

**Uniwersytet Wrocławski**  
**Wydział Matematyki i Informatyki**  
**Instytut Matematyczny**  
*specjalność: nauczycielska*

Kalina Kijewska

## **O symetriach wzorów płaskich**

Praca magisterska  
napisana pod kierunkiem  
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2014

Oświadczam, że pracę magisterską wykonałem samodzielnie i zgłaszam ją do oceny.

Data ..... Podpis autora pracy: .....

Oświadczam, że praca jest gotowa do oceny przez recenzenta.

Data ..... Podpis opiekuna pracy: .....

## Spis treści

Wstęp.....	5
1. Symetrie na płaszczyźnie .....	7
1.1 Rodzaje izometrii płaszczyzny .....	7
1.2 Wzory na płaszczyźnie i ich symetrie .....	8
1.3 Typy symetrii wzorów .....	11
2. Symetrie wzorów płaskich.....	15
2.1 Cechy symetrii występujące we wzorach płaskich.....	15
2.2 Lista rodzajów typów symetrii wzorów płaskich .....	16
2.3 Potencjalne typy symetrii wzorów płaskich i ich oznaczenia .....	17
3. Magiczne Twierdzenie .....	25
3.1 Cennik symetrii i cena wzoru płaskiego .....	25
3.2 Magiczne Twierdzenie .....	27
3.3 Typy symetrii wzorów płaskich .....	28
3.4 O czym mówi podana sygnatura .....	34
4. Dowód Magicznego Twierdzenia .....	42
4.1 Orbifold (składka orbit) wzoru płaskiego.....	42
4.2 Charakterystyka Eulera orbifoldu.....	44
4.3 Klasyfikacja powierzchni i dowód Magicznego Twierdzenia .....	46
4.4 Uzasadnienie, że $\chi(\mathbf{O}) = \mathbf{0}$ dla orbifoldów wzorów płaskich.....	50
Bibliografia.....	54



## Wstęp

Niniejsza praca dotyczy klasyfikacji symetrii wzorów płaskich. Grupy symetrii płaszczyzny są opisane już od końca XIX wieku, jednak pod koniec XX wieku amerykański matematyk William Thurston obmyślił ciekawy nowy sposób klasyfikacji, odwołując się do pojęcia orbifoldu. Nowy sposób oznaczeń grup symetrii płaszczyzny i nowy sposób klasyfikacji został opisany w pierwszej części książki Johna Hortona Conwaya „The Symmetries of Things” [1].

Celem niniejszej pracy jest prezentacja klasyfikacji w taki właśnie sposób jak obmyślił to Thurston, a przedstawia i propaguje Conway, przy czym wprowadzone zostały pewne „ulepszenia” w stosunku do treści książki.

Przede wszystkim materiał przedstawiono starannie, co oznacza ściślejsze wprowadzanie pojęć ze szczególnym uwzględnieniem pojęcia wzoru płaskiego a także obszerniejsze argumentacje dowodowe przedstawianych treści. Uzupełniono również większość luk w prezentacji Conwaya (choć nie wszystkie), tj. treści które autor pominął lub omówił skrótowo, a które stanowią ważne elementy kompletności przedstawianego materiału. Materiał został też dostosowany do odbioru przez mało zaawansowanego matematycznie czytelnika, np. zdolnego ucznia liceum, między innymi poprzez wprowadzanie definicji (i ich omówień) wszystkich podstawowych pojęć.

Niektóre zmiany w stosunku do materiału przedstawionego w książce wynikają z celowego skupienia się na wzorach płaskich, z pominięciem wzorów na sferze oraz szlaków.

Niniejszą pracę można traktować zatem jako rozbudowany przewodnik do części I książki „The Symmetries of Things”, który pomoże czytelnikowi zrozumieć prezentowane przez Conwaya zagadnienia, ale może ona stanowić także osobny materiał traktujący o symetriach wzorów płaskich.

Ponieważ praca jest odniesieniem do treści prezentowanych w książce, zachowano specyficzny układ materiału, który w kilku miejscach polega na stosowaniu twierdzeń bez ich uprzedniego udowodnienia, przesuując dowód do następnego rozdziału książki. Schematycznie układ pracy można przedstawić w następujący sposób:  $A \Leftarrow B \Leftarrow C$ . Z tej samej przyczyny w pracy wykorzystano ilustracje występujące w książce, które stanowią niewątpliwie ogromny walor tej pozycji.



# 1. Symetrie na płaszczyźnie

## 1.1 Rodzaje izometrii płaszczyzny

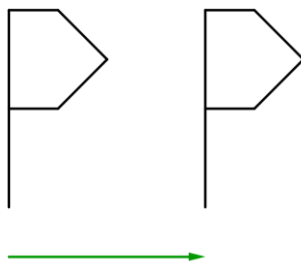
*Izometrie* to takie przekształcenia całej płaszczyzny, które zachowują kształty i rozmiary wszystkich figur znajdujących się na płaszczyźnie, choć mogą zmieniać ich położenie. Możemy wyróżnić następujące rodzaje izometrii:

- przesunięcia (translacje);
- obroty;
- symetrie osiowe (odbicia);
- symetrie z poślizgiem.

Informację, że są to jedyne izometrie na płaszczyźnie przyjmujemy jako znaną i nie będziemy jej tutaj dowodzić. Czytelnik może znaleźć jej uzasadnienie w rozdziale 1. „Wykładów z geometrii elementarnej” R. Domana [4]. Omówimy natomiast pokrótce każde z powyższych rodzajów przekształceń.

### Translacja

*Translacja* jest przekształceniem, które wszystkie punkty płaszczyzny przesuwa o zadany ustalony wektor (Rysunek 1.1.1).

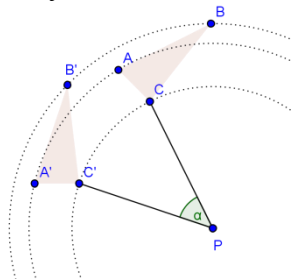


Rysunek 1.1.1

Kiedy wektor przesunięcia jest wektorem zerowym, translacja jest *przekształceniem tożsamościowym*, co oznacza że każdemu punktowi płaszczyzny jest przyporządkowany dokładnie ten sam punkt.

### Obrót

*Obrót* wokół punktu  $P$  o kąt  $\alpha$  to przekształcenie, które każdy punkt  $A$  płaszczyzny przesuwa po okręgu o środku w punkcie  $P$  i promieniu równym odległości punktów  $A$  i  $P$ , o kąt środkowy  $\alpha$  w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara (Rysunek 1.1.2). Punkt  $P$  będziemy nazywać *środkiem obrotu*.

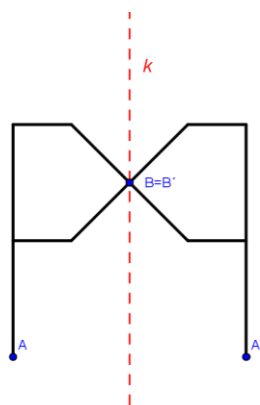


Rysunek 1.1.2

Obroty o kąty  $0^\circ$  i  $360^\circ$  są przekształceniami tożsamościowymi.

## Symetria osiowa

*Symetria osiowa*, nazywana także *odbiciem lustrzanym*, jest najbardziej popularną spośród izometrii płaszczyzny. Dla ustalonej prostej  $k$ , którą będziemy nazywać *osią symetrii*, każdy punkt  $A$  przekształcany jest na punkt  $A'$ , leżący po przeciwnej stronie osi, na prostej do niej prostopadłej przechodzącej przez punkt  $A$ , znajdujący się w takiej samej odległości od osi jak punkt  $A$  (Rysunek 1.1.3). Punkty leżące na osi symetrii nie zmieniają swojego położenia i nazywamy je *punktami stałymi* tej symetrii.

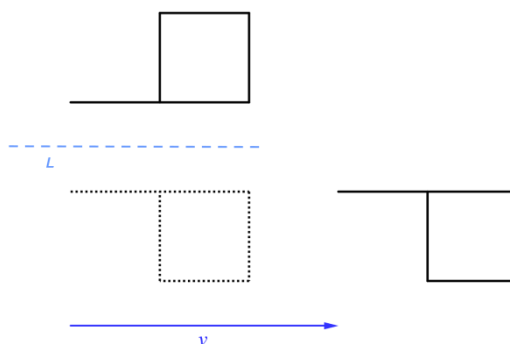


Rysunek 1.1.3

Osie symetrii w symetriach osiowych będziemy nazywać także *lustrami*.

## Symetria z poślizgiem

*Symetria z poślizgiem* jest przekształceniem polegającym na złożeniu symetrii osiowej o pewnej osi  $L$  i przesunięcia o niezerowy wektor  $v$  równoległy do osi  $L$ . Prosta  $L$  nazywamy *osią symetrii z poślizgiem*, zaś  $v$  nazywamy *wektorem poślizgu* tej symetrii z poślizgiem (Rysunek 1.1.4).



Rysunek 1.1.4

## 1.2 Wzory na płaszczyźnie i ich symetrie

Przedstawione powyżej rodzaje izometrii możemy zaobserwować w przykładach przeróżnych wzorów. *Wzorem* będziemy nazywać dowolny (ograniczony lub nieograniczony) rysunek na płaszczyźnie. *Symetrią wzoru* nazywamy każdą izometrię płaszczyzny, która przekształca dany wzór dokładnie sam na siebie.

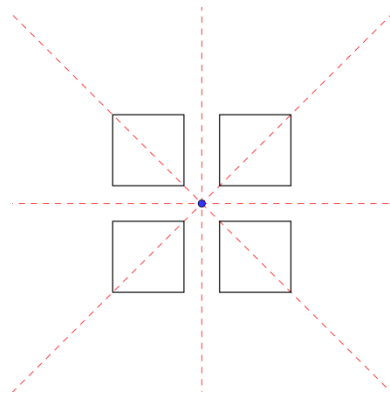
Ze względu na sposób występowania symetrii we wzorze możemy wyróżnić trzy rodzaje wzorów: wzory ograniczone, szlaki oraz wzory płaskie.



### Wzór ograniczony

*Wzór ograniczony* to dowolna ograniczona figura na płaszczyźnie. Charakteryzuje się brakiem translacji wśród jego symetrii, tj. żadna translacja ani żadna symetria z poślizgiem nie może być symetrią wzoru ograniczonego. Zauważmy także, że wzór ograniczony może nie mieć żadnych nietrywialnych symetrii, tzn. jedyną jego symetrią może okazać się izometria tożsamościowa.

Rysunek 1.2.1 to wzór ograniczony posiadający 4 symetrie osiowe oraz jeden punkt symetrii obrotowej o kąt  $90^\circ$  i jego wielokrotności.

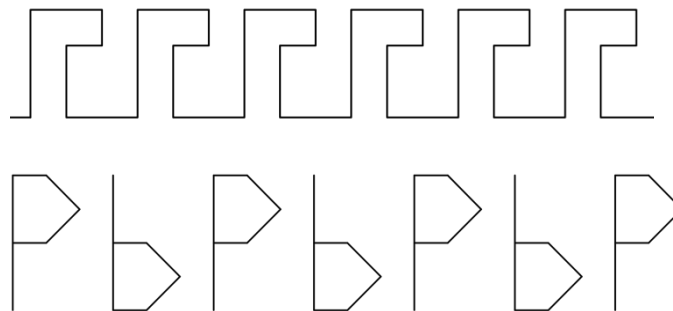


Rysunek 1.2.1

### Szlak

*Szlak* to wzór powstały poprzez periodyczne powtarzanie ustalonego ograniczonego wzorca nieskończoną ilość razy za pomocą translacji tylko w jednym kierunku (ale w obie jego strony).

Mówiąc inaczej jest to wzór zawarty w pasie płaszczyzny, który może być przekształcany sam na siebie za pomocą translacji o ustalony wektor i jego całkowite wielokrotności (Rysunek 1.1.2).



Rysunek 1.1.2

Szlaki są bardzo często spotykanymi ornamentami w architekturze.

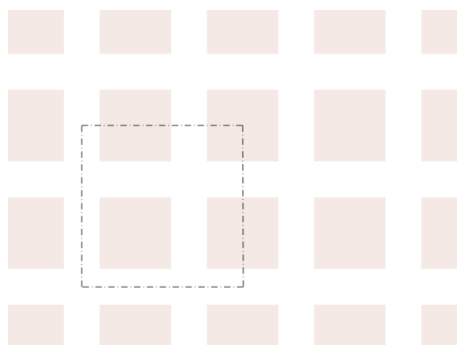


Rysunek 1.1.3

## Wzór płaski

*Wzór płaski* to wzór charakteryzujący się następującymi cechami:

- pewien ograniczony fragment tego wzoru powtarza się nieskończenie wiele razy;
- przekształcenie przenoszące jedną kopię takiego ograniczonego fragmentu na drugą przedłuża się do izometrii całej płaszczyzny przekształcającej cały wzór na siebie, czyli do symetrii całego wzoru;
- po dostatecznym powiększeniu ograniczonego obszaru zawierającego fragment wzoru, kopie powiększenia zawierające powtórzenia tego fragmentu wypełniają całą płaszczyznę (Rysunek 1.1.4).

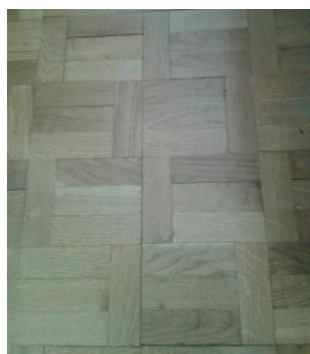
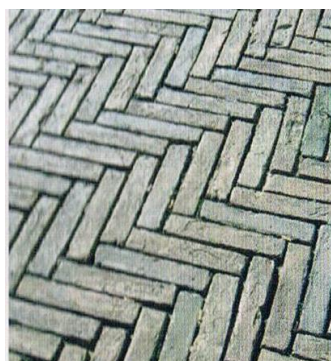


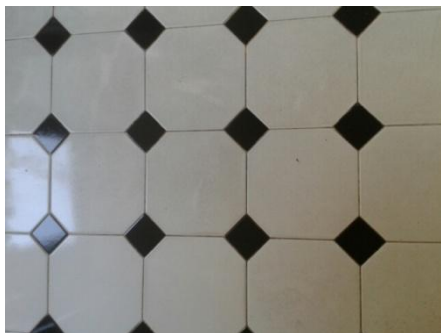
Rysunek 1.1.4

Intuicyjnie możemy wyobrazić sobie, że wzory płaskie to wzory, które „pokrywają” nieskończoną powierzchnię płaszczyzny, a patrząc na dostatecznie duży obszar, wzór wygląda tak samo w każdym miejscu płaszczyzny. „Pokrywanie” całej płaszczyzny to własność, która odróżnia wzory płaskie od szlaków.

W niniejszej pracy rozważamy tylko wzory o *symetrii nieciągłej*, tzn. takie, które posiadają taki mały fragment (zawarty w dostatecznie małym kole), że żadna symetria całego wzoru (z wyjątkiem tożsamościowej) nie może przekształcać tego fragmentu na fragment o niego zahaczający.

W codziennym życiu obserwujemy wiele tego typu wzorów (podzbiorów nieskończonej płaszczyzny) w formie posadzek, tapet, materiałów. Poniżej przedstawiamy przykłady wzorów płaskich pochodzących z wzornictwa użytkowego.





### 1.3 Typy symetrii wzorów

*Typem symetrii wzoru* będziemy nazywać zbiór wszystkich symetrii tego wzoru wraz ze wzajemnymi związkami pomiędzy tymi symetriami (np. wzajemne położenie osi odbić i środków obrotów będących symetriami tego wzoru). Naszym celem jest znalezienie wszystkich możliwych typów symetrii wzorów płaskich, czyli ich sklasyfikowanie.

Jak może wyglądać pełna odpowiedź na pytanie o klasyfikacje typów symetrii pokażemy na prostszym przykładzie wzorów ograniczonych.

Zgodnie z twierdzeniem Leonarda da Vinci jedyne typy nieciągłych symetrii wzorów ograniczonych to:

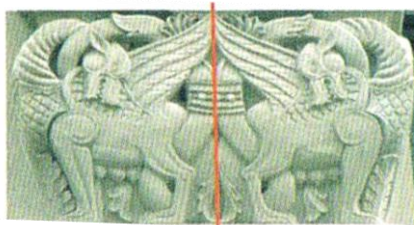
- symetria  $n$ -krotna kalejdoskopowa (dla  $n \geq 1$ );
- symetria  $n$ -krotna obrotowa (dla  $n \geq 1$ ).

Omówmy powyższe typy symetrii tych wzorów.

#### Symetria $n$ -krotna kalejdoskopowa

*Symetria  $n$ -krotna kalejdoskopowa* (lub inaczej *symetria kalejdoskopowa  $n$ -tego rzędu*) oznacza, że wzór posiada dokładnie  $n$  osi symetrii i że przecinają się one w jednym punkcie.

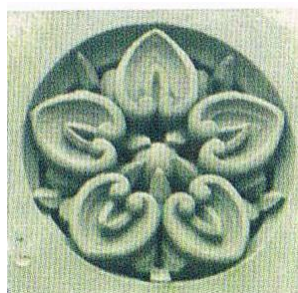
Dla  $n = 1$  symetria kalejdoskopowa polega na posiadaniu przez wzór dokładnie jednej symetrii osiowej. Poniższy wzór (Rysunek 1.3.1) posiada dokładnie jedno pojedyncze lustro.



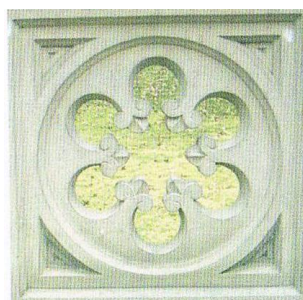
Rysunek 1.3.1

Dla  $n > 1$  punkt przecięcia się osi symetrii (luster) będziemy nazywać *punktem kalejdoskopowym* wzoru.

Poniżej przedstawiamy wzory ograniczone o symetrii kalejdoskopowej pięciokrotnej (Rysunek 1.3.2) i sześciokrotnej (Rysunek 1.3.3).

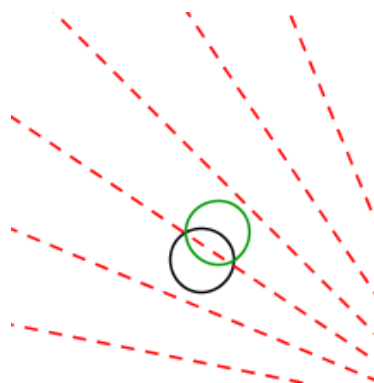


Rysunek 1.3.2



Rysunek 1.3.3

**Uwaga 1.3.1** Zauważmy, że jeżeli rozważamy jedynie typy nieciągłych symetrii wzoru, możliwe są tylko skończone punkty kalejdoskopowe (o skończonym  $n$ ). Przy nieskończonym punkcie kalejdoskopowym przez każde dowolnie małe koło przechodzi nieskończenie wiele symetrii osiowych wzoru, zatem zawsze istnieje izometria (symetria osiowa), która przekształca to koło na koło o nie zahaczające (Rysunek 1.3.4).



Rysunek 1.3.4

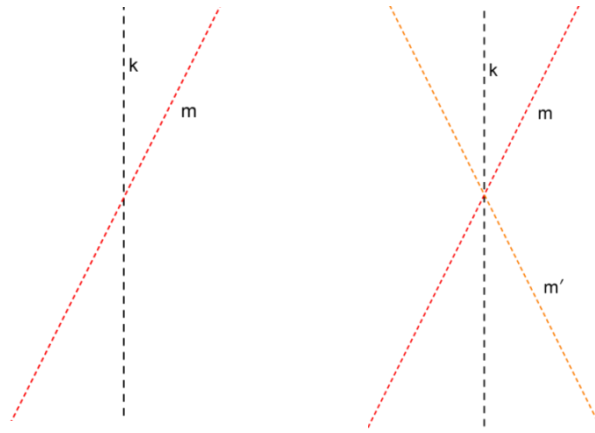
W tym miejscu należy wspomnieć, że wszystkie punkty kalejdoskopowe charakteryzują się równomiernym rozkładem przecinających się luster, tzn. przechodzące przez nie lustra dzielą płaszczyznę na równe części. Np. lustra przechodzące przez punkt kalejdoskopowy trzeciego rzędu dzielą płaszczyznę na 6 równych kątów, po  $60^\circ$  każdy. Dlaczego tak jest i skąd wiadomo, że nie istnieją inne możliwości przecinania się luster? Zobaczmy jak wygląda sytuacja dla dokładnie dwóch osi symetrii, a następnie przejdźmy do dowolnej skończonej liczby przecinających się luster.

**Fakt 1.3.2** Jeżeli przez punkt kalejdoskopowy  $g$  wzoru  $F$  przechodzą dokładnie dwie osie symetrii  $k$  i  $m$ , to są one prostopadłe.

Dowód nie wprost:

Załóżmy, że tak nie jest, tzn. że proste  $k$  i  $m$ , będące jedynymi osiami symetrii przechodzącymi przez punkt kalejdoskopowy  $g$ , nie są prostopadłe. Z własności symetrii osiowej wiemy, że symetryczny obraz wzoru  $F$  względem prostej  $k$  jest tą samą figurą. Wzór  $F$  ma również drugą oś symetrii przechodzącą przez punkt kalejdoskopowy  $g$ , mianowicie  $m$ , więc obrazem tej prostej w symetrii względem prostej  $k$  będzie pewna prosta  $m'$ , będąca również osią symetrii wzoru  $F$ , przechodzącą przez punkt kalejdoskopowy  $g$ . Skoro proste  $m$  i  $k$  nie są prostopadłe,

to prosta  $m'$ , będąca obrazem prostej  $m$ , nie pokrywa się z nią (Rysunek 1.3.5). Mamy zatem trzy różne osie symetrii wzoru  $F$  przechodzące przez punkt kalejdoskopowy  $g$ :  $k$ ,  $m$  i  $m'$ , co jest sprzeczne z założeniem. Proste  $k$  i  $m$  muszą być więc prostopadłe, co należało udowodnić.

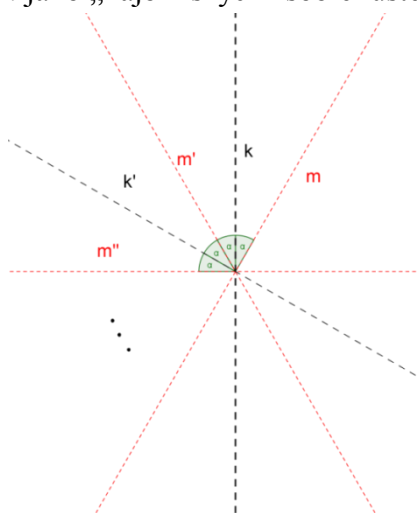


Rysunek 1.3.5

**Fakt 1.3.3** Wszystkie lustra symetrii kalejdoskopowej są rozłożone równomiernie tj. każde dwie najbliższe leżące osie symetrii przecinają się pod tym samym kątem  $\alpha$ .

Dowód:

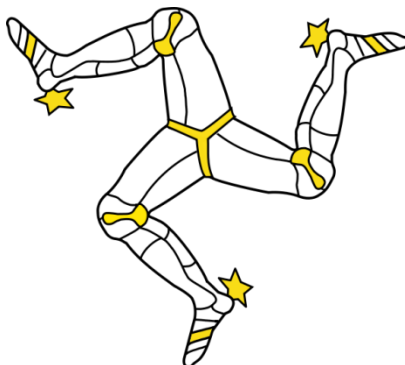
Spójrzmy na rysunek 1.3.6. Z własności symetrii osiowej wiemy, że symetryczny obraz wzoru  $F$  względem prostej  $k$  jest tą samą figurą. Niech prosta  $m$  będzie drugą osią symetrii wzoru, przecinającą prostą  $k$  pod kątem  $\alpha$ , przy czym  $k$  i  $m$  to leżące „najbliżej siebie” proste. Obrazem prostej  $m$  w symetrii względem prostej  $k$  będzie pewna prosta  $m'$  przecinająca prostą  $k$  również pod kątem  $\alpha$  w tym samym punkcie kalejdoskopowym. Ponieważ  $m'$  jest także osią symetrii wzoru  $F$ , obrazem prostej  $k$  względem prostej  $m'$  będzie prosta  $k'$ , przecinająca się z prostą  $m'$  pod kątem  $\alpha$ . Obrazem prostej  $m'$  w symetrii osiowej względem prostej  $k'$  będzie prosta  $m''$  przecinająca się z poprzednią prostą znów pod kątem  $\alpha$ . Każda kolejna oś symetrii będzie przecinała się z poprzednią pod kątem  $\alpha$ . Ponieważ punkt kalejdoskopowy musi składać się ze skończonej liczby luster, w pewnym momencie „nowa” oś symetrii pokryje się z osią już istniejącą. Wszystkie osie symetrii będą zatem rozłożone równomiernie co kąt  $\alpha$ . Gdyby pomiędzy tymi lustrami istniało jednak jeszcze jakieś inne lustro, to podobne rozumowanie dałoby lustro leżące pomiędzy lustrami  $k$  i  $m$ , wbrew wyborowi  $k$  i  $m$  jako „najbliższych” sobie luster.



Rysunek 1.3.6

### Symetria $n$ -krotna obrotowa

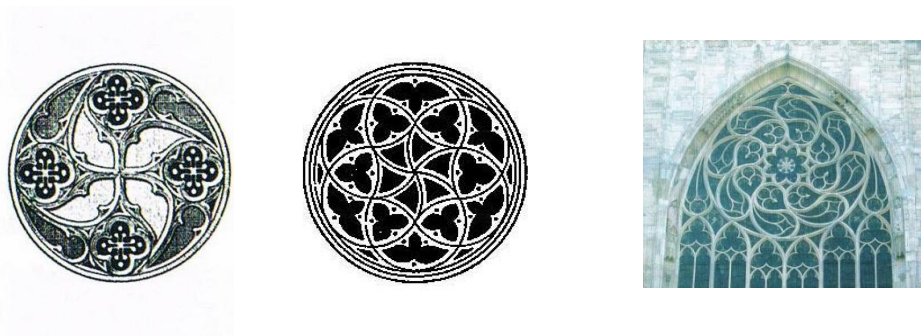
Drugi typ nieciągłych symetrii wzorów ograniczonych to *symetria  $n$ -krotna obrotowa*. Przykładem wzoru posiadającego taki typ symetrii jest triskelion obecny na fladze Wyspy Man oraz fladze Sycylii (Rysunek 1.3.7). Obrót o kąt równy  $120^\circ$  wokół punktu w środku figury powoduje jej przekształcenie na samą siebie. Jest to symetria obrotowa 3-krotna (symetria obrotowa trzeciego rzędu).



Rysunek 1.3.7

Środek obrotu symetrii  $n$ -krotnej obrotowej będziemy nazywać *punktem obrotowym*.

Poniższe rozety (Rysunek 1.3.8), to przykłady symetrii obrotowych odpowiednio 4, 6 i 8-krotnej.



Rysunek 1.3.8

**Uwaga 1.3.4** Za punkty obrotowe uważamy jedynie punkty nie leżące na żadnej osi symetrii wzoru. Punkt przecięcia się luster (osi symetrii) jest zawsze punktem kalejdoskopowym a nie obrotowym, pomimo że pewne obroty wokół tego punktu są symetrami wzoru.

Celem niniejszej pracy jest klasyfikacja wszystkich nieciągłych typów symetrii wzorów płaskich, w podobnym duchu jak przedstawiona powyżej (bez dowodu) klasyfikacja typów symetrii wzorów ograniczonych.



## 2. Symetrie wzorów płaskich

W niniejszym rozdziale rozważymy jak można klasyfikować wzory płaskie ze względu na występujące w nich symetrie, tzn. omówimy wszystkie możliwe potencjalne typy symetrii tych wzorów. Wprowadzimy również ścisły język opisu typów symetrii. W tym miejscu nie w każdym przypadku będziemy pokazywać, czy istnieją realne przykłady wzorów o symetriach poszczególnych potencjalnych typów, chociaż niektóre sytuacje wnikliwy czytelnik mógłby od razu wykluczyć.

### 2.1 Cechy symetrii występujące we wzorach płaskich

We wzorach płaskich mogą występować, jako ich symetrie, wszystkie cztery izometrie płaszczyzny: translacje, obroty, symetrie osiowe i symetrie z poślizgiem.

Zbiór wszystkich symetrii wzoru może charakteryzować się pewnymi cechami. Tak np. symetrie osiowe mogą tworzyć pojedyncze lustra lub punkty kalejdoskopowe, w zależności od wzajemnego położenia osi symetrii we wzorze płaskim.

Przyjrzyjmy się dokładniej pewnym cechom symetrii, które mogą występować we wzorach płaskich.

#### Pojedyncze lustra

We wzorze płaskim mogą występować *pojedyncze lustra*, tzn. osie symetrii wzoru nieprzecinające się z żadnymi innymi osiami symetrii tego wzoru.

W jednym wzorze mogą występować *różne rodzaje* pojedynczych luster, co oznacza, że lustra te przechodzą przez istotnie różne fragmenty wzoru. Inaczej mówiąc, jeśli lustra są innego rodzaju, nie istnieje symetria wzoru przeprowadzająca jedno lustro na drugie.

#### Punkty kalejdoskopowe $n$ -krotne

We wzorze płaskim mogą występować także *punkty kalejdoskopowe*, czyli miejsca, w których przecinają się osie symetrii wzoru (więcej niż jedno lustro wzoru przechodzi przez ten punkt). *Punkt kalejdoskopowy  $n$ -krotny*, to punkt, w którym przecina się dokładnie  $n$  luster wzoru. Jak to uzasadniliśmy w rozdziale 1 (Uwaga 1.3.1), dla wzoru o symetrii nieciągłej, przez wspólny punkt może przechodzić tylko skończenie wiele luster takiego wzoru. Powtarzając natomiast argument z dowodu Faktu 1.3.2 możemy uzasadnić, że jeśli takich luster jest  $n$ , to są one rozłożone równomiernie w jednakowych odstępach kątowych wynoszących  $\frac{\pi}{n}$ .

Punkty kalejdoskopowe wzoru mogą różnić się krotnością. Poza tym, we wzorze płaskim mogą istnieć punkty kalejdoskopowe tej samej krotności, ale różnego rodzaju, co podobnie jak w przypadku różnego rodzaju pojedynczych luster, oznacza że punkty te leżą w istotnie różnych fragmentach wzoru, czyli nie istnieje symetria wzoru przeprowadzająca jeden taki punkt kalejdoskopowy na drugi.

#### Punkty obrotowe $n$ -krotne

We wzorach płaskich mogą występować także punkty obrotowe. *Punkt obrotowy* wzoru płaskiego, to środek obrotu przeprowadzającego wzór płaski na siebie, który nie leży na żadnej z osi symetrii wzoru.

Z tego względu, mimo że obroty o wielokrotności kąta  $\frac{2\pi}{n}$  wokół punktu kalejdoskopowego też są symetriami wzoru płaskiego, środki tych obrotów nie są punktami obrotowymi.

Podobnie jak wyżej, w jednym wzorze możemy mieć do czynienia z punktami obrotowymi różnych krotności, ale i punktami obrotowymi tej samej krotności ale różnego rodzaju.

### Specjalne symetrie z poślizgiem

We wzorach płaskich mogą występować także *specjalne symetrie z poślizgiem*, tzn. takie symetrie z poślizgiem przekształcające wzór sam na siebie, których osie są rozłączne z lustrami wzoru.

## 2.2 Lista rodzajów typów symetrii wzorów płaskich

Wstępną klasyfikację typów symetrii wzorów płaskich determinuje występowanie bądź niewystępowanie w tych wzorach czterech następujących cech:

- pojedynczych luster (L);
- punktów kalejdoskopowych (K);
- punktów obrotowych (O);
- specjalnych symetrii z poślizgiem (S).

Mamy zatem do dyspozycji cztery cechy: L, K, O i S, które potencjalnie mogą występować lub nie występować wśród symetrii wzorów, w dowolnych kombinacjach. Aby zliczyć wszystkie możliwe rodzaje typów symetrii wzorów płaskich wystarczy dodać:

- 1 możliwość nie występowania żadnej z 4 cech symetrii;
- 4 możliwości występowania dokładnie jednej cechy symetrii;
- $\binom{4}{2} = 6$  możliwości występowania dwóch z 4 cech symetrii;
- $\binom{4}{3} = 4$  możliwości występowania trzech z 4 cech symetrii;
- 1 możliwość występowania wszystkich 4 cech symetrii.

Razem 16 rodzajów typów symetrii wzorów płaskich, odpowiednio:

1.  $\emptyset$
2. L
3. K
4. O
5. S
6. LK
7. LO
8. KO
9. LS
10. KS
11. OS
12. LKO
13. LKS
14. LOS
15. KOS
16. LKOS

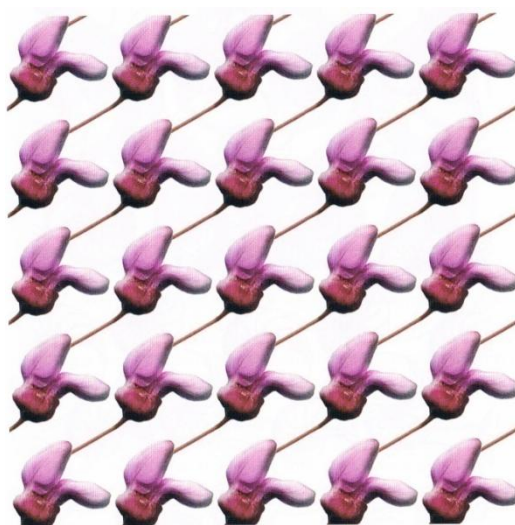


## 2.3 Potencjalne typy symetrii wzorów płaskich i ich oznaczenia

Omówimy teraz każdy z rodzajów typów symetrii wzorów płaskich oraz wprowadzimy oznaczenia będące ścisłym językiem opisu typów symetrii potencjalnie możliwych w ramach danego rodzaju.

### 1. Brak występowania cech symetrii ( $\emptyset$ )

Jeśli we wzorze płaskim nie znaleźliśmy żadnej z cech (pojedynczych luster, punktów kalejdoskopowych, obrotowych, bądź specjalnych symetrii z poślizgiem), jedynymi symetriami takiego wzoru są translacje. Zauważmy, że aby wypełnić całą płaszczyznę translacji musi być nieskończenie wiele. Rysunek 2.3.1 jest przykładem wzoru płaskiego w którym jako symetrie możemy zaobserwować jedynie translacje. Wzór tego typu będziemy oznaczać po prostu pustym kółkiem  $\circ$ .



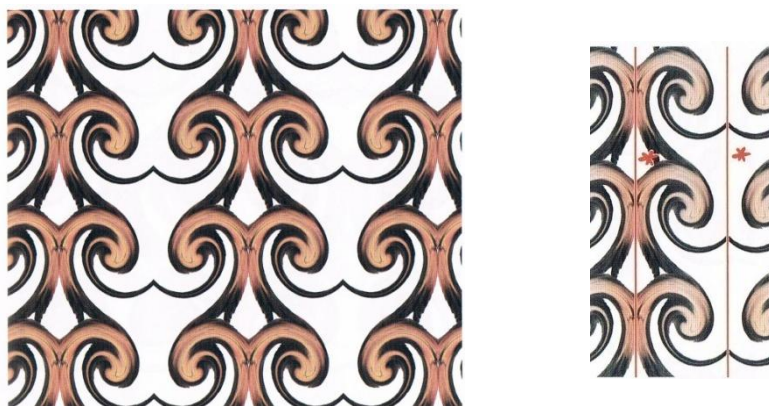
Rysunek 2.3.1

### 2. Typy symetrii rodzaju (L)

Przypomnijmy, że we wzorach o takich typach symetrii występują pojedyncze lustra, ale nie występują ani punkty kalejdoskopowe, ani obrotowe, ani specjalne symetrie z poślizgiem. Każde pojedyncze lustro jednego rodzaju występujące we wzorze płaskim będziemy oznaczać znakiem  $*$ . Jeśli więc rodzajów takich luster jest  $l$ , w oznaczeniu wystąpi  $l$  gwiazdek.

Przyjrzyjmy się teraz Rysunkowi 2.3.2. Zauważmy, że występuje tu nieskończenie wiele pojedynczych osi symetrii jednego rodzaju i nieskończenie wiele pojedynczych osi symetrii rodzaju drugiego, natomiast pozostałe cechy symetrii nie występują. Ponieważ istnieją dwa rodzaje nieprzecinających się luster, oznaczeniem tego wzoru jest  $**$ .

Oznaczeniem wzorów płaskich, w których możemy wyróżnić jedynie pojedyncze lustra, będą zatem ciągi  $**...*$ , gdzie liczba gwiazdek jest liczbą luster różnego rodzaju.



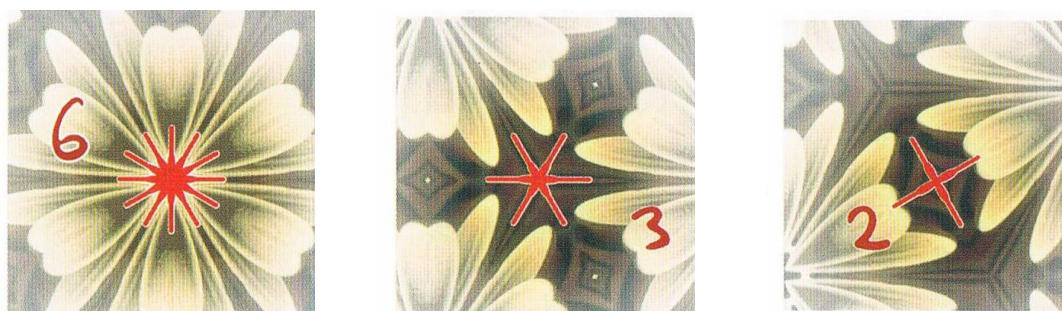
Rysunek 2.3.2

### 3. Typy symetrii rodzaju (K)

Spójrzmy na poniższy wzór płaski (Rysunek 2.3.3). W tym wzorze możemy wyróżnić trzy rodzaje punktów kalejdoskopowych, odpowiednio 6, 3 i 2-krotnych (Rysunek 2.3.4) i nie występuje już nic innego. W sygnaturze umieszczamy znak \*, oznaczający lustrzane odbicia, zaraz za którą wymieniamy liczby będące krotnościami (rzędami) wszystkich rodzajów punktów kalejdoskopowych występujących we wzorze. Oznaczeniem tego wzoru płaskiego będzie więc \*632.



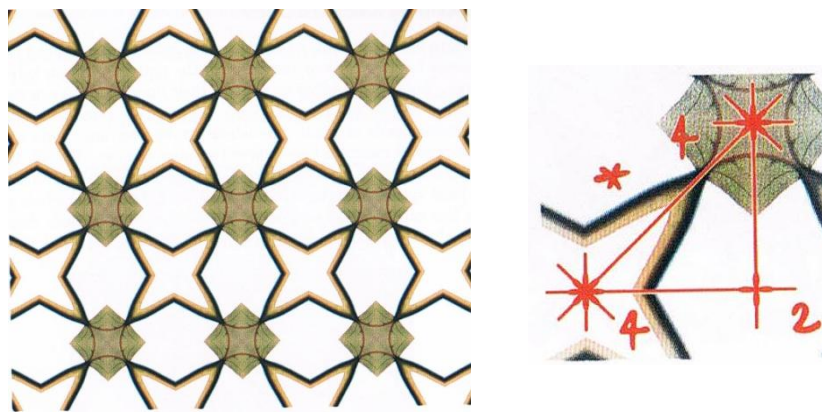
Rysunek 2.3.3



Rysunek 2.3.4

Liczby oznaczające krotność punktów kalejdoskopowych mogą być podane w dowolnej kolejności, tzn. oznaczenie \*632 jest równoznaczne oznaczeniu \*263 itp., jednak dla uproszczenia będziemy zawsze zapisywać je od największej do najmniejszej.

Przyjrzyjmy się teraz następnemu wzorowi (Rysunek 2.3.6). Oprócz 2-krotnego punktu kalejdoskopowego mamy jeszcze dwa różne rodzaje kalejdoskopowych punktów 4-krotnych (nie występuje już nic innego), stąd sygnaturą tego wzoru jest \*442.



Rysunek 2.3.6

Zaznaczmy, że jeżeli we wzorze jest więcej rodzajów punktów kalejdoskopowych o danej krotności  $n$ , to liczbę  $n$  wpisujemy do sygnatury tyle razy ile jest tych rodzajów.

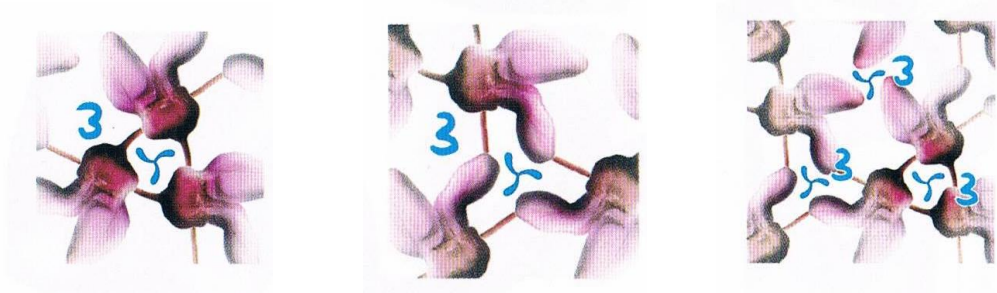
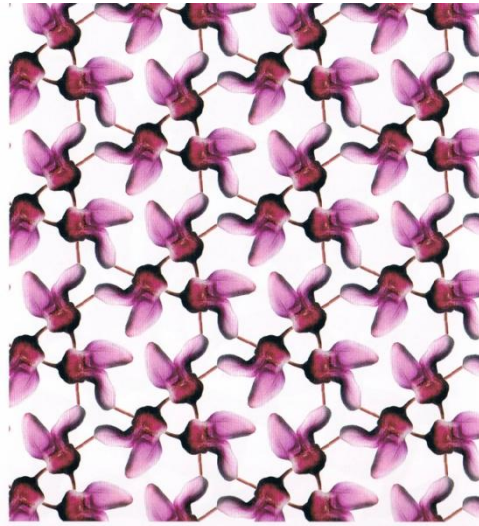
Wszystkie oznaczenia wzorów płaskich typu kalejdoskopowego będą miały zatem postać: \* $ABC...N$ , gdzie  $ABC...N$  to liczby oznaczające krotności wszystkich punktów kalejdoskopowych różnego rodzaju występujących we wzorze.

#### 4. Typy symetrii rodzaju (O)

Przyjrzyjmy przedstawionemu poniżej wzorowi płaskiemu (Rysunek 2.3.7). Obrót o  $120^\circ$  wokół zaznaczonego punktu powoduje przekształcenie wzoru na samego siebie. Jest to zatem punkt obrotowy trzeciego rzędu. We wzorze widzimy jednak jeszcze dwa punkty obrotowe o tej samej krotności lecz innego rodzaju. Mamy zatem trzy rodzaje 3-krotnych punktów obrotowych (nie występuje już nic innego), stąd oznaczeniem tego wzoru będzie 333.

Zaznaczmy, że jeżeli we wzorze jest więcej rodzajów punktów kalejdoskopowych o danej krotności  $n$ , to liczbę  $n$  wpisujemy do sygnatury tyle razy ile jest tych rodzajów.





Rysunek 2.3.7

Sygnatury wzorów płaskich, w których występują jedynie obroty będą zatem wyglądać następująco:  $abc\dots n$ , gdzie  $abc\dots n$  to krotności poszczególnych punktów obrotowych różnego rodzaju.

##### 5. Typy symetrii rodzaju (S)

Jeżeli jedyną cechą wzoru płaskiego jest obecność specjalnej symetrii z poślizgiem, taki wzór będziemy oznaczać znakiem  $xx$ . Poniższy wzór (Rysunek 2.3.8) jest przykładem tego typu wzoru płaskiego.



Rysunek 2.3.8

## 6. Typy symetrii rodzaju (LK)

Wzory płaskie, które zawierałyby jednocześnie pojedyncze lustra (\*) jak i punkty kalejdoskopowe (i nic więcej) przyjmują sygnatury  $*ABC...N**...*$ , ponieważ, jak ustaliliśmy już poprzednio, liczby występujące po znaku \* oznaczają krotności punktów kalejdoskopowych poszczególnych rodzajów, a same znaki\* (bez następujących po nich liczb) pojedyncze lustra poszczególnych rodzajów.

## 7. Typy symetrii rodzaju (LO)

Przyjrzyjmy się teraz wzorom płaskim, w których występują jedynie pojedyncze lustra i punkty obrotowe. Rysunek 2.3.9 przedstawia wzór o nieskończenie wielu pojedynczych lustrach, ale przyglądając się uważnie, zauważymy, że są one wszystkie tego samego rodzaju. Oprócz tego możemy wyróżnić także dwa rodzaje 2-krotnych punktów obrotowych. We wzorze nie występuje już żadna inna cecha, stąd oznaczenie tego wzoru to  $22^*$ .



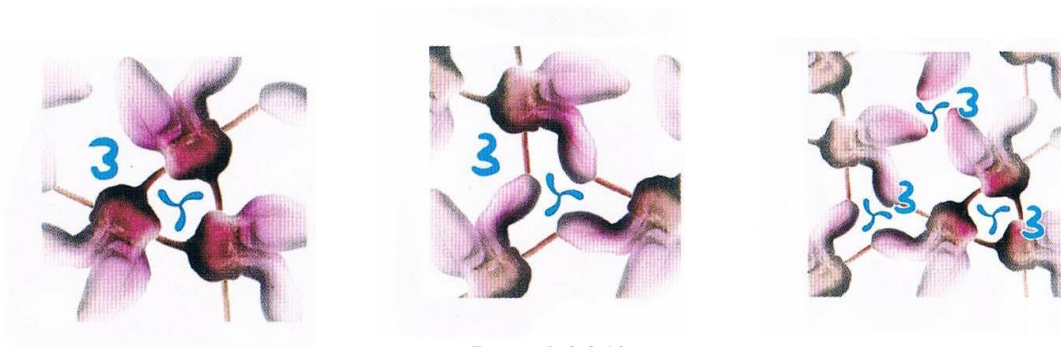
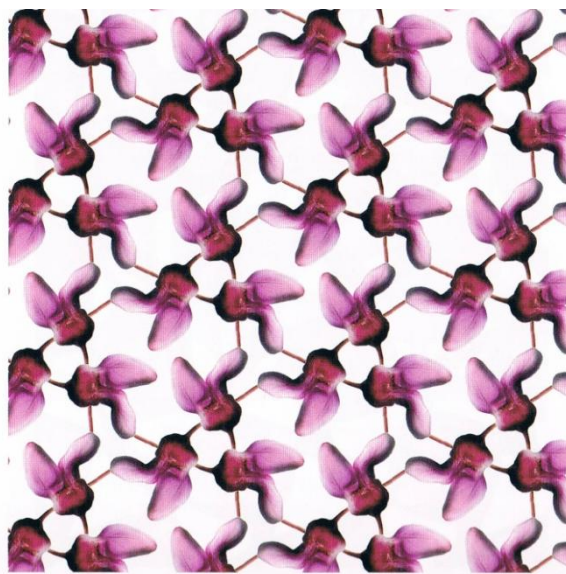
Rysunek 2.3.9

Sygnatury tego typu wzorów płaskich będą wyglądały więc następująco:  $abc...n**...*$ , gdzie  $abc...n$  to rzędy poszczególnych punktów obrotowych, a liczba gwiazdek odpowiada liczbie pojedynczych luster różnego rodzaju występujących we wzorze.

## 8. Typy symetrii rodzaju (KO)

Przyjrzyjmy się wzorom płaskim „zbudowanym” jedynie z punktów kalejdoskopowych i obrotowych. W poniższym wzorze (Rysunek 2.3.10) występują punkty kalejdoskopowe trzeciego rzędu, ale wszystkie są tego samego rodzaju, zatem typ kalejdoskopu to  $*3$ . Symetria tego wzoru nie jest czysto kalejdoskopowa. Pomiędzy figurami istnieje jeszcze punkt, wokół którego obrót o  $120^\circ$  przekształca cały wzór na siebie. To punkt obrotowy trzeciego rzędu. We wzorze nie występuje już więcej cech, więc sygnatura całego wzoru to  $3^*3$  – jeden rodzaj 3-krotnego punktu obrotowego i jeden rodzaj 3-krotnego punktu kalejdoskopowego.

Wzory płaskie posiadające punkty kalejdoskopowe i obrotowe (i nic innego) będziemy oznaczać podając na początku sygnatury krotności punktów obrotowych różnego rodzaju, a następnie, po symbolu \*, krotności punktów kalejdoskopowych różnego rodzaju:  $abc...n*ABC...N$ .



Rysunek 2.3.10

9. Typy symetrii rodzaju (LS)

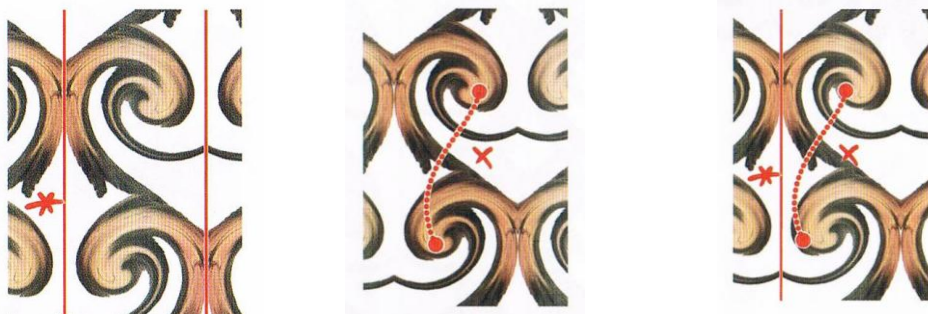


Rysunek 2.3.11

Powyższy wzór (Rysunek 2.3.11) wygląda na pierwszy rzut oka podobnie do wzoru z rysunku 2.3.2, którego oznaczenie to \*\*. Zauważmy jednak, że wszystkie występujące osie symetrii są tak naprawdę jednego rodzaju (zatem w sygnaturze



będzie występowała tylko jedna gwiazdka). Możemy tu znaleźć coś jeszcze. Lewa połowa serca z łatwością przekształci się w występującą powyżej/poniżej niej prawą połowę za pomocą specjalnej symetrii z poślizgiem (Rysunek 2.3.12). Ponieważ we wzorze nie występują już żadne inne cechy symetrii, oznaczenie tego wzoru to  $*x$ .



Rysunek 2.3.12

Sygnatury wzorów płaskich, w których występują tylko pojedyncze lustra i symetrie z poślizgiem będą wyglądać tak:  $**...*x$ , gdzie liczba gwiazdek odpowiada liczbie pojedynczych lusterek różnego rodzaju, a krzyżyk wskazuje na występowanie we wzorze specjalnej symetrii z poślizgiem.

#### 10. Typy symetrii rodzaju (KS)

Wzory „zbudowane” jedynie przy pomocy symetrii kalejdoskopowych i specjalnych symetrii z poślizgiem, wg wcześniejszych oznaczeń, będą miały sygnatury  $*ABC...Nx$ .

#### 11. Typy symetrii rodzaju (OS)

Wzory płaskie, w których występują tylko punkty obrotowe i specjalne symetrie z poślizgiem będziemy oznaczać wg wzoru  $abc...nx$ .

Poniższy przykład (Rysunek 2.3.13) to wzór o sygnaturze  $22x$ .



Rysunek 2.3.13

#### 12. Typy symetrii rodzaju (LKO)

Takie typy symetrii wzorów płaskich, zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami, przyjmują oznaczenia  $abc...n*ABC...N**...*$ , gdzie  $abc...n$  to rzędy punktów obrotowych wszystkich rodzajów,  $ABC...N$  – rzędy punktów kalejdoskopowych wszystkich rodzajów, a liczba gwiazdek odpowiada liczbie pojedynczych lusterek różnego rodzaju.

13. Typy symetrii rodzaju (LKS)

Wzory płaskie tych typów symetrii oznaczamy sygnaturami  $*ABC...N^{**}...*x$ .

14. Typy symetrii rodzaju (LOS)

Oznaczenie dla tych typów symetrii wzorów płaskich to  $abc...n^{**}...*x$ .

15. Typy symetrii rodzaju (KOS)

Te typy symetrii wzorów płaskich oznaczamy  $abc...n*ABC...Nx$ .

16. Typy symetrii rodzaju (LKOS)

Wzory płaskie w których występują zarówno pojedyncze lustra, jak i punkty kalejdoskopowe, punkty obrotowe i specjalne symetrie z poślizgiem, będą miały sygnatury  $abc...n*ABC...N^{**}...*x$ .

Poniżej przedstawiamy kompletną listę 16 rodzajów typów symetrii wzorów płaskich wraz z oznaczeniami potencjalnych typów symetrii w ramach każdego rodzaju. Większość rodzajów zawiera potencjalnie wiele różnych typów różniących się liczbowymi parametrami występującymi w sygnaturze.

1. T	○
2. L	**...*
3. K	*ABC...N
4. O	abc...n
5. S	xx
6. LK	*ABC...N^{**}...*
7. LO	abc...n^{**}...*
8. KO	abc...n*ABC...N
9. LS	**...*x
10. KS	*ABC...Nx
11. OS	abc...nx
12. LKO	abc...n*ABC...N^{**}...*
13. LKS	*ABC...N^{**}...*x
14. LOS	abc...n^{**}...*x
15. KOS	abc...n*ABC...Nx
16. LKOS	abc...n*ABC...N^{**}...*x



### 3. Magiczne Twierdzenie

W poprzednim rozdziale nauczyliśmy się opisywać poszczególne typy symetrii wzorów płaskich. Od tej pory, aby określić typ symetrii danego wzoru, będziemy posługiwać się po prostu wprowadzonymi oznaczeniami.

Poprawne odczytanie typu symetrii wzoru płaskiego bywa niekiedy skomplikowane. Skąd możemy mieć pewność, że zauważyliśmy wszystkie występujące we wzorze cechy symetrii? Może w gąszczu szlaków i kolorów ukryło się coś jeszcze? Czas zastanowić się także jakie parametry liczbowe mogą znaleźć się w sygnaturach rodzajów typów symetrii, tzn. jak możemy te parametry zawęzić, wyznaczając w ten sposób zbiór wszystkich naprawdę istniejących typów symetrii wzorów płaskich.

W tym rozdziale wprowadzimy pewną Magiczną Teorię, która nie tylko ułatwi nam rozpoznawanie występujących we wzorach płaskich cech symetrii, ale pozwoli także określić, które z opisanych wcześniej 16 rodzajów typów rzeczywiście istnieją i z jakimi parametrami liczbowymi. W tym miejscu nie przedstawiamy jeszcze żadnego dowodu Magicznej Teorii. Przeprowadzimy natomiast dokładną prezentację na czym ona polega, jak można jej używać i co wnosi do omawianego przez nas problemu typów symetrii wzorów płaskich.

#### 3.1 Cennik symetrii i cena wzoru płaskiego

Wyobraźmy sobie, że chcemy stworzyć piękną nieskończoną posadzkę w postaci wzoru płaskiego. Niestety wszystko ma swoją cenę...

Za każdy użyty symbol w oznaczeniu typu wzoru płaskiego musimy zapłacić określoną stawkę. *Ceną wzoru płaskiego* będzie cena całej jego sygnatury, tj. suma cen poszczególnych symboli występujących w sygnaturze.

Oto cennik obowiązujący w sklepie z symetriaми:

Symbol	Cena (\$)	Symbol	Cena (\$)
o	2	* lub x	1
2	$\frac{1}{2}$	2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{2}{3}$	3	$\frac{1}{3}$
4	$\frac{3}{4}$	4	$\frac{3}{8}$
5	$\frac{4}{5}$	5	$\frac{2}{5}$
6	$\frac{5}{6}$	6	$\frac{5}{12}$
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\frac{n-1}{n}$	N	$\frac{N-1}{2N}$

Sprawdźmy zatem jak dużo będziemy musieli zapłacić za omówiony już kwiecisty wzór z Rysunku 2.3.3, którego oznaczenie to \*632. Korzystając z powyższego cennika

otrzymujemy zatem:



$$1 + \frac{5}{12} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 2[\$]$$

To niezbyt dużo, jak za tak piękny wzór!

Zobaczmy ile zapłacimy za użycie wzoru z Rysunku 2.3.10, o oznaczeniu to 3\*3:



$$\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 2[\$]$$

Obliczmy jeszcze cenę dwóch innych przykładowych wzorów, o oznaczeniach 2\*2 i \*x (wzór z Rysunku 2.3.12), odpowiednio:



$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2[\$]$$



$$1 + 1 = 2[\$]$$

Powyższe przykłady każą nam przypuszczać, że być może niezależnie od występujących we wzorze cech symetrii, cena wzoru płaskiego pozostaje zawsze taka sama.

## 3.2 Magiczne Twierdzenie

Przyjęcie wysnute w poprzednim podrozdziale, wprowadzamy teraz jako Magiczne Twierdzenie. Magiczne, ponieważ, jak wspomnieliśmy wcześniej, w tym miejscu nie przeprowadzimy jeszcze dowodu tego twierdzenia, będziemy za to szeroko z niego korzystać.

**Twierdzenie 3.2.1 (Magiczne Twierdzenie)** *Cena sygnatury typu symetrii wzoru płaskiego wynosi zawsze dokładnie 2\$.*

Przykładem zastosowania Magicznego Twierdzenia jest znaczne ułatwienie w znajdowaniu oznaczenia typu symetrii danego wzoru płaskiego. Od tej pory z łatwością będziemy mogli sprawdzić, czy oznaczenie, które znaleźliśmy jest prawidłowe, a poszukiwania występujących we wzorze cech symetrii będziemy mogli zatrzymać, kiedy wydamy już całe 2 dolary. Jeśli nie wydaliśmy wszystkiego, wiemy że zostało nam jeszcze coś do odkrycia.

Przyjrzyjmy się poniższemu wzorowi (Rysunek 3.2.1). Załóżmy, że na początku jedyne co zauważyliśmy, to dwa rodzaje obrotów drugiego rzędu. Sprawdzamy nasze podejrzenie: ile kosztowałby wzór o oznaczeniu 22?

Oczywiście  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1[\$]$ , zatem powinniśmy poszukać jeszcze czegoś o wartości 1\$. Spójrzmy na zaznaczone na rysunku listki – rzeczywiście, świadczą one o występowaniu specjalnej symetrii z poślizgiem. Ostatecznie oznaczenie tego wzoru to 22x, które kosztuje dokładnie 2\$.



Rysunek 3.2.1

Główne zastosowanie Magicznego Twierdzenia będzie jednak znacznie ważniejsze. Magiczne Twierdzenie pozwoli nam bowiem zliczyć i dokładnie wskazać wszystkie typy symetrii wzorów płaskich.

### 3.3 Typy symetrii wzorów płaskich

Korzystając z Magicznego Twierdzenia wykażemy teraz które z rodzajów typów symetrii mogą rzeczywiście istnieć oraz z jakimi parametrami liczbowymi, tzn. znajdziemy wszystkie typy symetrii wzorów płaskich. Jedyne czego będziemy tu potrzebować to prosta arytmetyka.

Z listy 16 rodzajów potencjalnych typów symetrii wzorów płaskich możemy wykluczyć te, które nie mogą spełnić warunku o cenie całej sygnatury wzoru płaskiego wynoszącej dokładnie 2\$ (Twierdzenie 3.2.1). Wykluczyć możemy typy symetrii rodzaju:

- (LK) o sygnaturach  $*ABC...N**...*$  – w sygnaturach wzorów o takim rodzaju typu symetrii muszą występować co najmniej dwa znaki  $*$  (jedna oznaczająca występowanie we wzorze punktów kalejdoskopowych, druga - występowanie pojedynczego lustra) co razem daje już 2\$, a musimy dodać do tego jeszcze przynajmniej jedną cenę odpowiadającą punktowi kalejdoskopowemu;
- (KS) o sygnaturach  $*ABC...N\mathbf{x}$  – cena znaku  $*$  i cena znaku  $\mathbf{x}$  dają w sumie 2\$, a musimy dodać jeszcze przynajmniej jedną cenę za punkt kalejdoskopowy;
- (LKO) o sygnaturach  $abc...n*ABC...N**...*$  – podobny argument jak w przypadku typów symetrii rodzaju (LK);
- (LKS) o sygnaturach  $*ABC...N**...*\mathbf{x}$  – w sygnaturze muszą wystąpić co najmniej dwa znaki  $*$  (punkty kalejdoskopowe i pojedyncze lustra) i co najmniej jeden znak  $\mathbf{x}$ , co w sumie daje już 3\$;
- (LOS) o sygnaturach  $abc...n**...*\mathbf{x}$  – cena znaku  $*$  i cena znaku  $\mathbf{x}$  dają w sumie 2\$, a musimy dodać jeszcze co najmniej jedną cenę za punkt obrotowy;
- (KOS) o sygnaturach  $abc...n*ABC...N\mathbf{x}$  – podobny argument jak w przypadku typów symetrii rodzaju (LOS);
- (LKOS) o sygnaturach  $abc...n*ABC...N**...*\mathbf{x}$  – podobny argument jak w przypadku typów symetrii rodzaju (LKS).

Omówmy teraz rodzaje typów symetrii wzorów płaskich mogące spełniać Magiczne Twierdzenie.

Wzory, których jedynymi symetriami są translacje (rodzaj ( $\emptyset$ ))

Jeśli wśród symetrii wzoru występują jedynie translacje, jego oznaczeniem musi być  $\emptyset$ , a ponieważ cena kółka wynosi 2\$ nie mamy więcej środków do wykorzystania. Rysunek 3.3.1 przedstawia przykład wzoru tego typu.



Rysunek 3.3.1

### Wzory, których jedynymi symetriami są punkty obrotowe (rodzaj (O))

Rozpatrzmy teraz wszystkie wzory płaskie, których sygnatury dotyczą wyłącznie punktów obrotowych. Ich oznaczenia będą zatem ciągami cyfr  $abc\dots n$ , których suma cen musi wynosić 2\$. Łatwo zauważyć, że muszą to być ciągi co najmniej 3 liczbowe, ponieważ cena każdego punktu obrotowego jest mniejsza niż 1.

Na początku przyjrzyjmy się zatem ciągom złożonym z dokładnie trzech liczb  $abc$ . Korzystając z cennika symetrii, możemy zapisać:

$$\frac{a-1}{a} + \frac{b-1}{b} + \frac{c-1}{c} = 2 \quad , \text{gdzie } a, b, c \in \mathbb{N} \text{ i } a, b, c > 1 .$$

$$\text{Stąd: } 1 - \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{b} + 1 - \frac{1}{c} = 2$$

$$\text{czyli } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 .$$

Jakie trzy ułamki z jednością w liczniku po zsumowaniu dadzą wynik 1? Zastanówmy się najpierw jaki jest najmniejszy ułamek, który może znajdować się w polu naszych poszukiwań. Odejmując wartość tego najmniejszego ułamka od 1 otrzymamy wielkość, która będzie sumą pozostałych dwóch ułamków. Największą sumą (mniejszą od 1!) jaką mogą dać dwa ułamki powyższej postaci jest oczywiście suma dwóch największych ułamków tj.  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ .

W rozwiązywaniu równania jest zatem sens rozpatrywać tylko ułamki o mianowniku nie większym niż 6, tj.  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{5}$  i  $\frac{1}{6}$ . Nietrudno zauważyć, że możliwe rozwiązania to:

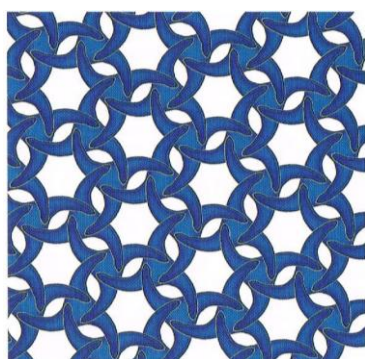
$$\frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \quad , \text{co odpowiada ciągowi liczb 632;}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \quad , \text{co odpowiada ciągowi liczb 442;}$$

$$\text{oraz } \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \quad , \text{co odpowiada ciągowi liczb 333.}$$

Jeśli natomiast ciąg liczb  $abc\dots z$  jest złożony z więcej niż trzech liczb, jedynym możliwym oznaczeniem jest 2222, ponieważ każda możliwa liczba tego oznaczenia kosztuje co najmniej  $\frac{1}{2}$  \$.

Pokazaliśmy tym samym, że jedyne możliwe sygnatury tego rodzaju wzorów płaskich, to 632, 442, 333 i 2222. Aby nie zatrzymywać się jedynie na samych oznaczeniach, poniżej prezentujemy odpowiadające im wzory:

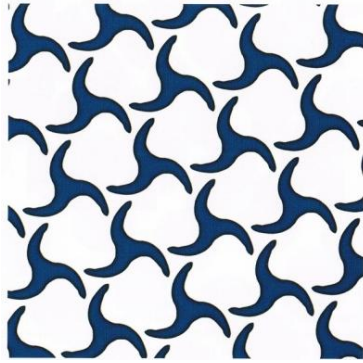


632

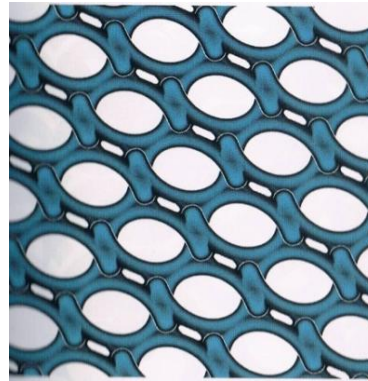


442





333



2222

Wzory z pojedynczymi lustrami i punktami kalejdoskopowymi (rodzaje (L) i (K))

Rozpatrzmy teraz wszystkie typy symetrii, których cechy dotyczą jedynie odbić. Korzystając z cennika symetrii zauważamy, że jedynym możliwym oznaczeniem zawierającym dwie gwiazdki jest \*\*, ponieważ cena każdej gwiazdki wynosi 1. Pozostałe oznaczenia będą więc miały postać \*ABC...N.

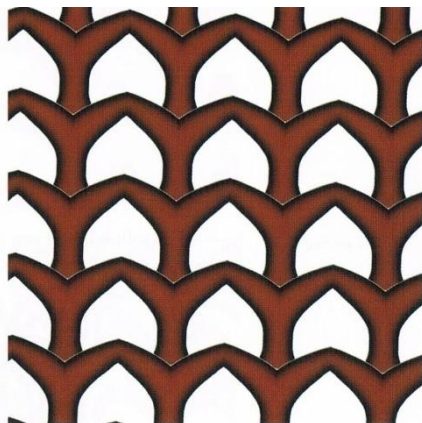
Korzystając z Magicznej Teorii:

$$1 + \frac{A-1}{2A} + \dots + \frac{N-1}{2N} = 2 ,$$

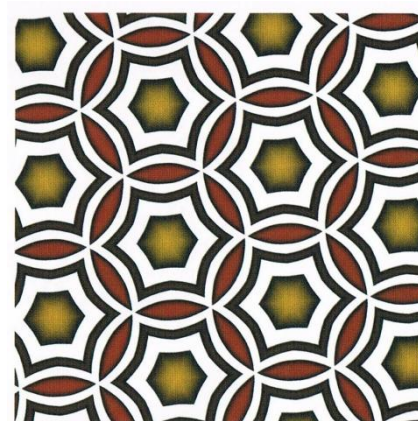
stąd 
$$\frac{A-1}{A} + \dots + \frac{N-1}{N} = 1 .$$

Możliwe oznaczenia kalejdoskopowych wzorów płaskich są zatem podobne do tych obrotowych, kolejno \*632, \*422, \*333, \*2222. Nie jest to niczym zadziwiającym, ponieważ każda obrotowa symetria kosztuje dwa razy więcej niż symetria kalejdoskopowa, a z kolei sam symbol \* kosztuje połowę z 2\$.

Poniżej przedstawiamy przykłady wzorów dla wszystkich „odbiciowych” oznaczeń, kolejno \*\*, \*632, \*442, \*333 i \*2222.



\*\*



\*632



\*442



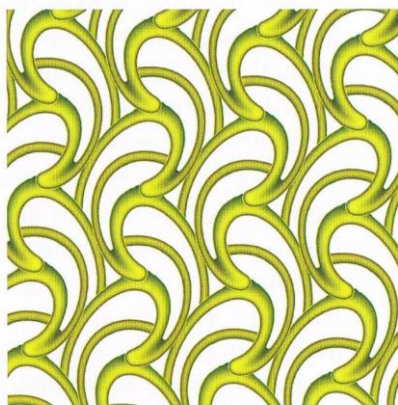
\*333



\*2222

Wzory, których jedynymi symetrami są specjalne symetrie z poślizgiem (rodzaj (S))

Jeśli wśród cech symetrii wzoru występują jedynie specjalne symetrie z poślizgiem, jego sygnaturą musi być  $xx$ , a ponieważ cena każdego znaku  $x$  wynosi 1\$, nie mamy więcej środków do wykorzystania. Rysunek 3.3.2 przedstawia przykład wzoru tego typu.

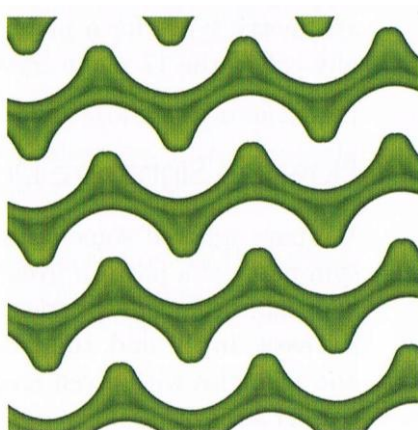


Rysunek 3.3.2

### Wzory z pojedynczymi lustrami i punktami obrotowymi (rodzaj (LO))

Wzory tego rodzaju mają sygnatury  $abc...n^{**}...^*$ . Ponieważ cena jednego znaku  $*$  wynosi 1, a w sygnaturze musi znaleźć się jeszcze co najmniej jedno oznaczenie punktu obrotowego, może w niej wystąpić tylko jeden znak  $*$ . Ceny przypisane poszczególnym punktom obrotowym muszą zatem sumować się do 1, a ponieważ każda taka cena jest większa lub równa  $\frac{1}{2}$  i mniejsza od 1, to jedyną możliwością jest  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$ , czyli dwa punkty obrotowe drugiego rzędu.

Oznaczeniem tego typu wzoru będzie więc  $22^*$ , a poniżej przedstawiamy przykład tego typu wzoru (Rysunek 3.3.3).



Rysunek 3.3.3

### Wzory z punktami kalejdoskopowymi i punktami obrotowymi (rodzaj (KO))

Wzory tego rodzaju mają sygnatury  $abc...n^*ABC...N$ . Sam znak  $*$  kosztuje 1, więc ceny przypisane poszczególnym punktom obrotowym i poszczególnym punktom kalejdoskopowym muszą sumować się do 1. Ponieważ oznaczenie każdego punktu obrotowego ma ceną większą bądź równą  $\frac{1}{2}$ , a w sygnaturze musi wystąpić jeszcze co najmniej jedna liczba odpowiadająca punktowi kalejdoskopowemu, liczba odpowiadająca punktowi obrotowemu może występować dokładnie jedna. Spójrzmy na cennik symetrii z podrozdziału 3.1.

Dla punktu obrotowego rzędu 2 ( $a = 2$ ), jedynymi wartościami  $A$  i  $B$  mogą być  $A = 2$  i  $B = 2$ , bo tylko  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$ . Oznaczeniem tego typu wzoru jest więc  $2^*22$ .

Dla punktu obrotowego rzędu 3 ( $a = 3$ ), jedyną wartością  $A$  może być  $A = 3$ , bo tylko  $\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$ . Oznaczeniem tego typu wzoru jest więc  $3^*3$ .

Dla punktu obrotowego rzędu 4 ( $a = 4$ ), jedyną wartością  $A$  może być  $A = 2$ , bo tylko  $\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$ . Oznaczeniem tego typu wzoru jest więc  $4^*2$ .

Dla punktów obrotowych o krotności większej niż 4 nie znajdziemy odpowiedniej krotności punktu kalejdoskopowego, ponieważ cena oznaczenia punktu obrotowego krotności większej niż 4 jest większa niż  $\frac{3}{4}$ , a dla cena oznaczenia każdego punktu kalejdoskopowego jest większa lub równa  $\frac{1}{4}$ .

Pokazaliśmy tym samym, że jedyne możliwe sygnatury tego rodzaju wzorów płaskich to  $2^*22$ ,  $3^*3$ ,  $4^*2$ . Poniżej przedstawiamy odpowiadające im wzory.





2\*22



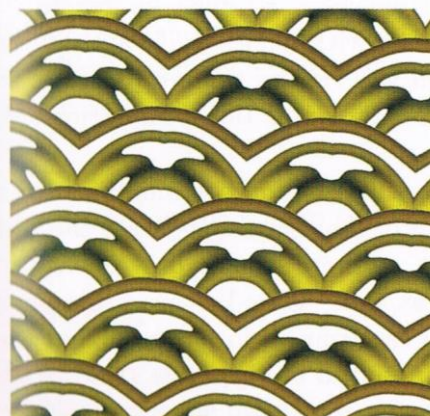
3\*3



4\*2

#### Wzory z pojedynczymi lustrami i specjalną symetrią z poślizgiem (rodzaj (LS))

Wzory tego rodzaju mają sygnatury  $**...*\mathbf{x}$ . Ponieważ w sygnaturze musi wystąpić co najmniej jeden znak  $*$  i co najmniej jeden znak  $\mathbf{x}$ , a cena zarówno znaku  $*$  jak i znaku  $\mathbf{x}$  wynosi 1, jedyną możliwą sygnaturą jest  $*\mathbf{x}$ . Rysunek 3.3.4 przedstawia przykład tego typu wzoru płaskiego.



Rysunek 3.3.4

### Wzory z punktami obrotowymi i specjalnymi symetriami z poślizgiem (rodzaj (OS))

Wzory tego rodzaju mają sygnatury  $abc...nx$ . Cena znaku  $x$  wynosi 1, więc ceny przypisane odpowiednim punktom obrotowym muszą sumować się do 1. Ponieważ każda taka cena jest większa bądź równa  $\frac{1}{2}$  oraz mniejsza niż 1, to jedyną możliwością jest  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ . Sygnaturą tego typu wzoru jest więc  $22x$ . Rysunek 3.3.5 przedstawia przykład tego typu wzoru płaskiego.



Rysunek 3.3.5

W ten sposób wyczerpaliśmy już wszystkie możliwości otrzymania  $2\mathcal{S}$  z sumowanych wartości oznaczeń. Zliczając je wszystkie, otrzymujemy dokładnie 17 różnych typów wzorów płaskich.

Typy wzorów płaskich:

o	632	442	333	2222
**	*632	*442	*333	*2222
4*2	3*3	2*22	22*	
22x	*x	xx		

Magiczna Teoria pozwoliła nam zatem znaleźć dokładną liczbę typów symetrii wzorów płaskich i dokładnie je wskazać.

### 3.4 O czym mówi podana sygnatura

Przy posługiwaniu się wprowadzonymi oznaczeniami, warto zastanowić się co o wyglądzie wzoru płaskiego mówi nam sama jego sygnatura. Do jakiego stopnia jesteśmy w stanie odtworzyć pierwotny wzór znając jedynie jego oznaczenie? Odpowiedź nie wydaje się być trudna. Oczywiście nie jesteśmy w stanie powiedzieć nic o kolorach czy fakturze wzoru, ale na pewno możemy powiedzieć coś o kształcie powtarzającego się na płaszczyźnie wzorca.

W przypadku punktów kalejdoskopowych i występujących z nimi punktów obrotowych problem sprowadza się jedynie do znalezienia odpowiednich prostokątów i trójkątów. Zauważmy dwa następujące fakty.

**Fakt 3.4.1** Jeśli wzór płaski posiada punkty kalejdoskopowe, to osie symetrii tego wzoru dzielą płaszczyznę na przystające wielokąty wypukłe.

Rozważmy jeden z obszarów, na które podzieliły płaszczyznę osie symetrii wzoru. Oznaczmy go przez  $W_0$  i zauważmy, że jest on wielokątem wypukłym. Obrazy  $W_0$  w symetrii względem osi zawierających jego boki też muszą być obszarami powstałymi z podziału płaszczyzny powyższymi osiami symetrii wzoru. Kontynuując to rozumowanie pokryjemy całą płaszczyznę przystającymi do  $W_0$  wielokątami, z których każdy jest obszarem powstałym z podziału płaszczyzny osiami symetrii wzoru, a to już oznacz teżę Faktu 3.4.1.

**Fakt 3.4.2** W  $n$ -kącie wypukłym dla  $n > 4$  musi pojawić się kąt rozwarty, a dla  $n = 4$  albo pojawia się kąt rozwarty albo wszystkie kąty wielokąta są kątami prostymi.

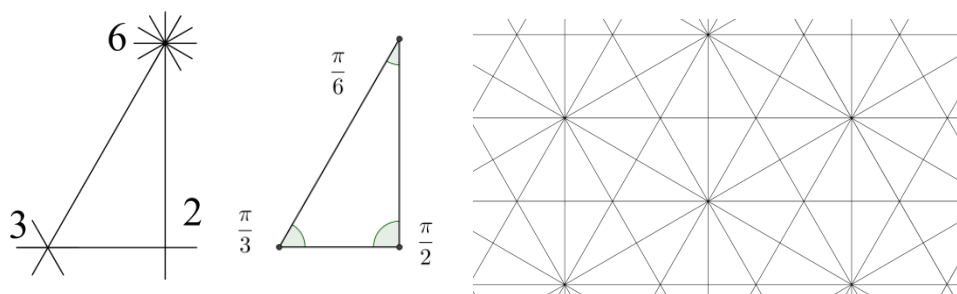
Powyższy fakt wynika z tego, suma kątów wewnętrznych w  $n$ -kącie wynosi  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ . W  $n$ -kącie dla  $n \geq 4$  średnia rozwartość kąta wynosząca  $\frac{(n-2) \cdot 180^\circ}{n}$  jest zatem większa niż  $90^\circ$ , albo równa  $90^\circ$  dla czworokąta.

Omówmy poszczególne sygnatury wzorów płaskich.

#### Sygnatura \*632

Przypatrzmy się lepiej sygnaturze \*632, w której występują tylko punkty kalejdoskopowe. „6” oznacza 6 luster przecinających się w jednym punkcie. Miara kąta między kolejnymi lustrami to  $\frac{1}{12}$  z  $2\pi$ , czyli  $\frac{\pi}{6}$ . Kąty wyznaczone przez pozostałe punkty kalejdoskopowe mają miary  $\frac{\pi}{3}$  i  $\frac{\pi}{2}$ .

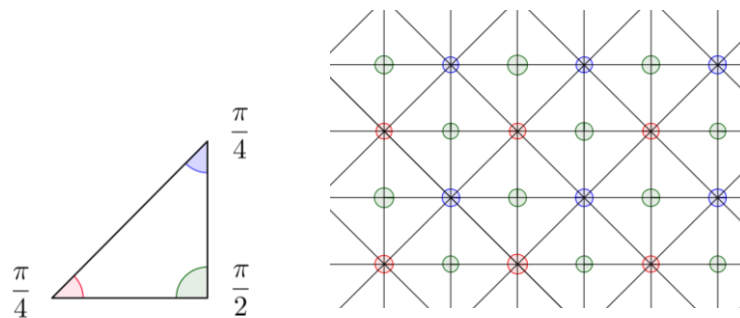
Z Faktu 3.4.1 mamy zatem nieskończoną ilość przystających  $n$ -kątown, w których występują kąty o mierze  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  i  $\frac{\pi}{2}$ . Ponieważ wszystkie te  $n$ -kątown są przystające, w każdym z nich musi występować każdy z kątów  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  i  $\frac{\pi}{2}$ . Z Faktu 3.4.2 widać, że  $n$ -kątown wypukły, w którym występuje każdy z powyższych kątów musi być trójkątem o kątach miary  $\frac{\pi}{6}$ ,  $\frac{\pi}{3}$  i  $\frac{\pi}{2}$ , zaś cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie trójkątown (Rysunek 3.4.1).



Rysunek 3.4.1

### Sygnatura \*442

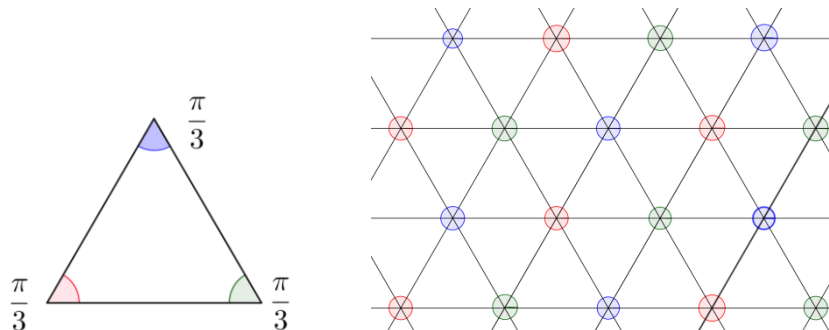
Podobnie dla sygnatury \*442, przy podziale płaszczyzny osiami symetrii (lustrami) wzoru, z Faktu 3.4.1 mamy nieskończoną ilość  $n$ -kątowników wypukłych, w których występują dwa rodzaje kątów o mierze  $\frac{\pi}{4}$  (pochodzące od dwóch różnego rodzaju punktów kalejdoskopowych) i kąty o mierze  $\frac{\pi}{2}$ . Ponieważ wszystkie te  $n$ -kątowniki są przystające, w każdym z nich musi występować kąt  $\frac{\pi}{2}$  oraz dwa rodzaje kątów o mierze  $\frac{\pi}{4}$ . Z Faktu 3.4.2 ten  $n$ -kątownik musi być trójkątem o kątach  $\frac{\pi}{4}$ ,  $\frac{\pi}{4}$  i  $\frac{\pi}{2}$ , zaś cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie trójkąty (Rysunek 3.4.2).



Rysunek 3.4.2

### Sygnatura \*333

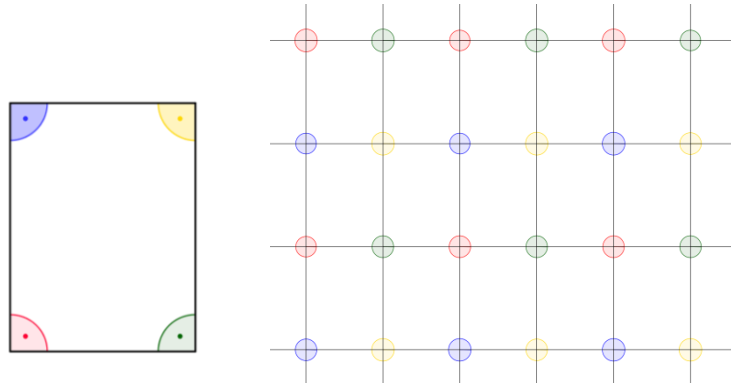
Dla sygnatury \*333 przy podziale płaszczyzny osiami symetrii wzoru mamy przystające  $n$ -kątowniki wypukłe (Fakt 3.4.1) zbudowane z trzech różnego rodzaju kątów o mierze  $\frac{\pi}{3}$ . Ponieważ wszystkie te wielokąty są przystające, w każdym z nich musi znajdować się każdy z trzech rodzajów kątów o mierze  $\frac{\pi}{3}$ . Z Faktu 3.4.2  $n$ -kątownik o trzech kątach miary  $\frac{\pi}{3}$  musi być trójkątem równobocznym, tutaj o trzech kątach różnego rodzaju, zaś cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie trójkąty (Rysunek 3.4.3).



Rysunek 3.4.3

### Sygnatura \*2222

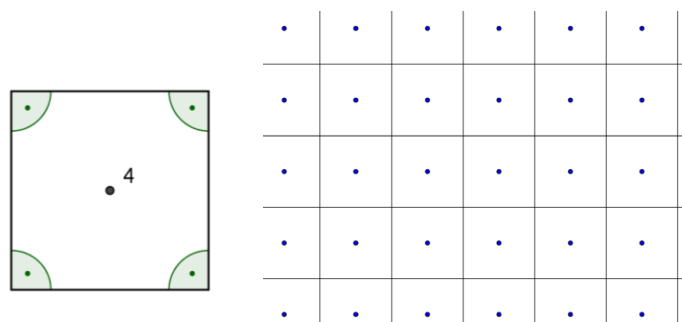
Oznaczenie \*2222 zakłada, że cztery różnego rodzaju punkty kalejdoskopowe wyznaczają cztery różnego rodzaju kąty proste. Z Faktu 3.4.1 wielokąty otrzymane przez rozcięcie płaszczyzny wszystkimi lustrami wzoru są przystające. Z Faktu 3.4.2  $n$ -kąty o samych kątach prostych są prostokątami, przy czym ze względu na ich przystawanie, każdy z czterech kątów prostych prostokąta jest w tym wypadku innego rodzaju. Cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie prostokąty. (Rysunek 3.4.4).



Rysunek 3.4.4

### Sygnatura 4\*2

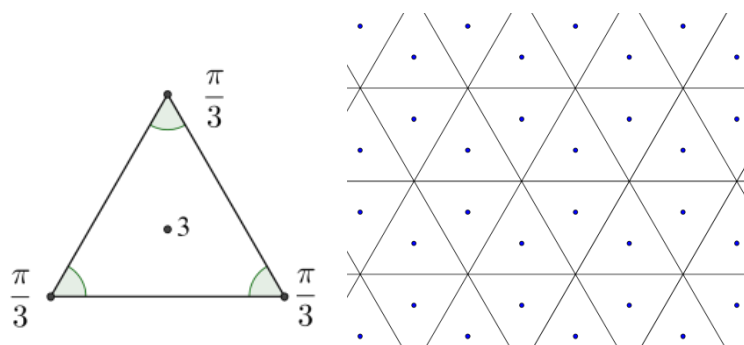
Oznaczenie 4\*2 oznacza, że we wzorze istnieją dwukrotne punkty kalejdoskopowe (wszystkie tego samego rodzaju), wyznaczające kąty miary  $\frac{\pi}{2}$  pomiędzy najbliższymi osiami symetrii. Z Faktu 3.4.1 podział płaszczyzny osiami symetrii wzoru daje przystające  $n$ -kąty wypukłe, których jedynymi kątami są kąty miary  $\frac{\pi}{2}$ . Z Faktu 3.4.2 muszą być one prostokątami, tutaj o kątach prostych jednego rodzaju. We wzorze istnieją jednak także punkty obrotowe czwartego rzędu, które są środkami obrotów o kąt  $\frac{\pi}{4}$ . Ponieważ punkt obrotowy nie może leżeć na osi symetrii, będzie leżał we wnętrzu prostokąta. W takim wypadku jedyną możliwością jest to, że ten prostokąt będzie kwadratem, a punkt obrotowy czwartego rzędu będzie leżał w punkcie przecięcia się przekątnych tego kwadratu. Cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie kwadraty. (Rysunek 3.4.5).



Rysunek 3.4.5

### Sygnatura 3\*3

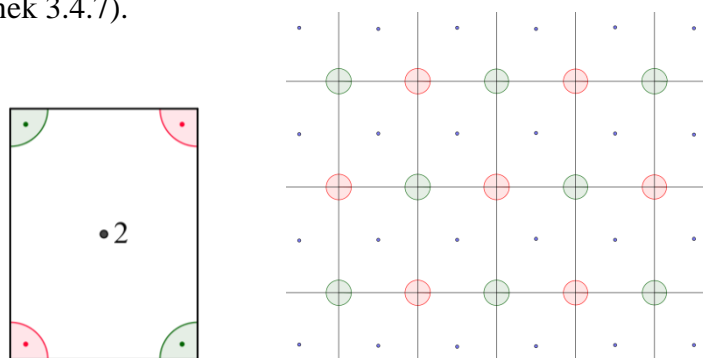
Oznaczenie 3\*3 oznacza, że we wzorze istnieją punkty kalejdoskopowe trzeciego rzędu (wszystkie tego samego rodzaju), które wyznaczają kąty miary  $\frac{\pi}{3}$  pomiędzy najbliższymi osiami symetrii. Z Faktu 3.4.1 podział płaszczyzny osiami symetrii wzoru daje przystające  $n$ -kąty, w których występują jedynie kąty miary  $\frac{\pi}{3}$ . Z Faktu 3.4.2 wielokąty te muszą być trójkątami równobocznymi ( tutaj o wszystkich kątach tego samego rodzaju). Poza tym we wzorze występują także trzykrotne punkty obrotowe, będące środkami obrotów o kąt  $\frac{\pi}{3}$ . Ponieważ nie mogą one leżeć na osiach symetrii muszą leżeć we wnętrzu trójkątów równobocznych, tj. w miejscu przecięcia się wysokości tych trójkątów. Cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie trójkąty. (Rysunek 3.4.6).



Rysunek 3.4.6

### Sygnatura 2\*22

We wzorze płaskim o oznaczeniu 2\*22 mamy do czynienia z dwoma rodzajami punktów kalejdoskopowych drugiego rzędu, które wyznaczają dwa rodzaje kątów o mierze  $\frac{\pi}{2}$  pomiędzy najbliższymi osiami symetrii tego wzoru. Z Faktu 3.4.1 podział płaszczyzny osiami symetrii wzoru daje przystające  $n$ -kąty, w których występują jedynie kąty o mierze  $\frac{\pi}{2}$ . Z Faktu 3.4.2 są to prostokąty (przy czym ze względu na ich przystawanie, w każdym muszą znaleźć się oba rodzaje kątów prostych). We wzorze płaskim tego typu występują też dwukrotne punkty obrotowe, będące środkami obrotów o kąt  $\frac{\pi}{2}$ . Ponieważ nie mogą one leżeć na osiach symetrii będą leżały we wnętrzu prostokątów, a zatem jedyną możliwością jest ich położenie w punkcie przecinania się przekątnych prostokątów. W każdym prostokącie muszą znajdować się oba rodzaje kątów prostych, zatem za względu na obecny punkt obrotowy będą one występowały naprzemiennie. Cały układ osi symetrii wzoru rozcina płaszczyznę na takie właśnie prostokąty. (Rysunek 3.4.7).

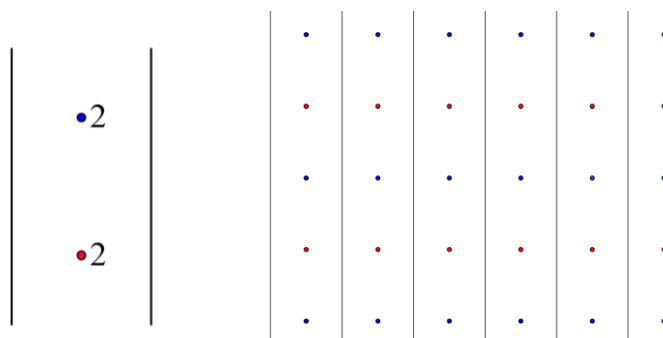


Rysunek 3.4.7



### Sygnatura 22\*

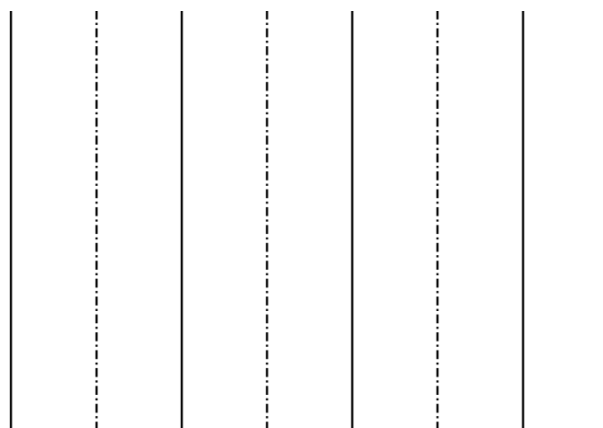
We wzorze płaskim o sygnaturze 22\* mamy do wykorzystania nieprzecinające się lustra jednego rodzaju. Muszą to być zatem równoległe osie symetrii. Po za tym we wzorze występują jeszcze dwa rodzaje dwukrotnych punktów obrotowych. Ponieważ lustra muszą być swoim wzajemnym obrazem w symetrii obrotowej względem tych punktów, to punkty obrotowe muszą leżeć w jednakowej odległości od dwóch najbliższych luster (Rysunek 3.4.8). Odległość pomiędzy punktami obrotowymi różnego rodzaju będzie stała dla danego wzoru, ale może być zróżnicowana dla różnych wzorów.



Rysunek 3.4.8

### Sygnatura \*\*

Wzór o sygnaturze \*\* charakteryzuje się dwoma rodzajami nieprzecinających się luster. Wszystkie lustra występujące we wzorze muszą więc być równoległe, a ponieważ każde lustro w symetrii osiowej względem innego lustra musi być obrazem lustra tego samego rodzaju, lustra muszą leżeć na przemian rodzajami (Rysunek 3.4.9).



Rysunek 3.4.9

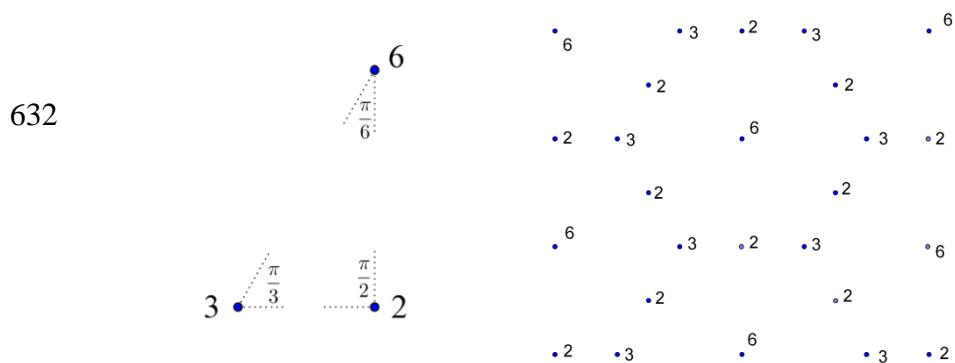
### Sygnatura o

We wzorze płaskim o sygnaturze o nie występuje żadna z cech symetrii (brak pojedynczych luster, punktów kalejdoskopowych, punktów obrotowych i specjalnych symetrii z poślizgiem), a jedynymi symetriami takiego wzoru są translacje. Zauważmy, że aby wypełnić całą płaszczyznę, translacji musi być nieskończenie wiele. Wektory translacji będących symetriami wzoru takiego typu muszą być całkowitymi kombinacjami dwóch wektorów o różnych kierunkach.

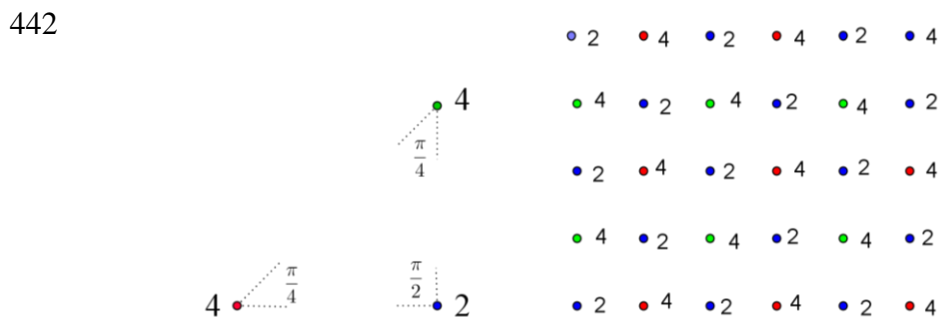
### Pozostałe sygnatury

Dla pozostałych sygnatur przeprowadzenie argumentacji dotyczącej wyglądu ich wzorca jest znacznie trudniejsze i nie będziemy jej przeprowadzać. Ograniczymy się jedynie do pokazania charakterystycznych elementów tych wzorów.

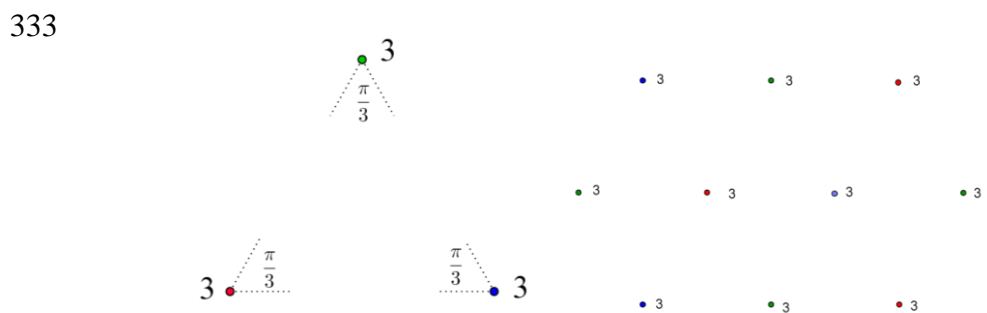
Rysunki 3.4.10-13 przedstawiają wzajemne położenie punktów obrotowych poszczególnych rodzajów, oznaczonych różnymi kolorami, oraz opatrzonych liczbami oznaczającymi ich krotności (a ponieważ inne cechy nie występują w tych czterech typach, więc nic innego nie jest zaznaczone).



Rysunek 3.4.10



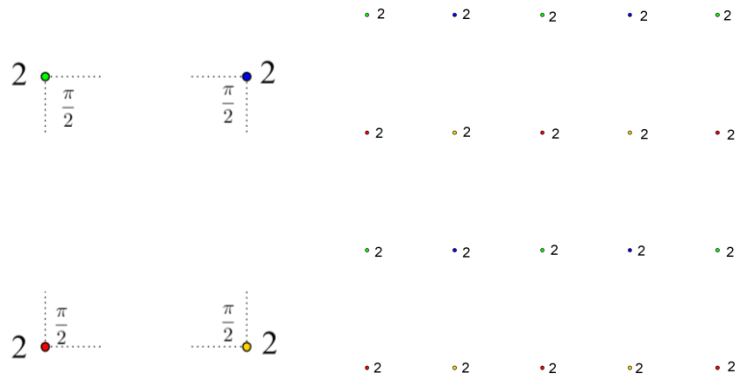
Rysunek 3.4.11



Rysunek 3.4.12



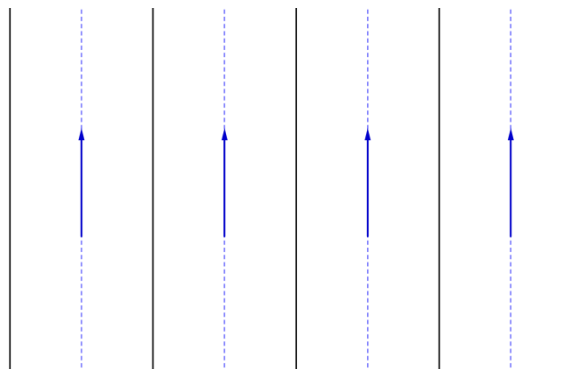
2222



Rysunek 3.4.13

Rysunek 3.4.14 odnosi się do wzorów płaskich posiadających typ symetrii \*x. Czarne linie oznaczają pojedyncze lustro wzoru (tego samego rodzaju), niebieskie przerywane linie oznaczają osie specjalnych symetrii z poślizgiem, a niebieskie strzałki to wektory specjalnych symetrii z poślizgiem.

\*x



Rysunek 3.4.14

Ze względu na skomplikowanie ułożenia elementów charakterystycznych we wzorach 22x i xx, nie będziemy umieszczać tutaj odpowiadających im rysunków.

## 4. Dowód Magicznego Twierdzenia

W tym rozdziale udowodnimy Magiczne Twierdzenie za pomocą dobrze znanego twierdzenia Eulera dotyczącego map.

### 4.1 Orbifold (składka orbit) wzoru płaskiego

We wcześniejszych rozdziałach, przy oznaczaniu typów symetrii wzorów płaskich braliśmy pod uwagę zawsze tylko jednego reprezentanta jednego rodzaju danej cechy symetrii. Tak naprawdę nie zlicaliśmy zatem obiektów występujących w całym wzorze płaskim (oczywiście z samej jego definicji byłoby ich nieskończenie wiele), ale w pewnej jego poskładanej wersji, gdzie wszystkie obiekty tego samego rodzaju były jednym obiektem (np. wszystkie punkty kalejdoskopowe trzeciego rzędu tego samego rodzaju), a tym samym wszystkie punkty tego samego rodzaju były jednym punktem.

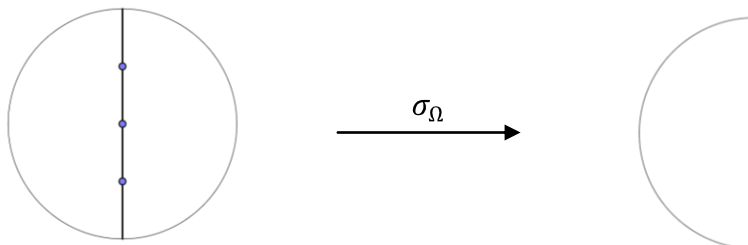
Zbiór wszystkich tego samego rodzaju punktów wzoru płaskiego, tj. takich które można przeprowadzić na siebie za pomocą symetrii wzoru, nazywamy *orbitą*. Operacja składania wzoru płaskiego polega na „nałożeniu” każdej orbity na pojedynczy punkt. Jej wynikiem jest zatem zbiór punktów odpowiadających orbitom, a uzyskany w ten sposób obiekt będziemy nazywać *orbifoldem wzoru płaskiego* (składką orbit).

*Odwzorowanie składki*, które dowolnemu punktowi na płaszczyźnie przyporządkowuje orbitę tego punktu oznaczamy  $\sigma_\Omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow O_\Omega$ , gdzie  $\Omega$  to wzór płaski (na płaszczyźnie  $\mathbb{R}^2$ ), a  $O_\Omega$  to orbifold wzoru  $\Omega$ .

Zastanówmy się jak może wyglądać orbifold wzoru płaskiego, tzn. jak mogą wyglądać jego pojedyncze punkty wraz ze swoimi otoczeniami.

#### Punkty lustrzane

We wzorze płaskim możemy wyróżnić punkty, które leżą na lustrach, ale nie są punktami kalejdoskopowymi. Każdy taki punkt (na Rysunku 4.1.1 wybrane trzy punkty wraz ich otoczeniem) po operacji składania będzie *punktem lustrzanym* orbifoldu. W pobliżu takich punktów orbifold wygląda jak kawałek powierzchni z brzegiem, przy czym punkty lustrzane leżą właśnie na brzegu takiego kawałka



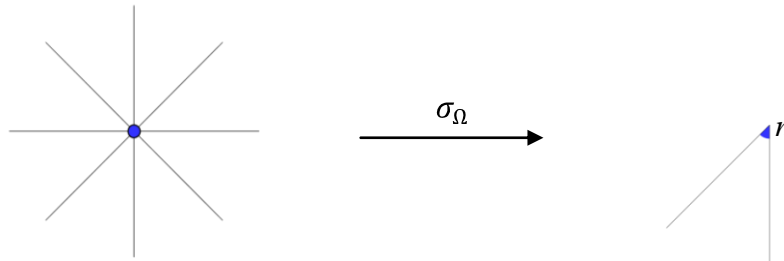
Rysunek 4.1.1

#### Punkty narożne

Każdy punkt kalejdoskopowy wzoru płaskiego po operacji składania stanie się *punktem narożnym* orbifoldu. Nietrudno zauważyć, że dla punktów bliskich punktowi kalejdoskopowemu  $k$  ich orbity mają dokładnie jednego reprezentanta w ustalonym sektorze pomiędzy lustrami, w pobliżu  $k$ , więc odwzorowanie składki przekształca mały dysk o środku  $k$  na mały fragment pojedynczego sektora, jak na Rysunku 4.1.2. Zatem

otoczenie punktu narożnego w orbifoldzie wygląda jak fragment sektora z prawej strony Rysunku 4.1.2.

Można myśleć, że w punkcie narożnym orbifoldu pochodzącym od punktu kalejdoskopowego rzędu  $n$  orbifold ma kąt  $\frac{\pi}{n}$ . Inaczej mówiąc, częścią danych orbifoldu w jego punkcie narożnym jest liczba  $n$ , zwana *rzędem punktu narożnego*.

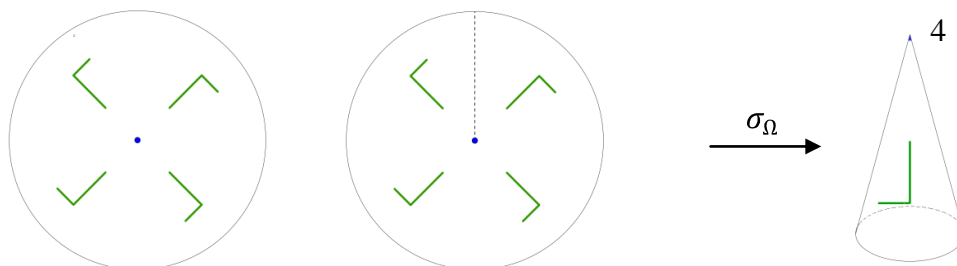


Rysunek 4.1.2

### Punkty stożkowe

Każdy punkt obrotowy wzoru płaskiego po operacji składania będzie *punktem stożkowym* orbifoldu. Łatwo to zauważyć na Rysunku 4.1.3, na którym widnieje czterokrotny punkt obrotowy wraz z pewnym jego otoczeniem. Aby skleić wszystkie orbity, trzeba przeciąć otoczenie punktu wzdłuż przerywanej linii a następnie złożyć je w stożek.

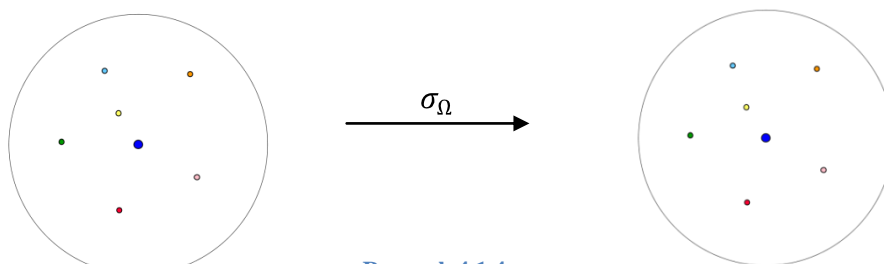
Częścią danych orbifoldu w jego punkcie stożkowym jest liczba  $n$ , zwana *rzędem punktu stożkowego*, która jest równa rzędowi punktu obrotowego (we wzorze płaskim), od którego ten punkt stożkowy pochodzi.



Rysunek 4.1.3

### Punkty zwyczajne

We wzorze płaskim najwięcej jest punktów ogólnego rodzaju, tj. takich w których pewnym małym otoczeniu nie ma punktów, które można na siebie wzajemnie przekształcić za pomocą symetrii wzoru. W tym otoczeniu są zatem jedynie punkty będące reprezentantami parami różnych orbit. Podczas operacji składania wzoru płaskiego punkt taki wraz całym otoczeniem zostanie więc przeniesiony na orbifold w niezmienionej postaci (Rysunek 4.1.4). Obraz w orbifoldzie każdego takiego punktu będziemy nazywać *punktem zwyczajnym* orbifoldu.



Rysunek 4.1.4

Mamy zatem cztery typy punktów, które mogą występować w orbifoldzie: punkty lustrzane, punkty narożne, punkty stożkowe i punkty zwyczajne.

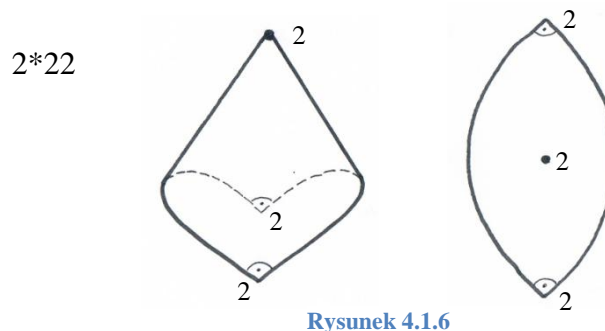
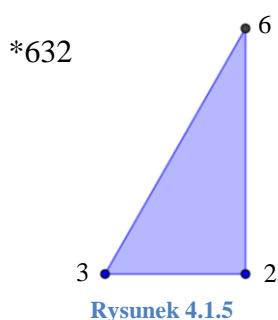
Orbifold jest więc powierzchnią z brzegiem (być może pustym) o skończenie wielu punktach stożkowych i skończenie wielu punktach narożnych na brzegu oraz o skończenie wielu zamkniętych krzywych brzegowych. Wszystkie punkty na brzegu tej powierzchni, które nie są punktami narożnymi, są punktami lustrzanymi. Wszystkie punkty wewnętrzne tej powierzchni (czyli nieleżące na brzegu), które nie są punktami stożkowymi, są punktami zwyczajnymi.

Komponenty brzegu (zamknięte krzywe brzegowe) orbifoldu mogą pochodzić od:  
 – pojedynczych luster;  
 – luster przechodzących przez punkty kalejdoskopowe.

Ponieważ wszystkie pojedyncze lustra są izolowane tzn. nie stykają się ze sobą w żadnym punkcie, każdy rodzaj pojedynczego lustra daje osobną komponentę brzegu.

Wszystkie lustra przechodzące przez punkty kalejdoskopowe wzoru płaskiego muszą tworzyć jedną konstelację (z każdego punktu kalejdoskopowego do dowolnie wybranego innego punktu kalejdoskopowego da się dotrzeć idąc tylko po lustrach), co oznacza, że po przekształceniu płaszczyzny na orbifold przez odwzorowanie składki utworzą na orbifoldzie spójny zbiór, czyli dokładnie jedną komponentę brzegu.

Poniżej przedstawiamy przykład orbifoldu wzoru płaskiego typu  $*632$  (Rysunek 4.1.5) i orbifoldu wzoru płaskiego typu  $2*22$  (Rysunek 4.1.6).



## 4.2 Charakterystyka Eulera orbifoldu

Mapą na powierzchni nazywamy podział tej powierzchni na obszary, o których możemy myśleć, z dokładnością do ciągłej deformacji, jak o wielokątach, przy czym w wierzchołkach wewnętrznych schodzą się co najmniej 3 obszary, a w wierzchołkach brzegowych co najmniej 2 obszary. *Krawędzie mapy* to linie które bezpośrednio łączą dwa wierzchołki.

Charakterystyka Eulera  $\chi$  jest niezmiennikiem charakteryzującym powierzchnie, a wylicza się ją za pomocą wzoru:

$$\chi = W - K + S ,$$

gdzie  $W$  oznacza liczbę wierzchołków,  $K$  liczbę krawędzi, a  $S$  liczbę obszarów mapy na danej powierzchni. Oznaczenie  $\chi(\Sigma)$  to charakterystyka Eulera powierzchni  $\Sigma$ .

Wyliczona w ten sposób liczba nie zależy od wyboru mapy na powierzchni, czego nie będziemy w tej pracy uzasadniać. Zainteresowanego tym zagadnieniem czytelnika odsyłamy do rozdziału 6. książki „Szkola geometrii. Odczyty Kaliskie” [3] i do rozdziału 20.4. „Wstępu do geometrii dawnej i nowej” H. Coxetera [5].

W podobny sposób definiuje się charakterystykę Eulera orbifoldu. Aby to zrobić, wybieramy na orbifoldzie mapę, taką że:

- każdy punkt stożkowy i narożny będzie wierzchołkiem;
- każda linia brzegowa będzie składała się z krawędzi mapy.

O ile dla powierzchni, które nie są orbifoldami, każdemu wierzchołkowi przyznajemy wartość 1 (podobnie dla krawędzi i obszarów), tak dla orbifoldu przyjmujemy inne wartości (kontrybucje).

Kontrybucje do charakterystyki Eulera dla orbifolu:

– krawędź brzegowa	$\frac{1}{2}$
– krawędź wewnętrzna	1
– wierzchołek zwyczajny	1
– wierzchołek narożny	$\frac{1}{2n}$
– wierzchołek stożkowy	$\frac{1}{n}$
– wierzchołek lustrzany	$\frac{1}{2}$
– obszar	1.

Możemy wyobrazić sobie, że poszczególne kontrybucje mają pewien związek z operacją składania, tzn. że np. punkt narożny powstały z punktu kalejdoskopowego  $n$ -tego rzędu, po operacji składania jest  $\frac{1}{2n}$  częścią pierwotnego punktu (bo tyle lokalnych fragmentów sektorów nakłada się na otoczenie punktu narożnikowego w orbifoldzie).

Przykładowe obliczanie charakterystyki Eulera dla orbifoldu wzoru płaskiego typu \*632 wygląda następująco:

$$W = \frac{1}{12} + \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$S = 1$$

$$\text{Zatem } \chi = W - K + S = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$$



Przykładowe obliczanie charakterystyki Eulera dla orbifoldu wzoru płaskiego typu 2\*22 wygląda następująco:

$$W = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$K = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 = 3$$

$$S = 2$$

$$\text{Zatem } \chi = W - K + S = 1 - 3 + 2 = 0$$



Wprowadźmy teraz twierdzenie o charakterystyce Eulera każdego orbifoldu wzoru płaskiego. W tym miejscu nie będziemy przeprowadzać rozumowania dowodowego tego twierdzenia. Dowód przesuwamy do podrozdziału 4.4.

**Twierdzenie 4.2.1** *Jeśli  $\Omega$  jest wzorem płaskim, zaś  $O_\Omega$  jego orbifoldem, to  $\chi(O_\Omega) = 0$ .*

Powyższe twierdzenie posłuży nam do przeprowadzenia dowodu Magicznego Twierdzenia w podrozdziale 4.3.

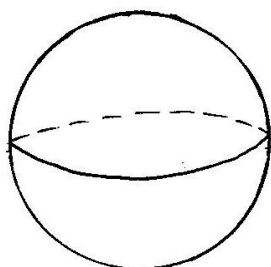
### 4.3 Klasyfikacja powierzchni i dowód Magicznego Twierdzenia

W niniejszym podrozdziale zbadamy jakimi powierzchniami mogą być orbifolde wzorów płaskich, a następnie, korzystając z twierdzenia 4.2.1 dowiedzimy Magicznego Twierdzenia.

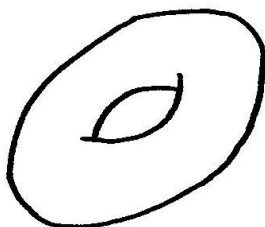
Zanim przejdziemy do dowodu Magicznego Twierdzenia, zapoznajmy się z twierdzeniem klasyfikacyjnym dla powierzchni zwartych, którego użyjemy w dowodzie Magicznego Twierdzenia. Powierzchnie zwarte dzielimy na powierzchnie zamknięte (bez brzegu) i powierzchnie z brzegiem. Powierzchnie zamknięte i powierzchnie z brzegiem mogą być orientowalne lub nieorientowalne. Powierzchnie nieorientowalne to te, które zawierają w sobie zanurzoną wstęgę Möbiusa. Te które wstęgi Möbiusa nie zawierają nazywamy orientowalnymi.

Klasyfikacja powierzchni, w nieco innym ujęciu niż w Twierdzeniu 4.3.1, przedstawiona jest szeroko w rozdziale 6. „Geometrii pogładowej” D. Hilberta i S. Cohna-Vossena [2].

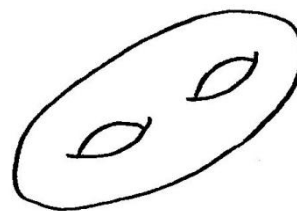
**Twierdzenie 4.3.1 Twierdzenie klasyfikacyjne dla powierzchni zwartych (z brzegiem i bez brzegu) wraz z wyliczeniami charakterystyk Eulera.** *Każda zamknięta powierzchnia orientowalna jest, z dokładnością do deformacji, jedną z następujących powierzchni: sferą (Rysunek 4.3.1), torusem (Rysunek 4.3.2), „powierzchnią precla z dwoma dziurami” (rysunek 4.3.3), a dla ogólnego przypadku „powierzchnią precla z  $g$  dziurami” (rysunek 4.3.4). Powierzchnie te oznaczamy symbolem  $\Sigma_g$ , gdzie  $g$  oznacza liczbę dziur (oznaczenie  $\Sigma_0$  to sfera). Charakterystyka Eulera płaszczyzny  $\Sigma_g$  wynosi  $\chi(\Sigma_g) = 2(g - 1)$ .*



Rysunek 4.3.1



Rysunek 4.3.2

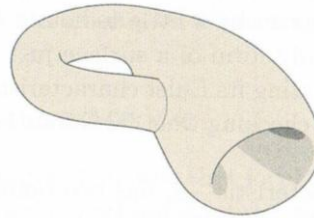


Rysunek 4.3.3



Rysunek 4.3.4

Powierzchnie zamknięte nieorientowane to powierzchnie  $P_n$  otrzymywane w taki sposób, że ze sfery wycinamy  $n$  parami rozłącznych dysków i do każdego brzegu po wyciętym dysku doklejamy wstęgę Möbiusa. Charakterystyka Eulera takich powierzchni wynosi  $\chi(P_n) = 2 - n$ .  $P_1$  jest nazywana płaszczyzną rzutową, a  $P_2$  butelką Kleina (Rysunek 4.3.4).



Rysunek 4.3.4

Powierzchnia  $G$  z brzegiem jest, z dokładnością do ciągłej deformacji, jedną z powierzchni zamkniętych z wyciętymi  $n$  parami rozłącznymi dyskami. Jeżeli wyżej wspomnianą powierzchnię zamkniętą oznaczymy przez  $\hat{G}$ , to zachodzi następujący wzór na charakterystykę Eulera powierzchni  $G$ :  $\chi(G) = \chi(\hat{G}) - n$ .

Oznaczeniem powierzchni  $G$  jest  $\hat{G}(n)$ , a więc  $\Sigma_g(n)$  lub  $P_k(n)$ .

Ogólnie możemy powiedzieć, że dowolna powierzchnia  $F$ , czy to zamknięta czy z brzegiem, powstaje w następujący sposób. Powierzchni  $F$  przypisujemy powierzchnię  $\hat{F}$ , będącą powierzchnią  $F$  zaklejoną dyskami (do każdej komponenty brzegu doklejony jest jeden dysk). Szukamy  $\hat{F}$  wśród powierzchni zamkniętych i  $F$  to powierzchnia  $\hat{F}$  minus tyle dysków ile było zaklejeń (gdy wyjściowa powierzchnia  $F$  była zamknięta to mieliśmy zero zaklejeń). Charakterystyka Eulera dowolnej powierzchni wynosi zatem  $\chi(F) = \chi(\hat{F}) - n$ , gdzie  $n$  oznacza liczbę wyciętych dysków.

Dla orbifoldu  $O$  niech  $F_o$  będzie powierzchnią tego orbifoldu, tzn. powierzchnią z brzegiem lub bez brzegu, ale bez zaznaczonych punktów narożnych i stożkowych. Zbadajmy relację pomiędzy  $\chi(O)$  i  $\chi(F_o)$ . W tym celu na powierzchni  $F_o$  rozważamy tę samą mapę, jaką wcześniej ustaliliśmy dla orbifoldu  $O$ . Wszystkie kontrybucje wierzchołków, krawędzi i obszarów do charakterystyki Eulera dla powierzchni  $F_o$  wynoszą, inaczej niż w orbifoldzie, standardowo 1 (z odpowiednim znakiem). Wiadomo, że kontrybucje dla zamkniętych obszarów są takie same dla  $O$  i  $F_o$ , więc wpływ na różnicę  $\chi(F_o) - \chi(O)$  będą miały tylko różnice w kontrybucjach

wierzchołków i krawędzi.

Przypomnijmy, że kontrybucje dla wierzchołków orbifoldu  $O$  mogą przyjmować następujące wartości dla wierzchołków:  $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2n}$  i  $\frac{1}{n}$ ; a dla krawędzi:  $1$  i  $\frac{1}{2}$ .

Kontrybucje do różnicy charakterystyk Eulera  $\chi(F_o) - \chi(O)$  wynoszą:

- dla obszarów  $1 - 1 = 0$ ;
- dla wierzchołków zwyczajnych  $1 - 1 = 0$ ;
- dla krawędzi wewnętrznych  $1 - 1 = 0$ ;
- dla wierzchołków obrotowych/stożkowych  $1 - \frac{1}{n} > 0$ ;

Do rozważenia pozostały jeszcze wierzchołki i krawędzie brzegowe powierzchni  $F_o$ . Zauważmy, że wierzchołków brzegowych jest tyle samo co krawędzi brzegowych. Ich kontrybucje do różnicy wynoszą:

- dla wierzchołków kalejdoskopowych/naróżnych  $1 - \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$ ;
- dla pozostałych wierzchołków lustrzanych  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ ;
- dla krawędzi  $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ .

Przypisując więc niejako każdemu wierzchołkowi brzegowemu dokładnie jedną krawędź brzegową, możemy zauważyć, że sumaryczna kontrybucja wierzchołków i krawędzi brzegowych powierzchni  $F_o$  do różnicy charakterystyk Eulera wynosi więc:

$$\begin{aligned} \chi(F_o) - \chi(O) &= \\ &= \sum_{\text{naróżne } r}^{\text{wierzchołki}} \left(1 - \frac{1}{2n_r} - \frac{1}{2}\right) + \sum_{\text{lustrzane}}^{\text{wierzchołki}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + \sum_{\text{stożkowe } q}^{\text{wierzchołki}} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) = \\ &= \sum_{\text{naróżne } r}^{\text{wierzchołki}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n_r}\right) + \sum_{\text{stożkowe } q}^{\text{wierzchołki}} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right). \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Mamy zatem  $\chi(F_o) - \chi(O) \geq 0$ . W takim razie, jeśli  $\chi(O) = 0$ , to  $\chi(F_o) \geq 0$ .

Zanim przejdziemy do dowodu Magicznego Twierdzenia przytoczmy jeszcze jeden fakt, którego nie będziemy uzasadniać, gdyż jego dowód wykracza poza zakres tej pracy.

**Fakt 4.3.3** *Powierzchnia  $F_o$  orbifoldu  $O$  jest nieorientowalna dokładnie wtedy, kiedy wśród symetrii wzoru znajduje się specjalna symetria z poślizgiem.*

### Uzasadnienie Magicznego Twierdzenia

Magiczne Twierdzenie uzasadnimy korzystając z tego, że  $\chi(O) = 0$  (Twierdzenie 4.2.1) oraz z twierdzenia o klasyfikacji powierzchni (Twierdzenie 4.3.1).

Wiemy, że skoro  $\chi(O) = 0$ , to  $\chi(F_o) \geq 0$ . Ponadto, ze wzoru na charakterystykę Eulera dowolnej powierzchni  $\chi(F_o) = \chi(\widehat{F}_o) - n$ , mamy  $\chi(\widehat{F}_o) = \chi(F_o) + n$ , stąd  $\chi(\widehat{F}_o) \geq \chi(F_o) \geq 0$ .

Z Twierdzenia Klasyfikacyjnego dla powierzchni zamkniętych łatwo widać, że  $\widehat{F}_o$  jest zatem jedną z czterech powierzchni: sferą, torusem, płaszczyzną rzutową lub butelką Kleina, bo tylko te powierzchnie zamknięte mają charakterystykę Eulera nieujemną.

Korzystając z tego, że charakterystyka Eulera dowolnego orbifoldu wzoru płaskiego wynosi 0 (Twierdzenie 4.2.1), możemy zapisać równość:



$$2 = 2 - \chi(O) = \left(2 - \chi(\widehat{F}_o)\right) + \left(\chi(\widehat{F}_o) - \chi(F_o)\right) + \left(\chi(F_o) - \chi(O)\right). \quad (4.3.4)$$

Zauważmy, że każdy z 3 składników sumy po prawej stronie równości (4.3.4) jest nieujemny, ponieważ:

- ostatni składnik jest nieujemny dzięki równości (4.3.2);
- środkowy dzięki temu, że ta różnica to liczba komponent brzegu powierzchni  $F_o$ ;
- pierwszy dzięki temu, że żadna powierzchnia zamknięta nie ma charakterystyki Eulera większej niż 2, co widać z Twierdzenia Klasyfikacyjnego (Twierdzenie 4.3.1).

Pokażemy, że powyższe 3 składniki sumy odpowiadają cenom poszczególnych rodzajów znaków występujących w sygnaturach typów symetrii wzorów płaskich.

Ostatni składnik odpowiada kosztom znaków punktów kalejdoskopowych i obrotowych bez kosztów znaków \*, czyli cenom samych liczb pojawiających się w sygnaturze wzoru.

$$\chi(F_o) - \chi(O) = \sum_{\text{punkty narożne } r} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n_r}\right) + \sum_{\text{stożkowe } q} \left(1 - \frac{1}{n_q}\right) = \sum_r \left(\frac{n_r-1}{2n_r}\right) + \sum_q \left(\frac{n_q-1}{n_q}\right)$$

Środkowy składnik odpowiada liczbie komponent brzegu w powierzchni  $F_o$ , czyli liczbie znaków \* w sygnaturze, a zatem sumarycznemu kosztowi znaków \* w sygnaturze wzoru.

Pierwszy składnik odpowiada cenom symboli  $\circ$  oraz  $\times$  pojawiających się w sygnaturze, co uzasadniamy poniżej, osobno dla każdego z czterech możliwych przypadków.

#### Przypadek 1.

Jeśli  $\widehat{F}_o$  jest torusem  $\Sigma_1$ , to również  $F_o$  jest torusem (bo  $\chi(\Sigma_1) = 0$ , więc gdyby  $F_o$  było torusem z wyciętymi dyskami, to mielibyśmy  $\chi(F_o) < 0$ , wbrew temu, że  $\chi(F_o) \geq 0$ ). W tym wypadku  $2 - \chi(\widehat{F}_o) = 2 - 0 = 2$ , więc drugi i trzeci składnik w równości (4.3.4) muszą wynosić zero, a zatem w orbifoldzie nie mogą występować już żadne punkty charakterystyczne ani żadne komponenty brzegu.

Ponieważ powierzchnia  $F_o$  jest orientowalna we wzorze nie może być też żadnej specjalnej symetrii z poślizgiem (Fakt 4.3.3).

Sygnatura takiego wzoru to  $\circ$ . Zatem sumaryczny koszt znaków  $\circ$  i  $\times$  w tym przypadku wynosi 2, czyli jest równy pierwszemu składnikowi sumy ze wzoru 4.3.4.

#### Przypadek 2.

Jeśli  $\widehat{F}_o$  jest butelką Kleina  $P_2$ , to jest nią również  $F_o$  (bo  $\chi(P_2) = 0$ , więc gdyby  $F_o$  było butelką Kleina z wyciętymi dyskami, to mielibyśmy  $\chi(F_o) < 0$ , wbrew temu, że  $\chi(F_o) \geq 0$ ). W tym wypadku  $2 - \chi(\widehat{F}_o) = 2 - 0 = 2$ , więc drugi i trzeci składnik w równości (4.3.4) muszą wynosić zero, a zatem w orbifoldzie nie mogą występować już żadne punkty charakterystyczne ani żadne komponenty brzegu.

Ponieważ powierzchnia  $F_o$  jest nieorientowalna we wzorze występują specjalne symetrie z poślizgiem (Fakt 4.3.3).

Sygnatura takiego wzoru to  $\mathbf{xx}$ . Zatem sumaryczny koszt znaków  $\circ$  i  $\times$  w tym przypadku wynosi 2, czyli jest równy pierwszemu składnikowi sumy ze wzoru 4.3.4.

### Przypadek 3.

Jeśli  $\widehat{F}_o$  jest płaszczyzną rzutową  $P_2$ , to  $2 - \chi(\widehat{F}_o) = 1$ . Powierzchnia  $F_o$  będzie nieorientowalna, więc we wzorze będzie występować specjalna symetria z poślizgiem (Fakt 4.3.3), stąd w sygnaturze wystąpi znak  $\mathbf{x}$ .

Ze wzoru 4.3.4 wynika, że w tym przypadku drugi i trzeci składnik sumy muszą dać razem 1, zatem w sygnaturze wzoru wystąpi jeszcze znak  $*$  lub liczby, czyli wystąpi dokładnie jeden znak  $\mathbf{x}$ . Ponieważ wtedy w sygnaturze nie będzie już znaku  $\circ$ , sumaryczny koszt znaków  $\circ$  i  $\mathbf{x}$  w tym przypadku wynosi 1, czyli jest równy pierwszemu składnikowi sumy ze wzoru 4.3.4.

### Przypadek 4.

Jeśli  $\widehat{F}_o$  jest sferą, to  $F_o$  jest powierzchnią orientowalną, więc we wzorze nie może wystąpić żadna specjalna symetria z poślizgiem (Fakt 4.3.3), a tym samym w sygnaturze wzoru nie może być żadnego znaku  $\mathbf{x}$ .

Ponadto w sygnaturze nie może być też żadnego znaku  $\circ$ , bo jeśli  $F_o$  ma brzeg, to w sygnaturze jest znak  $*$ , a jeśli  $F_o$  nie ma brzegu, to  $\chi(F_o) - \chi(O) = 2$ , więc sygnatura zawiera liczby. Zatem sumaryczny koszt znaków  $\circ$  i  $\mathbf{x}$  w tym przypadku wynosi 0, czyli jest równy pierwszemu składnikowi sumy ze wzoru 4.3.4.

Powyższe rozumowanie uzasadnia cenę sygnatury każdego wzoru płaskiego oraz przedstawione w podrozdziale 3.1 koszty w cenniku symetrii, tym samym uzasadniając Magiczne Twierdzenie.

## **4.4 Uzasadnienie, że $\chi(O) = 0$ dla orbifoldów wzorów płaskich**

Wykażemy teraz, że charakterystyka Eulera orbifoldu wzoru płaskiego wynosi 0, czyli udowodnimy Twierdzenie 4.2.1.

Twierdzenie udowodnimy dla przypadku, w którym mapa na orbifoldzie wzoru płaskiego ma dokładnie jeden obszar. Dowód dla przypadku, gdy mapa orbifoldu składa się z więcej niż jednego obszaru jest nieco bardziej skomplikowany i nie przedstawiamy go w tej pracy.

W dowodzie wykorzystamy poniższy fakt o charakterystyce Eulera dla wielokątów, którego wyprowadzenie czytelnik może znaleźć w rozdziale 6. książki „Szkola geometrii. Odczyty kaliskie” [3].

**Fakt 4.4.1** *Dla dowolnej mapy  $M$  na ograniczonym wielokącie  $W$ ,  $\chi(M) = 1$ .*

### Dowód Twierdzenia 4.2.1:

Weźmy orbifold  $O$  wraz z jego mapą  $M_o$ . Przeciwobrazem mapy  $M_o$  przez odwzorowanie składki  $\mathbb{R}^2 \rightarrow O$  jest mapa na  $\mathbb{R}^2$ , czego nie będziemy tutaj precyzyjnie dowodzić, uznając to za poglądowo oczywiste. Mapa, którą w ten sposób otrzymujemy jest mapą nieskończoną. Oznaczmy ją przez  $M_p$ .

Na mapie  $M_p$  obiekty *tego samego rodzaju* to takie, które przez odwzorowanie rzutowania odwzorowują ten sam obiekt w orbifoldzie.

Rozważmy teraz dostatecznie duże wielokąty  $W$  w  $\mathbb{R}^2$ , będące częścią mapy  $M_p$ , zaopatrzone w mapy będące jej obcięciami. Wielokąty  $W$  z takimi mapami będziemy nazywać *wielokątami mapowymi*.

Przypomnijmy, że stosunek obwodu koła do jego pola maleje wraz ze wzrostem długości promienia i dąży do 0.

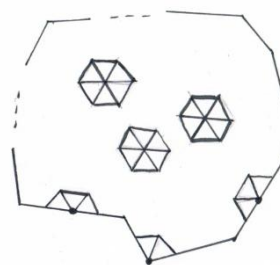
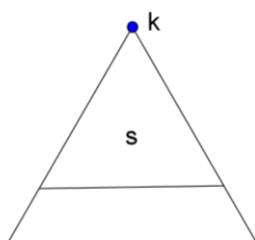
$$\frac{2\pi r}{\pi r^2} = \frac{2}{r} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

Ten fakt jest intuicyjnie wskazówką, że można tak wybrać ciąg  $W_N$  coraz to większych wielokątów mapowych, by dla dostatecznie dużych wielokątów liczba obiektów pewnego rodzaju  $i$  dotykających jego brzegu była coraz mniejsza w stosunku do obiektów tego rodzaju znajdujących się „w środku”. Dla każdej pary  $O_i, L_i$ , gdzie  $O_i(W_N)$  oznacza liczbę brzegowych wystąpień danego obiektu, a  $L_i(W_N)$  liczbę wszystkich wystąpień tego obiektu w wielokącie  $W$ , zachodzi:

$$\frac{O_i(W_N)}{L_i(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$$

Aby ta własność była spełniona, wielokąty  $W_N$  trzeba wybierać tak, by swoim kształtem z grubsza przypominały coraz większe koła.

Zbadamy teraz granicę ilorazu  $\frac{L_k(W_N)}{L_s(W_N)}$ , gdzie  $L_k(W_N)$  oznacza liczbę wystąpień wierzchołków kalejdoskopowych tego samego rodzaju  $k$  na mapie  $M_p$  w wielokącie  $W_N$ , a  $L_s(W_N)$  liczbę obszarów w wielokącie  $W_N$ .



Rysunek 4.4.1

Oszacujmy najpierw  $L_s(W_N)$ .

Prawostronnie – rozpatrując wszystkie punkty kalejdoskopowe rodzaju  $k$  leżące w wielokącie  $W_N$  i wszystkie przylegające do nich obszary  $s$ , również te, które wychodzą poza brzeg wielokąta  $W_N$ , łatwo zauważyć, że punktów kalejdoskopowych jest  $2n_k$  razy mniej niż takich obszarów (Rysunek 4.4.1). Pamiętając jednak, że część z tych obszarów leży poza wielokątem, mamy nierówność:

$$L_s(W_N) \leq 2n_k \cdot L_k(W_N).$$

Lewostronnie – jeżeli od wszystkich punktów kalejdoskopowych występujących w wielokącie  $W_N$  odejmiemy te leżące na brzegu, to mamy nierówność:

$$(L_k(W_N) - O_k(W_N)) \cdot 2n_k \leq L_s(W_N).$$

Stąd 
$$(L_k(W_N) - O_k(W_N)) \cdot 2n_k \leq L_s(W_N) \leq 2n_k \cdot L_k(W_N).$$

Mamy zatem

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(L_k(W_N) - O_k(W_N)) \cdot 2n_k}{L_k(W_N)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_s(W_N)}{L_k(W_N)} \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{2n_k \cdot L_k(W_N)}{L_k(W_N)} = 2n_k.$$

Obliczmy granicę z lewej strony powyższej nierówności:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{(L_k(W_N) - O_k(W_N)) \cdot 2n_k}{L_k(W_N)} &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{L_k(W_N) \cdot 2n_k}{L_k(W_N)} - \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{O_k(W_N) \cdot 2n_k}{L_k(W_N)} = \\ &= 2n_k - 2n_k \cdot \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{O_k(W_N)}{L_k(W_N)} = 2n_k - 0 = 2n_k. \end{aligned}$$

Z twierdzenia o trzech ciągach, mamy zatem, że  $\frac{L_s(W_N)}{L_k(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2n_k$ , a tym samym  $\frac{L_k(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2n_k}$ .

Przyjmijmy następujące bardziej systematyczne oznaczenia:

$V$  – zbiór wierzchołków mapy na  $O$ .

$V = V_k \cup V_o \cup V_l \cup V_z$ , gdzie  $V_k$ , to wierzchołki kalejdoskopowe,  $V_o$  – obrotowe,  $V_l$  – lustrzane, a  $V_z$  – zwyczajne.

$E$  – zbiór krawędzi mapy na  $O$ .

$E = E_b \cup E_w$ , gdzie  $E_b$  to krawędzie brzegowe, a  $E_w$  to krawędzie wewnętrzne.

Z wcześniejszego szacowania mamy zatem:

Jeśli  $v \in V_k$ , to  $\frac{L_v(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2n_v}$ , gdzie  $n_v$  to krotność wierzchołka  $v$  jako punktu kalejdoskopowego wzoru.

Podobne szacowanie pozwala otrzymać następujące granice.

Jeśli  $v \in V_o$ , to  $\frac{L_v(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{n_v}$ , gdzie  $n_v$  to krotność wierzchołka  $v$  jako punktu obrotowego wzoru.

Jeśli  $v \in V_l$ , to  $\frac{L_v(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ .

Jeśli  $v \in V_z$ , to  $\frac{L_v(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ .

Jeśli  $e \in E_b$ , to  $\frac{L_e(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$ .

Jeśli  $e \in E_w$ , to  $\frac{L_e(W_N)}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 1$ .

Wiemy, że  $\frac{1}{L_s(W_N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$ . Korzystając z Faktu 4.4.1 możemy zapisać:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{L_s(W_N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\chi(W_N)}{L_s(W_N)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{v \in V} L_v(W_N) - \sum_{e \in E} L_e(W_N) + L_s(W_N)}{L_s(W_N)} = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sum_{v \in V_k} L_v(W_N) + \sum_{v \in V_o} L_v(W_N) + \sum_{v \in V_l} L_v(W_N) + \sum_{v \in V_z} L_v(W_N) - \sum_{e \in E_b} L_e(W_N) - \sum_{e \in E_w} L_e(W_N) + L_s(W_N)}{L_s(W_N)} = \\ &= \sum_{v \in V_k} \frac{1}{2n_v} + \sum_{v \in V_o} \frac{1}{n_v} + \sum_{v \in V_l} \frac{1}{2} + \sum_{v \in V_z} 1 - \sum_{e \in E_b} \frac{1}{2} - \sum_{e \in E_w} 1 + 1 = \chi(O), \end{aligned}$$

co należało udowodnić.

Twierdzenie 4.2.1 udowodniliśmy dla przypadku, w którym mapa na orbifoldzie wzoru płaskiego ma dokładnie jeden obszar zamknięty. Dla ogólnego przypadku dowód przebiegałby podobnie, jednak z dużą liczbą niuansów (np. które punkty kalejdoskopowe przylegają do których obszarów), bardzo złożonym zapisem, i dlatego nie będziemy go przeprowadzać.

## Bibliografia

- [1] John H. Conway, Heidi Burgiel, Chaim Goodman-Strauss, *The Symmetries of Things*, A K Peters, Ltd., Wallingford 2008
- [2] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, *Geometria Poglądowa*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1956
- [3] *Szkoła geometrii. Odczyty kaliskie*, red. Wojciech Jędrychowski, Marek Kordos, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne, Warszawa 1993
- [4] Ryszard Doman, *Wykłady z geometrii elementarnej*, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2001
- [5] H. S. M. Coxeter, *Wstęp do geometrii dawnej i nowej*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1967