

**Zadania z Geometrii Elementarnej 1**  
**Lista 6. Izometrie.**

*Zadania na wykorzystanie klasyfikacji izometrii*

1. Dla przekształcenia  $T$ , jego *rzędem* nazywamy najmniejszą taką liczbę  $n \geq 1$ , że przekształcenie  $T^n$  (czyli  $n$ -krotne złożenie  $T$  z samym sobą) jest przekształceniem tożsamościowym. Jeśli takie  $n$  nie istnieje, tzn. jeśli żadne z przekształceń  $T^n : n \geq 1$  nie jest tożsamościowe, to mówimy, że przekształcenie  $T$  ma *rzęd nieskończony*.
  - (a) Znajdź rzędy kilku wybranych izometrii płaszczyzny.
  - (b) Znajdź wszystkie izometrie płaszczyzny, których rząd wynosi 2, 3, 4, 5,  $\infty$ .
2. Rozstrzygnij, czy izometria  $T$  o podanych własnościach jest tożsamością, translacją, obrotem, odbiciem czy symetrią z poślizgiem.
  - (a)  $T$  posiada przynajmniej dwa różne punkty stałe (czyli takie, że  $T(X) = X$ ), a conajmniej jeden punkt płaszczyzny nie jest jej punktem stałym.
  - (b)  $T$  zachowuje orientację, oraz istnieją punkty  $A, B$  takie, że dla ich obrazów  $A', B'$  mamy  $|AA'| \neq |BB'|$ .
  - (c) Dla pewnych dwóch nierównoległych prostych  $l, m$  izometria zachowuje ich kierunki (tzn.  $l'$  jest równoległa do  $l$ , zaś  $m'$  do  $m$ ), ale w obu przypadkach zmienia zwroty tych kierunków na przeciwne.
  - (d)  $T$  zmienia orientację, zaś złożenie  $T^2 = T \circ T$  nie jest przekształceniem tożsamościowym.

*Zadania na rozpoznawanie izometrii*

3. Dane są przylegające do siebie kwadraty  $ABCD$  oraz  $CDEF$ .
  - (a) pewien obrót przeprowadza punkty:  $A$  na  $C$  oraz  $B$  na  $F$ . Znajdź środek i kąt tego obrotu.
  - (b) Pewna symetria z poślizgiem przeprowadza punkty:  $A$  na  $F$  oraz  $B$  na  $C$ . Znajdź oś oraz wektor przesunięcia tej symetrii z poślizgiem.
  - (c) Znajdź 8 różnych izometrii płaszczyzny przekształcających kwadrat  $ABCD$  na kwadrat  $CDEF$ . Uzasadnij, że nie ma więcej takich izometrii.
4. Opisz wszystkie izometrie będące (a) obrotami, (b) symetriami z poślizgiem, które przeprowadzają dany punkt  $A$  na dany punkt  $B$  różny od  $A$ . Jakie jeszcze inne izometrie przeprowadzają punkt  $A$  na punkt  $B$ ?
5. Znajdź wszystkie izometrie płaszczyzny, które:
  - (a) zamieniają ze sobą dwa dane punkty  $A, B$  (tzn.  $A$  przechodzi na  $B$ , zaś  $B$  na  $A$ );
  - (b) przekształcają odcinek  $AS$  (gdzie  $S$  jest środkiem odcinka  $AB$ ) na odcinek  $BS$ , na wszystkie możliwe sposoby (tzn. końce odcinka  $AS$  przechodzą na końce odcinka  $BS$  w dowolnych kombinacjach);
  - (c) przeprowadzają bok  $AB$  trójkąta równobocznego  $ABC$  na bok  $BC$ , na wszystkie możliwe sposoby (przy tym sam trójkąt  $ABC$  nie musi być przekształcany sam na siebie).

*Zadania na składanie izometrii*

6. Jaka izometria jest złożenie
  - (a) odbicia w prostej  $AB$  z półobrotem (czyli obrotem o  $180^\circ$ ) wokół punktu  $A$ ;
  - (b) półobrotu wokół  $A$  z półobrotem wokół  $B$ ?
7. Uzasadnij, że złożenie ćwierć-obrotów (obrotów o  $90^\circ$ ) w tym samym kierunku wokół różnych punktów  $C$  i  $B$  jest półobrotem wokół środka kwadratu, którego jednym z boków jest odcinek  $BC$ . A co będzie złożeniem ćwierć-obrotów wokół  $C$  i  $B$  w dwie różne strony?