METODA NIEPODZIELNYCH –

– „całkowanie" przed wynalezieniem rachunku różniczkowego i całkowego

---

I połowa XVII w.

1 pokolenie przed Newtonem i Leibnizem –
– wynalazcami rachunku różniczkowego i całkowego

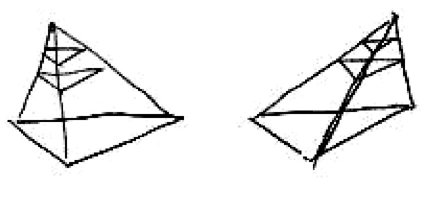
[Newton „Principia..." 1687]
[Leibniz „Nova methodus pro maximis et minimis" 1684, 1686]

Czołowy przedstawiciel – Bonaventura CAVALIERI [1591 – 1647]

(elementy tej metody znane też były w starożytności –
– np. Archimedesowi)

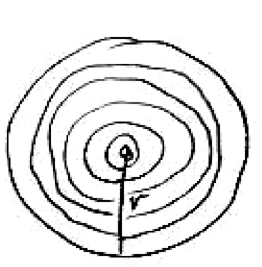
PRZYKŁADOWE WYLICZENIA

1



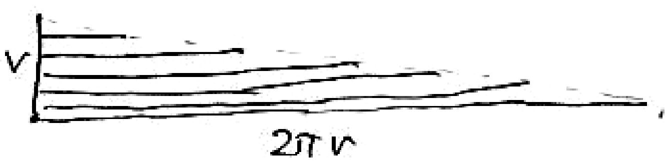
czworościany o jednakowych podstawach i jednakowych wysokościach mają jednakowe objętości, bo „sumują się" z takich samych trójkątów przekroju na tych samych poziomach

2



[Archimedes]

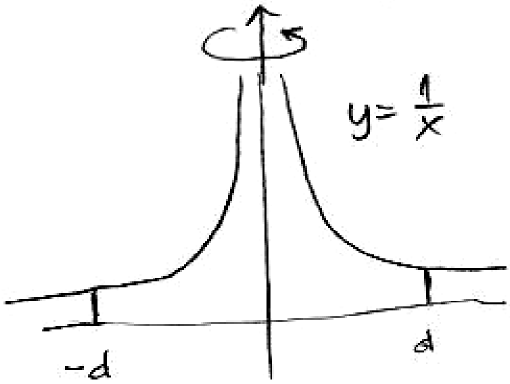
$$P = \frac{(2\pi r)\cdot r}{2} = \pi r^2$$

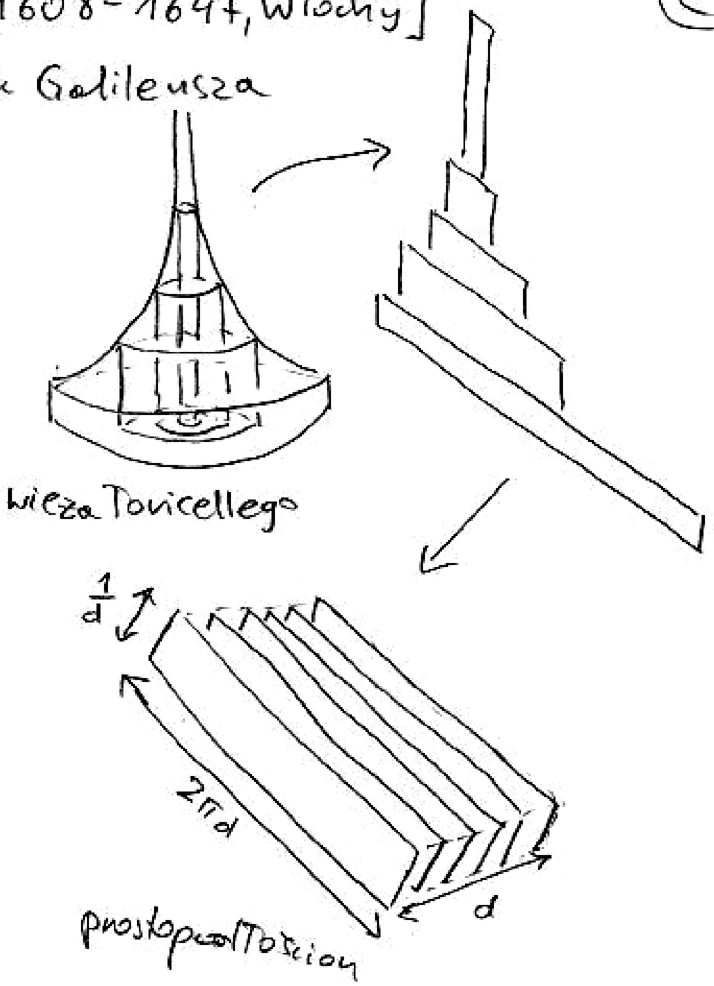


pole koła o promieniu r jest takie samo jak pole trójkąta o podstawie $2\pi r$ i wysokości r, bo „sumują się" z tych samych linii, w kole zwiniętych w okręgi, w trójkącie rozprostowanych

(3) Evangelista TORICELLI [1608-1647, Włochy]

– uczeń i współpracownik Galileusza



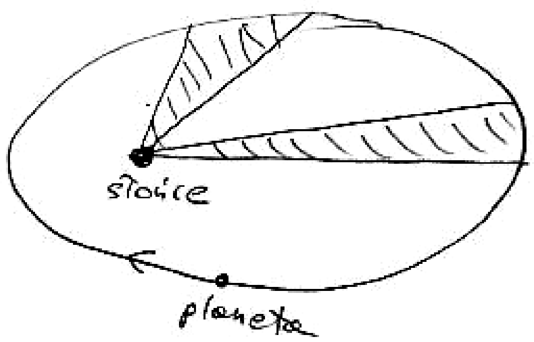


$$V = \frac{1}{d} \times 2\pi d \times d =$$
$$= 2\pi d$$

(4) Johannes Kepler [1571-1630, Niemcy, Czechy]

– takimi metodami doszedł do swojego II prawa dotyczącego ruchu planet

[jednakowe pole zakreślane ... w jednakowych odcinkach czasu – w ruchu planety po eliptycznej orbicie]



(5) Paul Guldin [1577-1643, Szwajcaria] –

– tą metodą wyprowadził swoje wzory (wzory Guldina) na objętość i pole powierzchni brył obrotowych

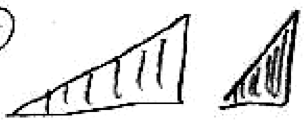
METODA NIEPODZIELNYCH

– namiastka geometrycznej analizy matematycznej z czasów przed wynalezieniem rachunku różniczkowego i całkowego

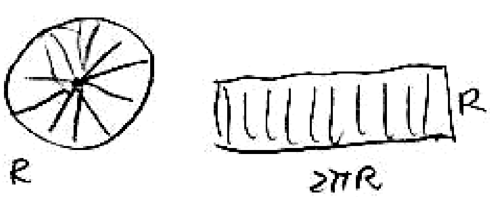
[przeczytać 1. akapit ze str. 114 książki „Ciągłość" Mioduszewskiego]

Niebezpieczeństwo niefrasobliwości:

I

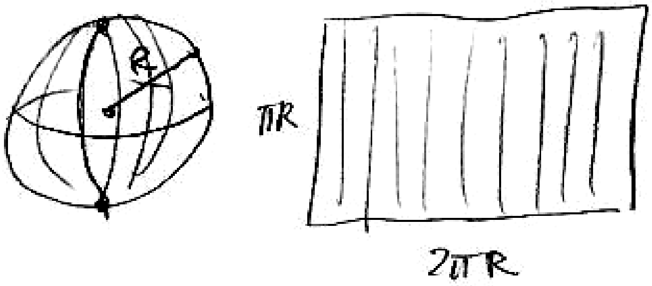


II



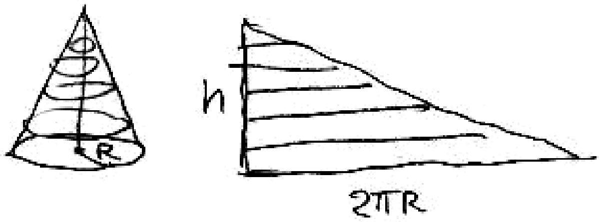
$2\pi R^2$ zamiast πR^2

III



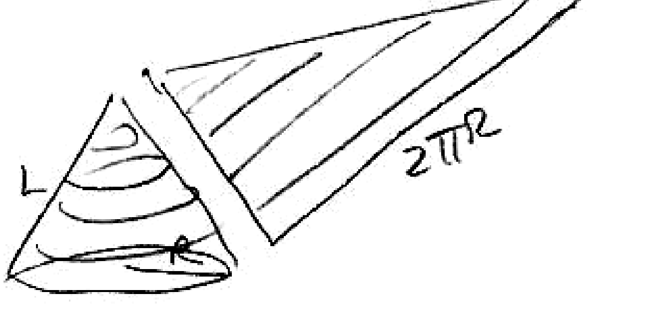
$2\pi^2 R^2$ zamiast $4\pi R^2$

IV



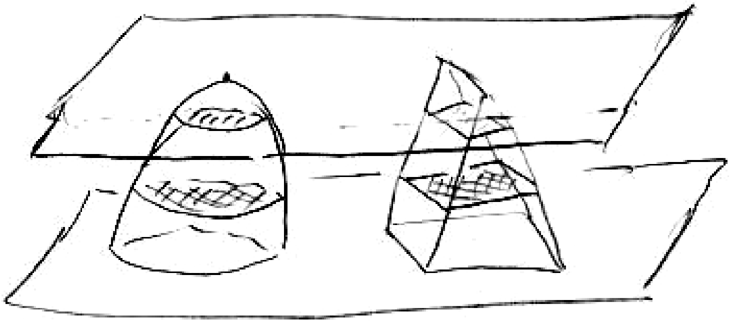
$2\pi R h$ zamiast $2\pi R L$

a więc poprawnie byłoby



Próba nadania metodzie ścisłego charakteru:

ZASADA CAVALIERIEGO:

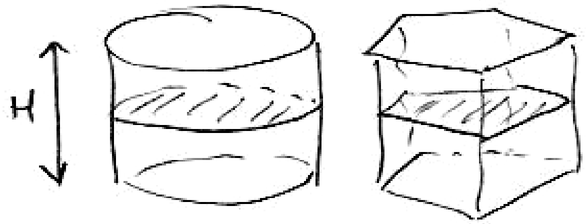


Niech będą dane dwie bryły, obie leżące pomiędzy tymi samymi dwiema równoległymi do siebie płaszczyznami.
Jeśli przekroje tych brył każdą płaszczyzną równoległą do wspomnianych dwóch płaszczyzn mają te same pola, to bryły mają jednakowe objętości.

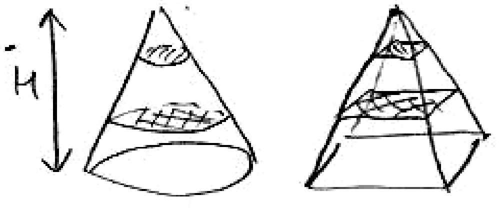
PROSTE PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

(1) wspomniane wcześniej czworościany o jednakowych podstawach i równych wysokościach.

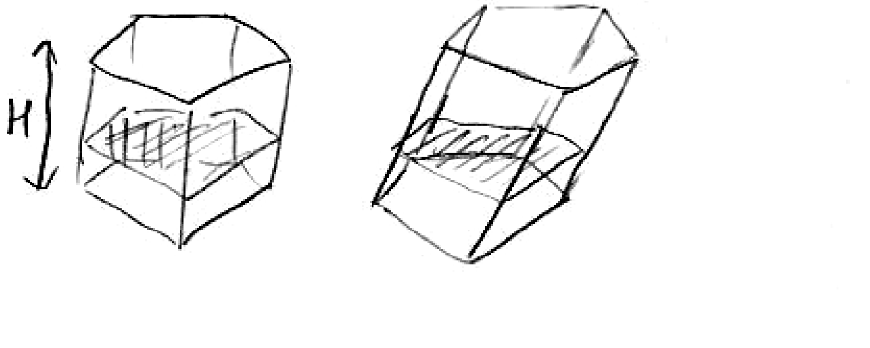
(2) walec i graniastosłup prosty o podstawach mających jednakowe pola, i o wspólnej wysokości H.



(3) stożek i ostrosłup j.w.

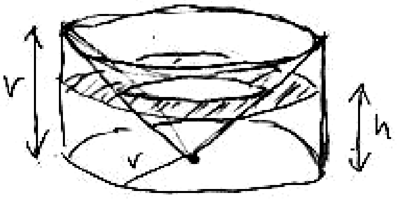


(4) graniastosłupy prosty i pochyły o tej samej podstawie i wspólnej wysokości H.



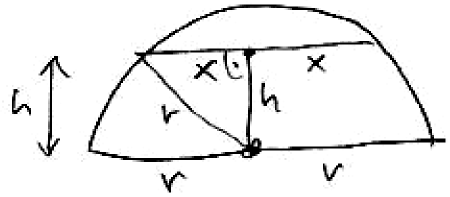
ZASTOSOWANIE DO WYLICZENIA OBJĘTOŚCI KULI (według Archimedesa)

półkula



walec z wydrążonym stożkiem

Porównujemy przekroje na wysokości h, $0 \le h \le r$.

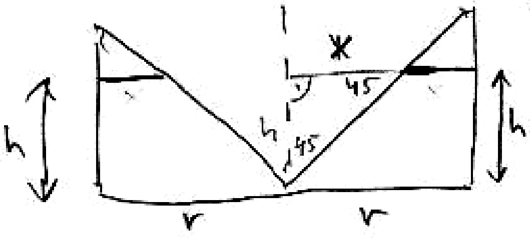


W półkuli:

przekrój jest kołem o promieniu $x = \sqrt{r^2 - h^2}$ (z Pitagorasa),

więc pole przekroju wynosi

$$\pi x^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{r^2 - h^2}\right)^2 = \pi\left(r^2 - h^2\right)$$



W wydrążonym walcu:

przekrój jest pierścieniem powstałym jako różnica koła o promieniu r i koła o promieniu x; ale $x = h$,

więc pole przekroju to $\pi r^2 - \pi x^2 = \pi r^2 - \pi h^2$

Pola przekrojów na (dowolnej) wysokości h są równe!

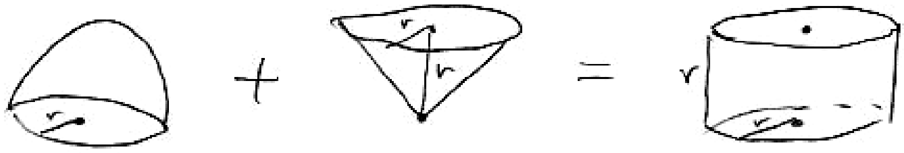
Zatem objętość półkuli = objętość wydrążonego walca =

= różnica objętości walca i stożka =

$$= \pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r = \frac{2}{3}\pi r^3.$$

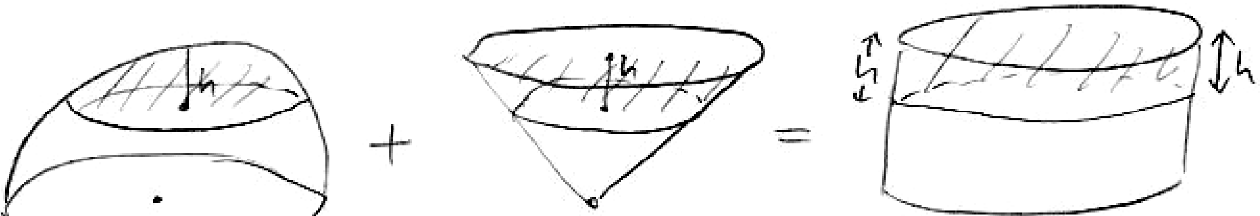
Zatem objętość całej kuli to $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Obserwację Archimedesa można też graficznie przedstawić tak:



czyli

Podobnie można wyznaczyć objętość odcinków kuli:



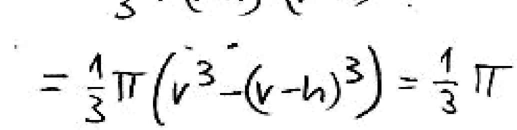
$V_h = ?$ $\qquad$ $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot r - \frac{1}{3}\pi (r-h)^2 \cdot (r-h)$ $\qquad$ $V_2 = \pi r^2 \cdot h$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(r^3 - (r-h)^3\right) = \frac{1}{3}\pi\left(3r^2h - 3rh^2 + h^3\right)$$

$$V_h \overset{= V_2 - V_1}{=} \cancel{\pi r^2 h} - \cancel{\pi r^2 h} + \pi r h^2 - \frac{1}{3}\pi h^3 =$$

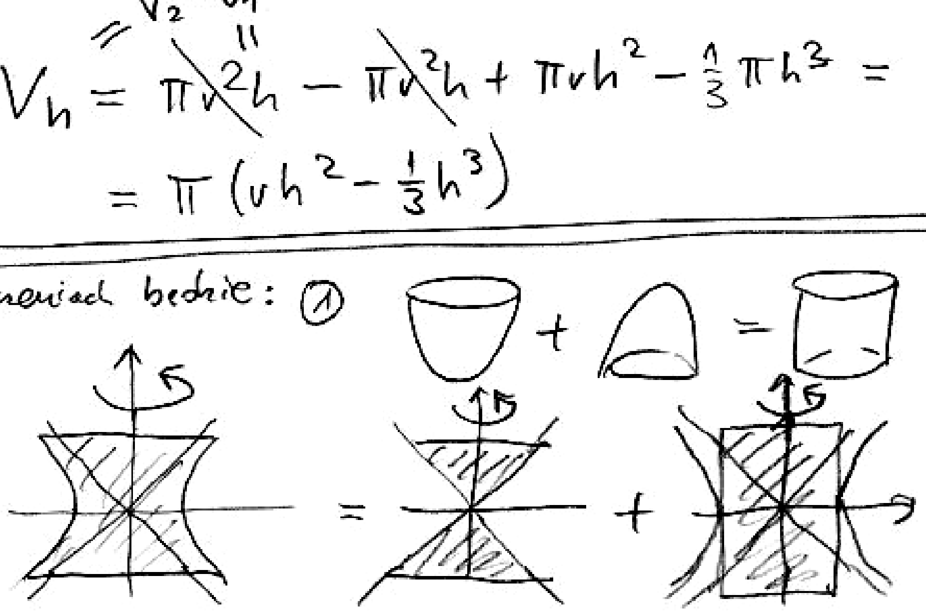
$$= \pi\left(rh^2 - \frac{1}{3}h^3\right)$$

Na ćwiczeniach będzie: 1



paraboloidy obrotowe i walec

2



hiperboloida obrotowa oraz podwójny stożek i walec

ZASADA CAVALIERIEGO DLA FIGUR NA PŁASZCZYŹNIE

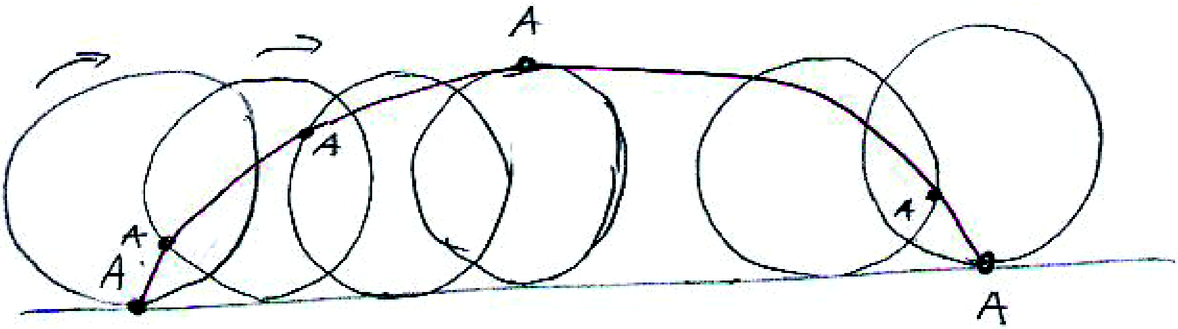
- figury położone między dwiema prostymi równoległymi
- przekroje dowolną prostą równoległą do powyższych prostych mają jednakowe długości.

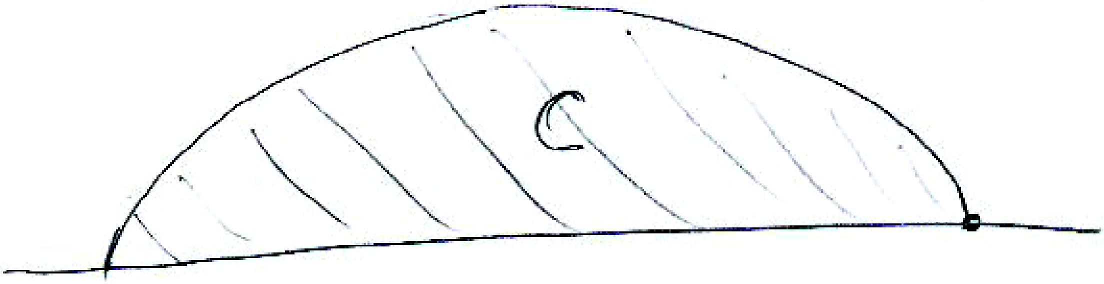
Wówczas pola tych figur są równe.

PRZYKŁAD ZASTOSOWANIA – obliczenie pola figury ograniczonej cykloidą –

– Gilles de Roberval [1602 – 1675, Francja]

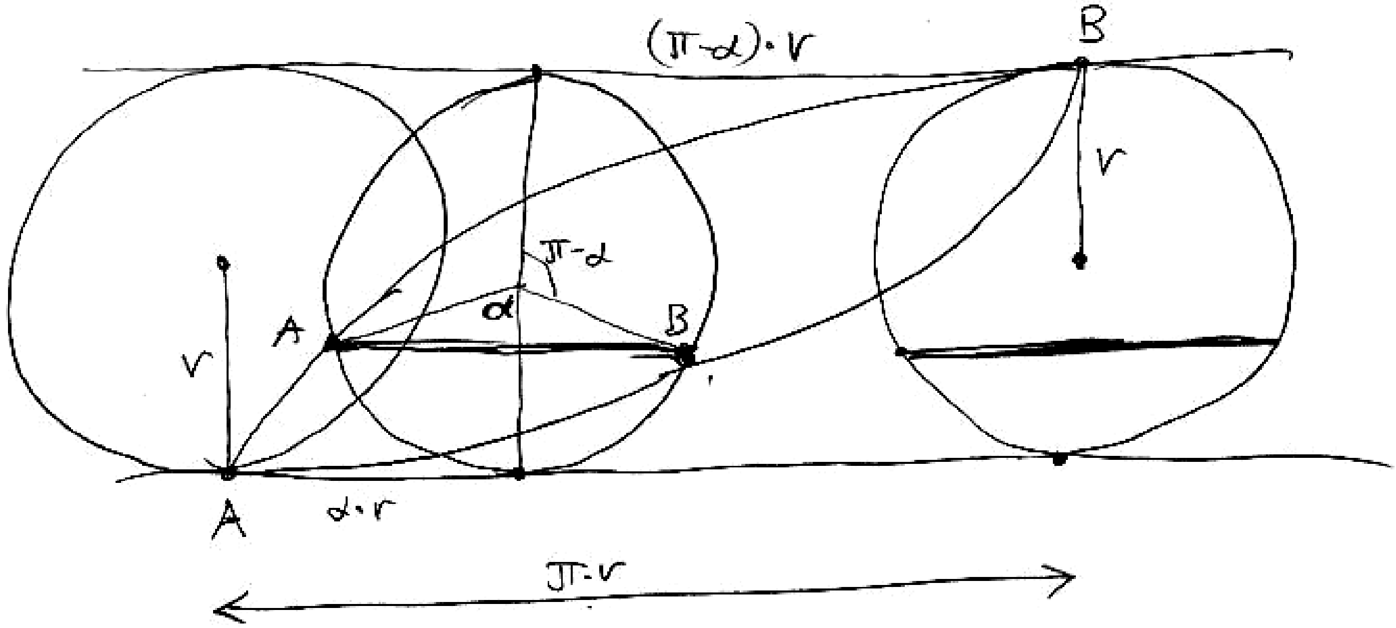
cykloida – linia jaką zatacza punkt na brzegu koła toczącego się bez poślizgu po prostej



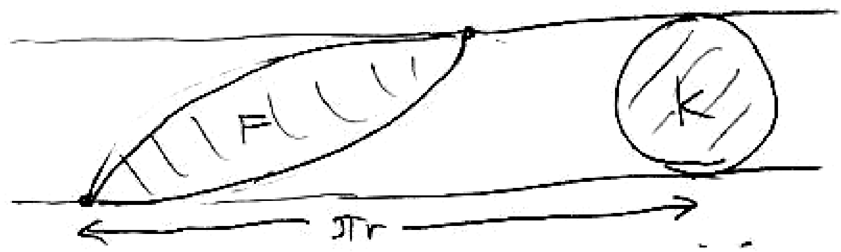


C – figura ograniczona cykloidą

Pomysł na wyliczenie opiera się na następującym rysunku

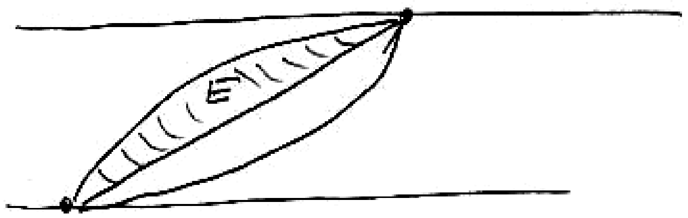


Figurę ograniczoną dwiema „połówkami" cykloidy ma pole równe polu toczącego się koła:



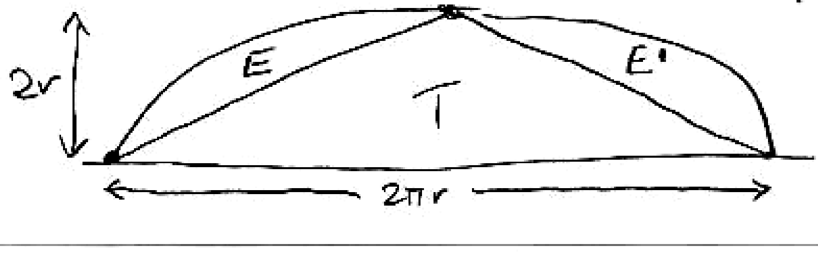
$$P(F) = P(K) = \pi r^2$$

Stąd wynika, że:



$$P(E) = \frac{1}{2} P(K) = \frac{1}{2}\pi r^2$$

Zatem:



$$P(C) = P(E) + P(E') + P(T) =$$
$$= 2\cdot P(E) + P(T) =$$
$$= 2\cdot\frac{1}{2}\pi r^2 + \frac{2\pi r\cdot 2r}{2} =$$
$$= \pi r^2 + 2\pi r^2 = 3\pi r^2$$

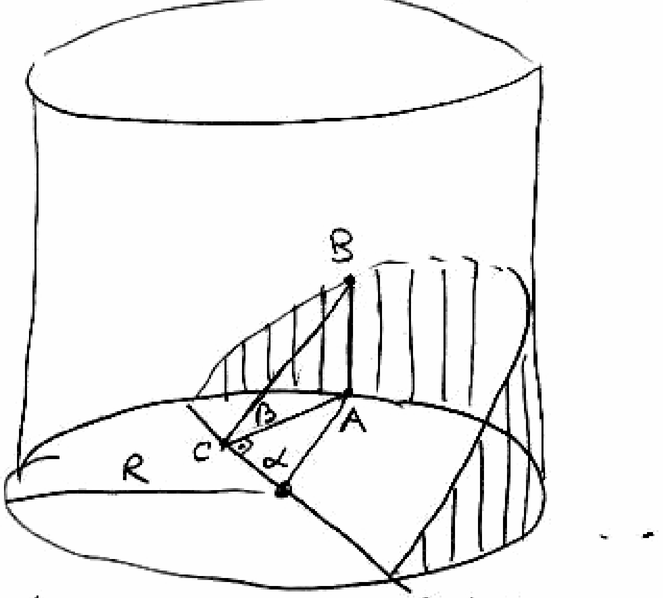
WNIOSEK: pole figury ograniczonej cykloidą to 3-krotność pola toczącego się koła.

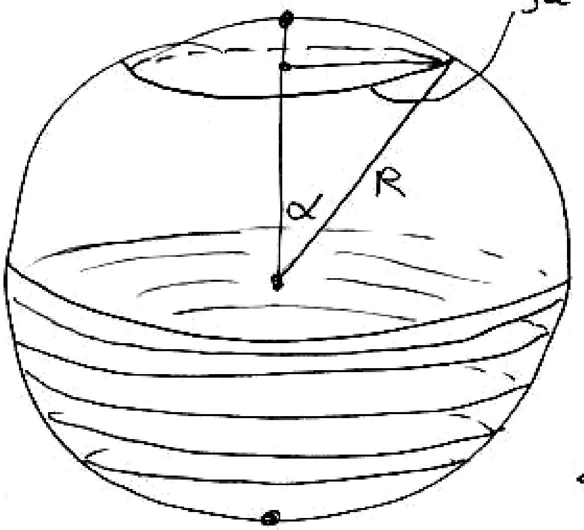
PROPORCJONALNOŚCIOWA ZASADA CAVALIERIEGO

Jeśli przekroje dwóch brył na jednakowych poziomach mają pola pozostające w stałej proporcji λ, to objętości tych brył również tworzą tę samą proporcję:

$$\underbrace{P_1(h)=\lambda\cdot P_2(h)}_{\text{dla każdego } h} \Longrightarrow V_1=\lambda\cdot V_2 .$$

PRZYKŁAD niestandardowego zastosowania zasady proporcjonalnościowej





klin walcowy - interesuje nas jego powierzchnia boczna zapełniona pionowymi odcinkami i jej pole P

β - kąt nachylenia płaszczyzny

- odcinek AB odpowiadający parametrowi $\alpha \in [0,\pi]$
- $|AB| = |AC|\cdot \operatorname{tg}\beta$

  $|AC| = R\cdot \sin\alpha$
- zatem $|AB| = R\sin\alpha \operatorname{tg}\beta$

porównamy sferę o promieniu R „zapełnioną" równoleżnikami

- równoleżnik ϱ_α odpowiadający parametrowi $\alpha\in[0,\pi]$
- jest okręgiem o promieniu $R\sin\alpha$

  więc ma obwód $2\pi R\sin\alpha$

- dla każdego α zachodzi $|AB|/|\varrho_\alpha| = \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\pi}$, więc proporcja jest stała

STĄD: $P/4\pi R^2 = \frac{\operatorname{tg}\beta}{2\pi}$ czyli $P = 2R^2\operatorname{tg}\beta$.