- $S+W=K+2$ $\quad S-K+W=2$ $\quad$ wzór Eulera

- brzeg wielościanu może być:

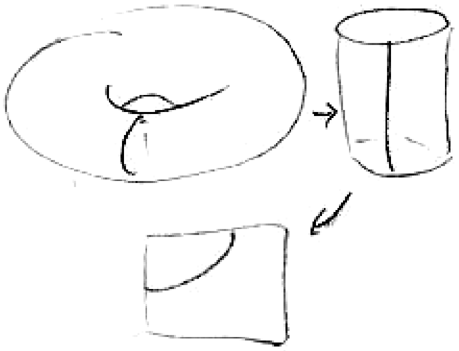
  sfera , torusem , preclem , itp

<u>rząd spójności</u> powierzchni zamkniętej

rozcinamy powierzchnię: najpierw kręgami zamkniętymi potem łukami

min liczba rozcięć, po których powierzchnia <u>na pewno</u> rozpadnie się na dwie części

h() = 1, h() = 3

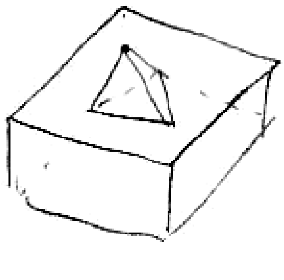


h() = 5

- uogólniony wzór Eulera

  $$S-K+W=3-h$$

  (prawa strona $=2$ dla brzegów sferycznych
  $=0$ —,,— torusowych
  $=-2$ —,,— preclowych itp.

- 

  $S=9$
  $W=12$
  $K=18$

  $S-K+W=3$

  mimo że brzeg wielościanu ma typ sferyczny?!

- ściana z dziurą?

• uściślenie: $W-K+S=2$ gdy

  • brzeg wielościanu jest typu sferycznego

  • każda ściana jest zwykłym wielokątem (bez dziur)

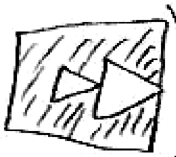
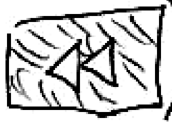
[np. wielościany wypukłe]

• uogólnienie:

Każdej ścianie przypisujemy liczbę d „dziur wewnętrznych"

d() = 0, d() = 1,

d() = 2, d() = 0

d() = 0 d() = 1

to nie są „dziury wewnętrzne"

1 dziura wewn.

$$D = \sum_{\text{ściany } \sigma} d(\sigma)$$ – łączna liczba wewnętrznych dziur we wszystkich ścianach

• $$\boxed{S-K+W=3-h+D}$$

Strategia dowodu tożsamości Eulera $S-K+W=2$ (2)

dla wielościanów wypukłych.

- wybieramy płaszczyznę Π nie równoległą do żadnej krawędzi wielościanu

  (wektory normalne płaszczyzn równoległych do danej krawędzi tworzą okrąg wielki; skończona suma okręgów wielkich nie wypełnia całej sfery).

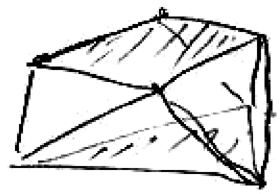
- przecinamy wielościan płaszczyznami równoległymi do Π przechodzącymi przez wszystkie wierzchołki
  – przez każdy wierzchołek przechodzi dokładnie jedna taka płaszczyzna

- dowód będzie indukcyjny względem liczby $N+1$ = ilość brył na jakie został w ten sposób rozcięty wielościan

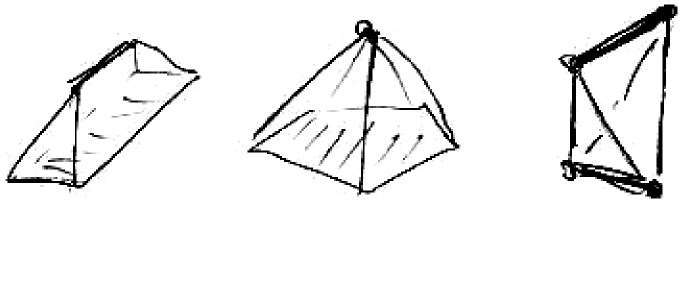
- sprawdzamy, że tożsamość Eulera zachodzi dla brył otrzymanych przez rozcięcie – są to tzw. pryzmatoidy.

DEF. Pryzmatoid – wypukły wielościan, którego wszystkie wierzchołki leżą na dwóch równoległych płaszczyznach.

Pryzmatoid właściwy: gdy na każdej z tych 2 płaszczyzn leży ≥ 3 wierzchołków – wtedy każda z tych 2 płaszczyzn zawiera ścianę pryzmatoidu, zwaną podstawą



Pryzmatoid niewłaściwy:
jedna lub dwie podstawy zdegenerowane do krawędzi lub wierzchołka



• przypadek właściwy n_1, n_2 - liczba wierzchołków podstaw ($n_1, n_2 \geq 3$)

q - liczba „krawędzi bocznych" (nie zawartych w podstawach)

$W = n_1 + n_2$

$K = n_1 + n_2 + q$

$S = 2 + q$ (2 podstawy i q ścian bocznych, bo ściany są rozmieszczone cyklicznie i każde kolejne 2 są rozdzielone krawędzią boczną)

$$W - K + S = (n_1 + n_2) - (n_1 + n_2 + q) + (2 + q) = 2$$

• przypadek z jedną podstawą zredukowaną do krawędzi ($n_1 = 2$, $n_2 \geq 3$)

$W = 2 + n_2$

$K = 1 + n_2 + q$

$S = 1 + q$ (1 podstawa, q bocznych jak poprzednio)

• pozostałe przypadki to ostrosłupy (podstawa zredukowana do wierzchołka) lub czworościan (obie podstawy zred. do krawędzi) więc dla nich też jest OK.

• Indukcją pokażemy, że wzór zachodzi
z k spośród pryzmatoidalnych kawałków, na które wcięliśmy naszą bryłę, spełnia tożsamość Eulera

$k=1$ już sprawdziliśmy

• załóżmy, że wzór zachodzi dla bryły złożonej z $k-1$ części, B_{k-1}, dokładamy 1 ⟵ pryzmatoidalną część P, $B_k = B_{k-1} \cup P$.

Oznaczenia: W, K, S – dane w P, $W_{k-1}, K_{k-1}, S_{k-1}$ – dane w B_{k-1}

W_k, K_k, S_k dane w B_k

ZI: $W_{k-1} - K_{k-1} + S_{k-1} = 2$

wiemy też że $W - K + S = 2$

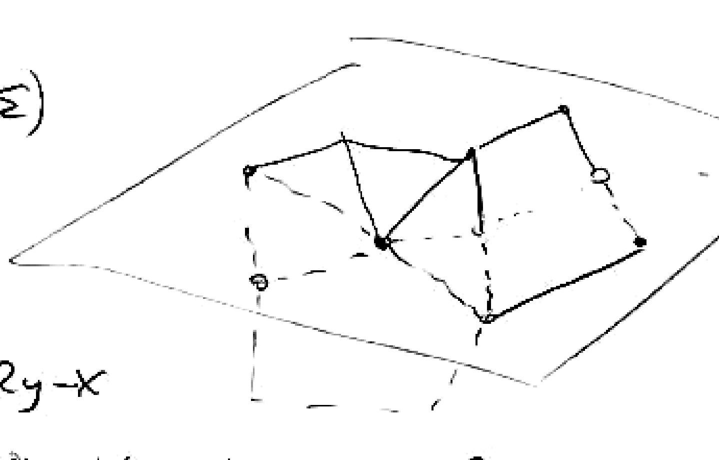
CEL. $W_k - K_k + S_k = 2$

Dalsze oznaczenia:

X – liczba wierzchołków w B_k na płaszczyźnie Σ pomiędzy B_{k-1} i P

y – liczba krawędzi w B_k przeciętych na 2 części przez Σ

Wspólna ściana B_{k-1} i P
(powstała z przecięcia płaszczyzną Σ)
jest $(x+y)$-kątem



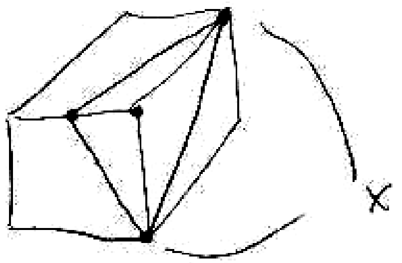
$W + W_{k-1} = W_k + 2y + x$

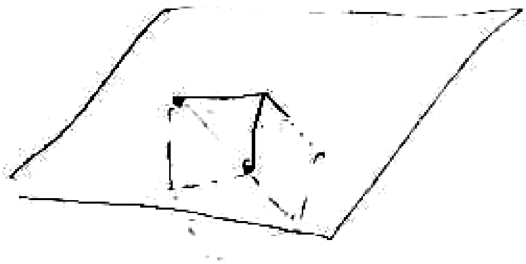
$W_k = W + W_{k-1} - 2y - x$

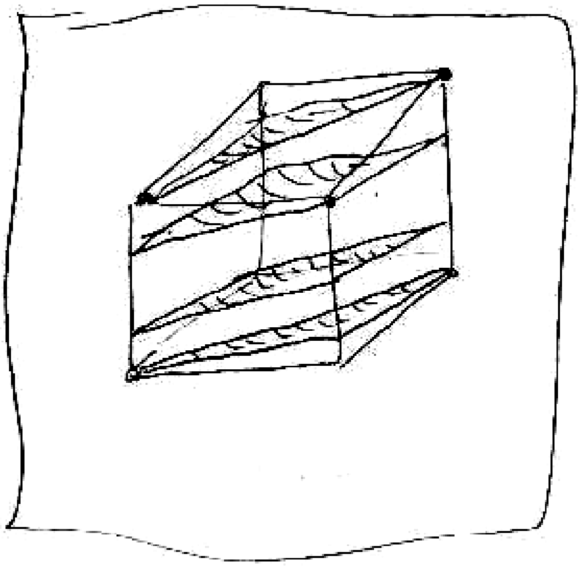
$K + K_{k-1} = K_k + y + 2x + 2y$ $\quad K_k = K + K_{k-1} - 2x - 3y$

$S + S_{k-1} = S_k + x + y + 2$ $\quad S_k = S + S_{k-1} - x - y - 2$

⟶







Po wstawieniu wyrażeń na W_k, K_k, S_k obliczamy:

$$W_k - K_k + S_k = W + W_{k-1} - 2y - x - (K + K_{k-1} - 2x - 3y) + \\ + S + S_{k-1} - x - y - 2 =$$

$$= (W - K + S) + (W_{k-1} - K_{k-1} + S_{k-1}) - 2y - x + 2x + 3y - x - y - 2 =$$

$$= 2 + 2 - 2 = 2.$$

(1) Klasyfikacja platońskich {p,q} - p-kąty, q wokół wierzchołków

Symbol Schläfli'ego

Uzależniamy S i W od K:

$$K, \quad S = 2K/p \qquad W = 2K/q$$

$$2 = W - K + S = \left(\frac{2}{q} - 1 + \frac{2}{p}\right)K$$

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} - \frac{1}{2} > 0$$

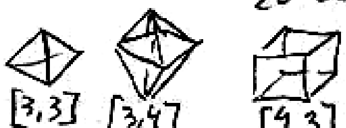
Znajdźmy pary p,q dla których $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} > \frac{1}{2}$

$p \geq 3, \ q \geq 3$

[3,3] [3,4] [3,5] [4,3] i [5,3]

20-ścian [3,5]

Sprawdźmy, że wychodzi to co trzeba



[3,3] [3,4] [4,3]

12-ścian [5,3]

Wyliczanie liczby ścian: 2

archimedesowy 5,4,3,4 – wokół każdego wierzchołka kolejno: 5-kąt, kwadrat, trójkąt, kwadrat

wyliczamy S_3, S_4, S_5, K od W

$$K = 4W/2 = 2W$$

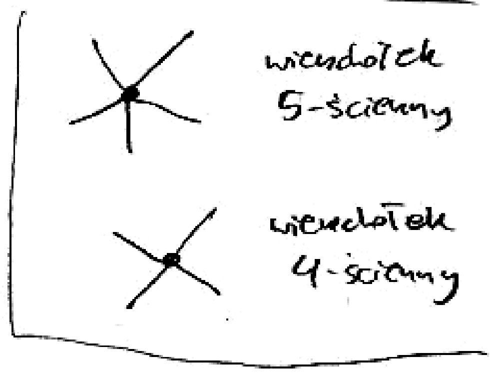
$$\left.\begin{aligned} S_3 &= W/3 = \tfrac{1}{3}W \\ S_4 &= 2W/4 = \tfrac{1}{2}W \\ S_5 &= W/5 = \tfrac{1}{5}W \end{aligned}\right| \quad S = W\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right) = \frac{10+15+6}{30}W = \frac{31}{30}W$$

$$2 = W - K + S = W\left(1 - 2 + \frac{31}{30}\right) = \frac{1}{30}W$$

$$\left|\begin{aligned} W &= 60 \\ S_3 &= 20 \\ S_4 &= 30 \\ S_5 &= 12 \\ K &= 120 \end{aligned}\right.$$

④ NIEISTNIENIE PEWNEGO RODZAJU WIELOŚCIANÓW

Ściany trójkątne
każde ma 2 wierzchołki 5-ścienne
1 wierzchołek 4-ścienny



W_4, W_5, K - wyrażamy od S

$K = 3S/2 = \frac{3}{2}S$

$W_4 = S/4 = \frac{1}{4}S$

$W_5 = 2S/5 = \frac{2}{5}S$

$W = \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{5}\right)S = \frac{13}{20}S$

$$W - K + S = \left(\frac{13}{20} - \frac{3}{2} + 1\right)S = \frac{3}{20}S = 2$$

$S = \frac{40}{3}$ SPRZECZNOŚĆ.

③ Nie istnienie wielościanu Archimedesowego:

$(5,5,7)$

S_5, S_7, K - wyrażamy od W

$K = 3W/2 = \frac{3}{2}W$

$S_5 = 2W/5 = \frac{2}{5}W$

$S_7 = W/7 = \frac{1}{7}W$

$S = \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7}\right)W = \frac{19}{35}W$

$$2 = W - K + S = W\left(1 - \frac{3}{2} + \frac{19}{35}\right) = W \cdot \frac{70 - 105 + 38}{70} = \frac{3}{70}W$$

$W = \frac{140}{3}$ sprzeczność.