KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 5. ROZSZERZENIA CIAŁ I ICH STOPNIE. NIEALGEBRAICZNOŚĆ LICZBY π.

Ćwiczenia (do samodzielnego przerobienia - nie będą omawiane na zajęciach).

1. Przedstaw sumę, różnicę, iloczyn i iloraz liczb $2 - \sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{4}$ oraz $\sqrt[3]{4} - 7\sqrt[3]{2} + 5$ z ciała $Q(\sqrt[3]{2})$ w postaci $q_0 + q_1\sqrt[3]{2} + q_2(\sqrt[3]{2})^2$, gdzie q_0, q_1, q_2 są wymierne.
2. Znajdź stopień i bazę rozszerzenia $Q \subset Q(\sqrt[5]{2})$ jeśli wiadomo, że $\sqrt[5]{2}$ jest liczbą algebraiczną stopnia 5.
3. Niech $F_1 = Q(\sqrt{3})$ i $F_2 = F_1(\sqrt{5})$. Znajdź stopień i bazę rozszerzenia $Q \subset F_2$.

Zadania.

1. Przedstaw liczby $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$ oraz $\frac{1}{\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}+1}$ z ciała $Q(\sqrt[3]{2})$ w postaci $q_0 + q_1\sqrt[3]{2} + q_2\sqrt[3]{4}$, gdzie $q_0, q_1, q_2 \in Q$
2. Niech u będzie pierwiastkiem wielomianu $x^3 - x^2 - 1$, oraz niech $a = 2 + u - 3u^2$, $b = 1 - u + u^2$. Przedstaw liczby $a \cdot b$ oraz $1/a$ w postaci $q_0 + q_1 u + q_2 u^2$, gdzie q_0, q_1, q_2 są wymierne.
3. Niech $F_1 = Q(\sqrt{2})$, $F_2 = F_1(\sqrt{3})$ i $F_3 = F_2(\sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{3}})$. Znajdź stopień i bazę rozszerzenia $Q \subset F_3$.
4. Sprawdź, że rozszerzenie $Q(1 + \sqrt{5})$ ciała Q o liczbę algebraiczną $1 + \sqrt{5}$ jest dokładnie tym samym ciałem co rozszerzenie kwadratowe $Q(\sqrt{5})$.
5. Uzasadnij, że każde rozszerzenie stopnia 2 dowolnego ciała liczbowego F jest rozszerzeniem kwadratowym. Wskazówka: rozważ dowolną dwuelementową bazę tego rozszerzenia, postaci $\{1, a\}$; wyraź element a^2 jako kombinację elementów z tej bazy; wywnioskuj, że a jest pierwiastkiem pewnego równania kwadratowego o współczynnikach z ciała F; wyraź a wzorem na pierwiastek równania kwadratowego; wyciągnij odpowiednie wnioski.
6. Uzasadnij, że jeśli u jest liczbą algebraiczną stopnia k, zaś a jest różnym od u pierwiastkiem wielomianu minimalnego liczby u, to a jest również liczbą algebraiczną stopnia k.
7. Korzystając z tego, że pierwiastek $\sqrt[3]{2}$ jest niekonstruowalny uzasadnij, że liczba $2\sqrt[3]{4} + \sqrt[3]{2} + 1$ jest też niekonstruowalna. Wywnioskuj (bez znajdowania wielomianu minimalnego), że stopień tej liczby wynosi 3, czyli tyle co stopień liczby $\sqrt[3]{2}$.

Zadania dotyczące niealgebraiczności liczby π.

8. Czy przy pomocy cyrkla i linijki jest wykonalna konstrukcja koła o polu równym
   (a) polu danego kwadratu (jest to problem odwrotny do problemu kwadratury koła);
   (b) połowie pola danego koła;
   (c) sumie pól dwóch danych kół;
   (d) różnicy pól danego kwadratu i wpisanego weń koła?
9. czy przy pomocy cyrkla i linijki jest wykonalna konstrukcja
   (a) koła o obwodzie równym danemu odcinkowi;
   (b) koła o obwodzie równym sumie obwodów trzech danych kół;
   (c) półkola o obwodzie równym danemu odcinkowi;
   (d) półkola o obwodzie równym obwodowi danego koła?