawn from the curious tables of the births and funerals at the city of Breslau*, cyt. za: J. Hoffmann-Jorgensen, *Probability with a View Toward Statistics*, New York-London 1994, s. xxxiii, xxxiv.

[20] J.W. Harasimowicz, *Kuźnia noblistów czy prowincjonalna uczelnia na peryferiach Rzeszy?*, Wrocław 2011.

[21] „The book of nature is written in the language of mathematics".

w świetle, ale istotnie reagują na zmianę temperatury i zmianę ośrodka. Albert Einstein w 1905 r. w pracy *O ruchu cząsteczek zawiesiny, postulowanej przez molekularno-kinetyczną teorię ciepła* zaproponował wyjaśnienie tego zjawiska[22]. Także polski fizyk, Marian Smoluchowski, był bliski wyjaśnienia istoty ruchów Browna[23].

Ale takie chaotyczne ruchy spotykamy też poza środowiskiem naturalnym. W 1900 r. Louis Bachelier w swojej pracy doktorskiej[24] zauważył podobne ruchy, badając zachowanie się cen akcji na giełdzie w Paryżu[25]. Zygzakowate wykresy cen akcji i innych giełdowych wskaźników każdy z nas może zobaczyć codziennie w wiadomościach ekonomicznych.

Jak dla takich zjawisk losowych zbudować kołmogorowowski model probabilistyczny? Tu zdarzeniami elementarnymi są wykresy (funkcje ciągłe). W zadaniach podobnych do rzutu monetą były to zbiory liczb, a prawdopodobieństwo było zadane miarami typu Lebesgue'a.

W pełni poprawną matematycznie miarę modelującą ruchy Browna podał Norbert Wiener dopiero w 1923 r.[26] Obecnie powszechnie nazywa się ją miarą Wienera, a odpowiadający jej proces stochastyczny nazywamy procesem Wienera (ruchem Browna)[27].

Teorię całkowania — analizę stochastyczną — zapoczątkował Kyoshi Ito, w latach 40. ubiegłego wieku. Teoria ta była tak różna[28] od analizy Leibniza i Newtona, że swoje pierwsze prace na ten temat Ito opublikował

[22] A. Einstein, *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme...*, „Ann. Physik" 17, 1905, s. 549–560. Nagroda Nobla w fizyce w 1921 r.

[23] M. Smoluchowski, *Zarys kinetycznej teorji ruchów Browna i roztworów mętnych*, „Rozprawy Akademii Umiejętności, Seria A", 1906.

[24] L. Bachelier, *Theorie de la speculation*, „Thesis. Paris, Ann. Ecole Norm. Sup." 17, 1990, s. 21–88.

[25] W 1996 r. powstało The Bachelier Finance Society, którego pierwszy światowy kongres odbył się w Paryżu, w 2000 r. Jest to forum spotkań praktyków rynków finansowych i probabilistów ze świata akademickiego.

[26] N. Wiener, *Differential space*, „J. Math. and Physics" 1923, nr 2, s. 131–174.

[27] Model kołmogorowowski w tym przypadku to: $\Omega := C_0([0, \infty])$ (funkcje ciągłe), $\mathcal{F} := C$ (zbiory cylindryczne) i $P := \mathcal{W}$ (miara Wienera).

[28] W klasycznym rachunku całkowym dla deterministycznej funkcji u mamy na przykład równość: $2\int_0^t u\,du = u^2(t) - u(0)$. Natomiast dla (stochastycznego) procesu Wienera $W(t)$, $t \geq 0$ mamy następującą równość: $2\int_0^t W(s)\,dW(s) = W^2(t) - t$.

w języku japońskim! Ale już trzy dekady później analiza stochastyczna — rachunek Ito — stała się głównym narzędziem matematyki finansowej.

6. O tym, co dotyczy nas wszystkich — matematyka finansowa

Najkrócej można powiedzieć, że giełdy istnieją dla dwóch zasadniczych celów. Po pierwsze, pozwalają zachować wartość pieniądza w czasie — oszczędności lokowane w obligacjach i bonach. Po drugie, są miejscem, w którym właściciele wolnych środków finansowych spotykają się z tymi, którzy mają idee, pomysły inwestycyjne, racjonalizatorskie, dla których potrzebują oni finansowania. Jednakże najbardziej widoczną aktywnością giełd i powszechnie obserwowaną jest handlowanie. Sprzedaje się i kupuje akcje firm, obligacje emitowane przez kraje, samorządy, firmy i inne podmioty rynkowe.

W ostatnich kilkudziesięciu latach jesteśmy świadkami pojawienia się tak zwanych pochodnych instrumentów finansowych (*financial derivatives*). Choć tu niczego się nie produkuje, to pozwala na lepsze rozłożenie ryzyka finansowego i efektywniejsze zabezpieczenie portfela inwestycyjnego.

Jednymi z podstawowych pochodnych instrumentów finansowych są tak zwane (europejskie) opcje kupna (*call options*) i opcje sprzedaży (*put options*). Nabywca opcji kupna ma prawo, ale nie obowiązek, kupić (od sprzedającego opcję), w ustalonej przyszłości, akcję za cenę ustaloną w dniu nabycia opcji. Powiedzmy, że akcja firmy X kosztuje dziś 120 zł, a my, nabywając (europejską) opcję kupna, mamy prawo kupić ją za 100 zł — za miesiąc. Oczywiście, jeśli za miesiąc cena akcji na giełdzie jest poniżej 100 zł, to odstępujemy od wykonania opcji, a nasza strata to kwota, za jaką kupiliśmy opcję. Jeśli cena akcji osiągnie na przykład 115 zł, to nasz zysk wyniesie 15 zł minus kwota, za jaką kupiliśmy opcje. Ale jak wyceniać opcje kupna (zagadnienie *option pricing*)?

Przyjmując, że ceny giełdowe akcji zmieniają się według logarytmicznego procesu Wienera (model matematyczny), Fisher Black z Myronem Scholsem[29] oraz Robert C. Merton[30] w 1973 r. podali

[29] F. Black, M.S. Scholes, *The pricing of options and corporate liabilities*, „J. Political Economics" 81, 1973, s. 384–404.

[30] R.C. Merton, *The theory of rational option pricing*, „Bell J. Economics and Management Sci." 1973, nr 4, s. 141–183.

wzory na wycenę europejskiej opcji kupna. Wzory te powszechnie wykorzystywano na rynkach finansowych, a szczególnie na otwartej wówczas nowej giełdzie Chicago Board Options Exchange oraz Options Clearing Corporation, która gwarantowała od strony prawno-finansowej rozliczanie zawartych kontraktów.

W 1997 r. Merton z Scholsem (Fisher, niestety, już nie żył) otrzymali Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii, a ich wzór[31] w przenośni i dosłownie trafił pod strzechy, jako że został opublikowany w codziennym wydaniu „New York Timesa".

Ale czy obserwowane na giełdzie zmiany cen akcji zachodzą zgodnie z logarytmicznym procesem Wienera, jak założyliśmy to w naszym modelu probabilistycznym? Niekonieczne, jak dowodzą tego pojawiające się od czasu do czasu kryzysy i zawirowania na giełdach. Wśród nich tak spektakularne jak to z 1998 r. wokół firmy Long-Term Capital Management (LTCM), której współzałożycielami byli Scholes i Merton[32]. W ciągu tygodnia amerykański dolar stracił około 15% wartości w stosunku do japońskiego jena. Czy też upadek domu maklerskiego Lehman Brothers we wrześniu 2008 r.

Dla pełności obrazu dodajmy, że w tak zwanej amerykańskiej opcji kupna nabywca takiejże ma prawo, ale nie obowiązek, wykonać ją (zrealizować) w ciągu dowolnego dnia miesiąca!

Jest oczywiste, że wycena opcji amerykańskich jest intelektualnie i matematycznie znacznie trudniejsza. W opcji europejskiej wystarczy „przewidzieć" ceny akcji w jednym, ostatnim dniu trwania kontraktu, podczas gdy w amerykańskiej trzeba „przewidzieć" cenę w ciągu trwania kontraktu — np. kolejnych trzydziestu dni (w warunkach powyższego przykładu).

Przez ostatnie dekady powstało wiele innych instrumentów finansowych o nie mniej intrygujących nazwach, jak opcje bermudzkie, opcje azjatyckie, opcje egzotyczne[33], opcje na indeksy giełdowe itp.

[31] Wzór opisujący wartość opcji to: $C = S\,N(d) - L\,e^{-rt}\,N(d - \sigma\sqrt{t})$.

[32] W „The Observer" z 17 września 1998 r. ukazał się wzór Blacka-Scholsa, tym razem w kontekście upadku LTCM i z podtytułem *Is this really the key formula to future wealth? Win bigger, loose bigger?*

[33] Nazwy te zdają się dowodzić, że rada Wilhelma Johannsena odnośnie do wprowadzania nowych terminów nie została przyjęta w finansach i ekonomii.

We wszystkich takich instrumentach finansowych fundamentalnym wyzwaniem jest wyliczenie cen takich kontraktów.

Trzeba być jednakże świadomym, że modele matematyczne są idealizacją świata realnego, że w naszych modelach matematycznych maklerzy działają racjonalnie. Inaczej mówiąc, zachodzi hipoteza efektywnego rynku (*efficient market hypothesis*; EMH) i na rynku finansowym nie ma możliwości arbitrażu, czyli zysku bez ryzyka.

Podobnie jak w wypadku tablic przeżycia, w opcjach finansowych też uprzedzili nas starożytni. Historycy finansów dowodzą, że Arystoteles w swojej *Polityce*, powstałej około 350 r. przed naszą erą, wspomina, że Tales z Miletu stosował opcje na przyszłe zbiory oliwek, a dokładniej na potrzebne prasy do tłoczenia oliwy z oliwek!

A dlaczego to, o czym dziś mówię, ma dotyczyć nas wszystkich?

Bo wszyscy kiedyś się urodziliśmy, chcemy przeżyć kolejne lata, mamy oszczędności lub pożyczki do spłaty, no i wszyscy, wszyscy liczymy na godne życie na emeryturze! Powinniśmy być świadomi i rozumieć, że fundusze emerytalne czy indywidualni maklerzy giełdowi, zarządzając naszymi pieniędzmi, mogą inwestować nie tylko w klasyczne akcje czy obligacje, ale też uczestniczyć w rynku pochodnych instrumentów finansowych. W naszym interesie jest, by stanowiący prawo regulujące rynki finansowe, by zarządzający finansami znali i rozumieli współczesną sztukę przewidywania, sztukę zarządzania ryzykiem, w tym tak zwane monetarne miary ryzyka (*monetary measures of risk*), o których dziś w ogóle nie wspomnieliśmy[34].

Podstawową radą dla nas wszystkich, potencjalnych inwestorów, wydaje się ta, aby nie inwestować w instrumenty finansowe, których złożoności nie rozumiemy!

7. Przyszłość...

Tak jak fizyka, chemia czy nauki inżynieryjne były dziedzinami, w których rachunek różniczkowy i całkowy (stworzony przez Leibniza i Newtona) święcił triumf i dał podstawowe narzędzia ich rozwoju, tak w ostatnich kilku dekadach rynki finansowe i aktuarialne

[34] H. Foellmer, A. Schied, *Stochastic Finanse*, Berlin 2004, rozdz. 4.

są polem wielkich sukcesów probabilistyki, a zwłaszcza stosowania analizy stochastycznej i stochastycznego rachunku całkowego Ito. Ale też w sprzężeniu zwrotnym probabilistyka, a ogólniej matematyka, jest inspirowana problemami i pytaniami z rynków finansowych i innych obszarów działalności człowieka.

A co czeka nas dalej?

Myślę, że matematyka pozostanie pośrednikiem między duchem a materią, jak mówił Hugo Steinhaus. Biologia i nauki medyczne ulegną dalszej matematyzacji. Zrozumiemy dogłębniej działanie naszego mózgu[35]... i samych siebie. Ale czy matematyzacji poddadzą się też dziedziny humanistyczne? Używanie niejednoznacznego terminu *mem* i kończenie wywodu humanistycznego skrótem QED[36] jest zdecydowanie niewystarczające[37].

Ale o tym, myślę, będzie w jednym z przyszłych wykładów inauguracyjnych!

Mam nadzieję, i czego serdecznie życzę, wygłosi go ktoś z obecnych naszych studentów i kolegów! Tak, aby stanąć w łańcuchu pokoleń uczonych naszej *Alma Mater* i kontynuować dzieło naszych poprzedników.

Dzisiaj to ja starałem się przedstawić Państwu aktualny stan wiedzy, pewnej części probabilistyki, niewspomnianej w wykładzie inauguracyjnym *Matematyka zjawisk przypadkowych*, wygłoszonym tu w Auli Leopoldyńskiej przez przywoływanego już mojego mistrza, profesora Urbanika, w październiku 1970 r.[38]

---

[35] W tym kontekście wspomnijmy, że 26th Marian Smoluchowski Symposium on Statistical Physics było poświęcone *Complexity of brain-critical behavior and scaling*, Uniwersytet Jagielloński, 28–31 sierpnia 2013.

[36] QED = Quod erat demonstrandum = Co było do udowodnienia.

[37] Myślę, że warto zajrzeć do książki R. Dawkinsa, *Samolubny gen*, Warszawa 1996, rozdz. 11, s. 262.

[38] Profesor Kazimierz Urbanik, *Matematyka zdarzeń przypadkowych*, wykład inauguracyjny 1970, który odbił się wtedy głośnym echem wśród nas, studentów, i w całym wrocławskim środowisku naukowym, szczególnie że wykład był później opublikowany w miesięczniku „Odra" 1970, nr 11, s. 29–35.

Drodzy Studenci!

Tak naprawdę to Wy jesteście adresatami wykładu inauguracyjnego! To Wy inaugurujecie dzisiaj swoją naukę i pobyt tu u nas, na Uniwersytecie Wrocławskim! Chciałbym, aby Waszym mottem, i innych studentów, było zawołanie: „Wyłącz wiarę, włącz myślenie!". Pamiętajcie, proszę, że nawet profesor — rektor — może się mylić! Za Józefem Życińskim[39] przypomnę, że „Na podstawie obliczeń Johna Lightfoota, prorektora Uniwersytetu w Cambridge, twierdzono bowiem, przez długi czas, że Pan Bóg stworzył świat w piątek 28 października 4004 lata przed Chrystusem o godzinie 9 rano"[40]. Powinniście też pamiętać, że św. Augustyn mówił: „Nie czytamy w Ewangelii, by Pan powiedział »Posyłam Wam Pocieszyciela, który by was pouczał o biegu słońca i księżyca«. Chrześcijan bowiem chciał wykształcić, a nie matematyków!".

Uważam, że w Waszym — studentów — interesie i szerzej — nas wszystkich — jest to, aby uniwersytety nadal ostały się Świątyniami Wiedzy i Nauki i aby dalej kształciły „matematyków"!

Pozostając zaś w konwencji (dzisiejszego wykładu) nawiązywania do moich poprzedników, którzy tu kiedyś stali na tym miejscu, na zakończenie wykładu, za profesorem Bolesławem Ginterem[41], doktorem *honoris causa* naszej uczelni, chcę powtórzyć: „To od nas, Panie i Panowie Profesorowie, zależy w głównej mierze, czy nasz Uniwersytet znów stanie się wielki".

8. *Post scriptum*

Ponieważ każdy wykład matematyczny, dla lepszego zrozumienia tematu, powinien kończyć się listą zadań i ćwiczeń dla słuchaczy, poniżej jest ćwiczenie — zadanie domowe!

---

[39] Józef Życiński (1948–2011), biskup rzymskokatolicki, metropolita lubelski, kanclerz Katolickiego Uniwersytetu Lubelskiego Jana Pawła II, teolog i filozof.

[40] J. Życiński, *Świat matematyki i jej materialnych cieni*, Kraków 2013, rozdz. 8, s. 175. Czy to wyjaśnia frazę „cztery tysiące lat wyglądany" w śpiewanej kiedyś kolędzie bożonarodzeniowej?

[41] B. Ginter, *O wielkości Uniwersytetu*, Uniwersytet Wrocławski, 3 października 2011.

Serdecznie dziękuję za wysłuchanie wykładu, a o tym, czy istotnie Paul Dirac[42] miał rację, zadecydują Państwo już sami.

Wrocław, 1 października 2013 r.

9. ZADANIE — ĆWICZENIE DOMOWE

Krok 1. Wziąć dowolne tablice liczb losowych (np. takie, jakie są na sąsiedniej stronie).

Krok 2. Z tablicy liczb losowych wybrać dowolny ciąg kolejnych stu cyfr (np. taki jak ciąg cyfr na stronie obok, w kolumnach, rozpoczynający się od 5, 9, 8, 1, 9 i kończący się cyframi 2, 3, 3, 2).

Krok 3. Z pierwszych dziesięciu cyfr w wybranym ciągu wybrać dowolną cyfrę (na stronie obok jest to cyfra 8, na trzeciej pozycji).

Krok 4. Przejść w ciągu o 8 pozycji (w przykładzie obok przesuwamy się więc do cyfry 2; gdyby wybraną cyfrą było 0 (zero), to przesuwamy się o 10 pozycji).

Krok 5. Zatem przesuwamy się o dwie pozycje, na cyfrę 8 itd.

Krok 6. Kontynuujemy nasz spacer losowy na wybranym ciągu tak długo, jak jest to możliwe, i zaznaczamy pozycję końcową spaceru (w przykładzie obok jest to ostatnia cyfra 2).

Krok 7. Powtórzyć podobny spacer, wybierając inną pozycję początkową niż 8, w powyższym kroku 3.

Czy coś szczególnego zaobserwowaliśmy?

Można spróbować powtórzyć opisany spacer po raz trzeci na wybranym ciągu. Albo wybrać inny ciąg stu cyfr z tabeli obok i powtórzyć dwukrotnie lub więcej opisany spacer losowy.

Albo jeszcze lepiej wybrać inną tabelę liczb losowych (bo być może tabela obok jest „zmanipulowana") i powtórzyć na niej opisany powyżej spacer losowy.

Odpowiedzi/komentarze proszę przesyłać na adres: inaug13zad@math.uni.wroc.pl.

---

[42] Zob. przypis 8.

3407	1440	6960	8675	5649	5793	1514
5044	9859	4658	7779	7986	0520	6697
0045	4999	4930	7408	7551	3124	0527
7536	1448	7843	4801	3147	3071	4749
7653	4231	1233	4409	0609	6448	2900
6157	1144	4779	0951	3757	9562	2354
6593	8668	4871	0946	3155	3941	9662
3187	7434	0315	4418	1569	1101	0043
4780	1071	6814	2733	7968	8541	1003
9414	6170	2581	1398	2429	4763	9192
1948	2360	7244	9682	5418	0596	4971
1843	0914	9705	7861	6861	7865	7293
4944	8903	0460	0188	0530	7790	9118
3882	3195	8287	3298	9532	9066	8225
6596	9009	2055	4081	4842	7852	5915
4793	2503	2906	6807	2028	1075	7175
2112	0232	5334	1443	7306	6418	9639
0743	1083	8071	9779	5973	1141	4393
8856	5352	3384	8891	9189	1680	3192
8027	4975	2346	5786	0693	5615	2047
3134	1688	4071	3766	0570	2142	3492
0633	9002	1305	2256	5956	9256	8979
8771	6069	1598	4275	6017	5946	8189
2672	1304	2186	8279	2430	4896	3698
3136	1916	8886	8617	9312	5070	2720
6490	7491	6562	5355	3794	3555	7510
8628	0501	4618	3364	6709	1289	0543
9270	0504	5018	7013	4423	2147	4089
5723	3807	4997	4699	2231	3193	8130
6228	8874	7271	2621	5746	6333	0345
7645	3379	8376	3030	0351	8290	3640
6842	5836	6203	6171	2698	4086	5469
6126	7792	9337	7773	7286	4236	1788
4956	0215	3468	8038	6144	9753	3131
1327	4736	6229	8965	7215	6458	3937
9188	1516	5279	5433	2254	5768	8718
0271	9627	9442	9217	4656	7603	8826
2127	1847	1331	5122	8332	8195	3322
2102	9201	2911	7318	7670	6079	2676
1706	6011	5280	5552	5180	4630	4747
7501	7635	2301	0889	6955	8113	4364
5705	1900	7144	8707	9065	8163	9846
3234	2599	3295	9160	8441	0085	9317
5641	4935	7971	8917	1978	5649	5799
2127	1868	3664	9376	1984	6315	8396

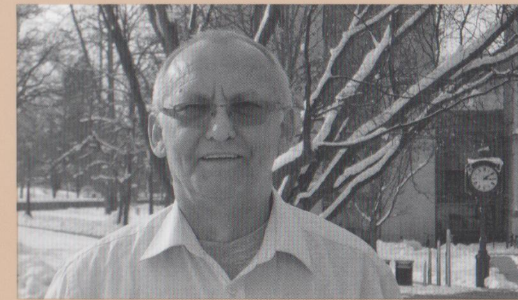
Ryc. 1. Tabela liczb losowych, za: R.V. Hogg, E.A. Tanis, *Probability and Statistical Inference*, Prentice Hall 2001, s. 665

Wykłady Inauguracyjne
na Uniwersytecie Wrocławskim

Redaktor serii
Marek Górny

ISBN 978-83-229-3396-1

Publikacja przygotowana w Wydawnictwie Uniwersytetu Wrocławskiego Sp. z o.o.
50-137 Wrocław, pl. Uniwersytecki 15
tel./fax 71 3752507, e-mail: marketing@wuwr.com.pl



Zbigniew Jan Jurek

Prof. dr hab. nauk matematycznych ze specjalnością: teoria prawdopodobieństwa. Autor prac dotyczących twierdzeń granicznych w nieskończenie wymiarowych przestrzeniach Banacha; rozprawy doktorskiej, której część weszła do międzynarodowego obiegu pod nazwą *Jurek class U*; rozprawy habilitacyjnej, z której pochodzi tzw. *Jurek-Vervaat representation*; współautor (wspólnie z J. Davidem Masonem z University of Utah w Salt Lake City, USA) monografii *Operator-Limit Distributions in Probability Theory* (J. Wiley & Sons, 1993).

Laureat nagrody Sekretarza Naukowego PAN i czterokrotny laureat nagrody Ministra NSzWT i MEN. Biogram naukowy w *Mathematics: Who's Who*, Delhi 1984.

W latach 1993–1996 zastępca dyrektora do spraw naukowych Instytutu Matematycznego, 1996–1997 prodziekan Wydziału Matematyki i Informatyki, 2008–2011 przewodniczący Uczelnianej Komisji Wyborczej. Członek redakcji czasopisma „Probability and Mathematical Statistics".

Profesor wizytujący, łącznie ponad 10 lat, na uczelniach w USA, Holandii, Japonii, Belgii i Francji; ostatnio w Indiana University, Bloomington, 2013. Wielokrotnie realizował granty naukowo-badawcze, w tym ostatnio grant NCN (2011–14).