KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
LISTA 6. ZASTOSOWANIA KRYTERIUM EISENSTEINA.

Ćwiczenia (do samodzielnego przerobienia - nie będą omawiane na zajęciach).

1. O których z poniższych wielomianów potrafisz rozstrzygnąć, że są nierozkładalne bezpośrednio stosując kryterium Eisenteina:
   $x^4 + 6x^2 - 18x + 12, \qquad x^4 + 21x^3 - 3x^2 + 49, \qquad x^5 - 10x^2 + 50?$

Zadania.

1. Znajdź wielomian minimalny liczby $\sqrt[3]{2+\sqrt{6}}$. Wykaż, że jest to liczba niekonstruowalna.
2. Znajdź stopień liczby algebraicznej $\sqrt{3-\sqrt[4]{3}}$.
3. Dla jakich liczb naturalnych k i n można uzasadnić stosując bezpośrednio kryterium Eisensteina, że jest liczba $\sqrt[n]{k}$ jest liczbą algebraiczną stopnia n?
4. Uzasadnij, że jeśli wielomian $W(x) \in Q[x]$ jest nierozkładalny nad Q, zaś q jest liczbą wymierną różną od zera, to wielomian $V(x) := W(x+q)$ jest też nierozkładalny nad Q.
5. Uzasadnij, że liczba $\sqrt[5]{36}$ jest liczbą algebraiczną stopnia 5. Wskazówka: rozważ wielomian $V(x) := W(x+1)$ dla wielomianu $W(x) = x^5 - 36$. Podobnym sposobem uzasadnij, że stopień liczby $\sqrt[5]{4}$ wynosi 5, a następnie wywnioskuj, że jest to liczba niekonstruowalna.
6. Uzasadnij, że jeśli u jest liczbą algebraiczną, zaś $q \in Q$, to stopień liczby $u+q$ jest równy stopniowi liczby u. Wskazówka: rozważ wielomian minimalny $W(x)$ liczby u oraz wielomian $V(x) := W(x-q)$.
7. Uzasadnij, że jeśli wielomian $W(x) \in Q[x]$ jest nierozkładalny nad Q, zaś q jest liczbą wymierną różną od zera, to wielomian $V(x) := W(q \cdot x)$ jest też nierozkładalny nad Q. Wywnioskuj stąd, że dla dowolnej liczby algebraicznej u oraz wymiernej q stopnie liczb $q \cdot u$ oraz u są równe.
8. Uzasadnij, że wielomian $W(x) = 2x^4 - 7$ jest nierozkładalny, rozważając wielomian $V(x) := W(\frac{x}{2})$ pomnożony przez taką liczbę, by współczynniki stały się całkowite. Podobnie uzasadnij, że nierozkładalny jest wielomian $9x^5 + 5$.
9. Znajdź stopień liczby $\sqrt[5]{3/2}$ dwoma sposobami:
   (a) korzystając z tego, że $\sqrt[5]{3/2} = \frac{1}{2}\sqrt[5]{48}$ oraz z zadania 7;
   (b) posługując się metodą z zadania 8.
   Podobnie znajdź stopień liczby $\sqrt[4]{2/3}$.
10. Dla danego wielomianu $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ rozważmy wielomian
   $$\widetilde{W}(x) := a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n.$$
   (a) Uzasadnij, że $\widetilde{W}(x) = x^{\mathrm{st}(W)} \cdot W(\frac{1}{x}) = x^n \cdot W(\frac{1}{x})$.
   (b) Uzasadnij, że jeśli liczba $u \neq 0$ jest pierwiastkiem W, to liczba $\frac{1}{u}$ jest pierwiastkiem $\widetilde{W}$.
   (c) Uzasadnij, że jeśli $W(x) = U(x) \cdot V(x)$, to $\widetilde{W}(x) = \widetilde{U}(x) \cdot \widetilde{V}(x)$.
   (d) Uzasadnij, że jeśli W jest nierozkładalny, to $\widetilde{W}$ też jest nierozkładalny.
   (e) Wywnioskuj, że dla dowolnej liczby algebraicznej $u \neq 0$ stopień liczby $\frac{1}{u}$ jest równy stopniowi u.
   (f) Znajdź stopień liczby $\sqrt[5]{9/5}$.
11. $W(x) = x^3 - 15x^2 + 12$ jest wielomianem minimalnym liczby algebraicznej u. Znajdź wielomiany minimalne liczb $u-2$, $3u$, $2u+3$, $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{u+1}$, $\frac{2}{2u-1}$, $\frac{u-1}{u+1}$.