

**M**arkowe  
**W**ykłady  
z **M**atematyki

**M**arkowe  
**W**ykłady  
z **M**atematyki

**algebra  
z geometrią**



**Marek Zakrzewski**

*Projekt okładki*  
Andrzej Krupa

*Zdjęcie na okładce*  
Artur Zakrzewski

Copyright © 2015 by Marek Zakrzewski

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych, mechanicznych, kopiujących, nagrywających i innych. Ponadto utwór nie może być umieszczany ani rozpowszechniany w postaci cyfrowej zarówno w Internecie, jak i w sieciach lokalnych, bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich.

Skład komputerowy książki w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X wykonał autor.

ISBN 978-83-62780-35-8

---

Wydanie I, Wrocław 2015  
Oficyna Wydawnicza GiS, s.c., [www.gis.wroc.pl](http://www.gis.wroc.pl)  
Druk i oprawa: Oficyna Wydawnicza ATUT

---

*Wyznaję pogląd naiwny, ale logicznie bez zarzutu, że [...] są tylko dwie kategorie studentów: tacy, którzy już lubią matematykę oraz tacy, którzy jeszcze jej nie lubią, ale mogą polubić. Moja książka adresowana jest do obu tych grup.*

George F. Simmons, *Calculus gems*, MAA 2007

*Tymczasem Émilie [Markiza du Châtelet] zajmuje się algebrą, co będzie bardzo jej pomocne w życiu, a nadto przyda uroku w towarzystwie.*

Voltaire, *Listy*



# Spis treści

<b>I</b>	<b>Liczby zespolone i równania</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Liczby zespolone</b>	<b>5</b>
1.1	Działania na liczbach zespolonych . . . . .	5
1.2	Interpretacja geometryczna . . . . .	9
1.3	Matematycy włoskiego renesansu . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Wzór de Moivre’a i pierwiastki z jedności</b>	<b>13</b>
2.1	Postać trygonometryczna i wzór de Moivre’a . . . . .	13
2.2	Pierwiastki $n$ -tego stopnia . . . . .	16
2.3	Pierwiastki z jedności a wielokąty foremne* . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Wielomiany i Zasadnicze Twierdzenie Algebry</b>	<b>21</b>
3.1	Wielomiany . . . . .	21
3.2	Zasadnicze Twierdzenie Algebry . . . . .	24
3.3	Równania algebraiczne trzeciego stopnia* . . . . .	27
<b>4</b>	<b>Prosta i krzywe stożkowe</b>	<b>29</b>
4.1	Równanie prostej i równanie okręgu . . . . .	29
4.2	Krzywe stożkowe . . . . .	33
4.3	Stożkowe a równania . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Trzeci wymiar</b>	<b>39</b>
5.1	Wektory . . . . .	39
5.2	Proste i płaszczyzny . . . . .	44
5.3	Euklides i jego <i>Elementy</i> . . . . .	48

<b>II</b>	<b>Układy równań liniowych, macierze i wyznaczniki</b>	<b>49</b>
<b>6</b>	<b>Układy równań liniowych i metoda eliminacji</b>	<b>53</b>
6.1	Układy oznaczone . . . . .	53
6.2	Układy sprzeczne i nieoznaczone . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Macierze</b>	<b>59</b>
7.1	Algebra macierzy . . . . .	59
7.2	Macierz odwrotna . . . . .	64
7.3	Odwracanie macierzy a metoda eliminacji . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Wyznaczniki</b>	<b>69</b>
8.1	Określenie wyznacznika i najprostsze obliczenia . . . . .	69
8.2	Własności wyznaczników . . . . .	71
8.3	Dwa bardzo ważne twierdzenia . . . . .	77
<b>9</b>	<b>Rozwinięcie Laplace'a i jego konsekwencje</b>	<b>79</b>
9.1	Rozwinięcie Laplace'a . . . . .	79
9.2	Wzór na macierz odwrotną . . . . .	81
9.3	Wzory Cramera . . . . .	84
9.4	Takakazu Seki . . . . .	86
<b>10</b>	<b>Pola, objętości i wyznaczniki</b>	<b>87</b>
10.1	Pole równoległoboku i orientacja płaszczyzny . . . . .	87
10.2	Iloczyn wektorowy . . . . .	89
10.3	Iloczyn mieszany i objętość równoległościanu . . . . .	94
10.4	Matematycy z Wysp: Hamilton i Cayley . . . . .	96
<b>III</b>	<b>Przestrzenie liniowe i układy równań</b>	<b>97</b>
<b>11</b>	<b>Przestrzenie liniowe</b>	<b>101</b>
11.1	Określenia i przykłady . . . . .	101
11.2	Podprzestrzenie liniowe . . . . .	105
<b>12</b>	<b>Niezależność, baza i wymiar</b>	<b>109</b>
12.1	Kombinacje liniowe i niezależność . . . . .	109
12.2	Baza i wymiar . . . . .	113
12.3	Banach . . . . .	118

<b>13 Układy równań i podprzestrzenie liniowe <math>\mathbb{R}^n</math></b>	<b>119</b>
13.1 Rząd macierzy . . . . .	119
13.2 Podprzestrzenie afiniczne i twierdzenie Kroneckera-Capellego . . . . .	122
13.3 Grassmann . . . . .	126
<b>14 Iloczyn skalarny i przestrzenie euklidesowe</b>	<b>127</b>
14.1 Iloczyn skalarny i norma . . . . .	127
14.2 Ortogonalność i kąty . . . . .	132
14.3 Bazy ortonormalne i ortogonalizacja Grama-Schmidta . . . . .	134
14.4 Hilbert . . . . .	138
<b>15 Rzut ortogonalny i metoda najmniejszych kwadratów*</b>	<b>139</b>
15.1 Rzut ortogonalny . . . . .	139
15.2 Metoda najmniejszych kwadratów . . . . .	142
<b>IV Przekształcenia liniowe i ortogonalne</b>	<b>147</b>
<b>16 Przekształcenia liniowe</b>	<b>151</b>
16.1 Określenia i przykłady . . . . .	151
16.2 Przekształcenia liniowe a macierze . . . . .	154
16.3 Jądro i obraz przekształcenia liniowego . . . . .	159
<b>17 Wektory własne, diagonalizacja i potęgowanie macierzy</b>	<b>163</b>
17.1 Wektory i wartości własne, wielomian charakterystyczny . . . . .	163
17.2 Diagonalizacja i potęgowanie macierzy . . . . .	167
<b>18 Zastosowania diagonalizacji i wektorów własnych</b>	<b>173</b>
18.1 Sieci i rankingi . . . . .	173
18.2 Dyskretne układy dynamiczne i procesy Markowa . . . . .	175
18.3 Układy równań różniczkowych . . . . .	180
<b>19 Przekształcenia ortogonalne</b>	<b>183</b>
19.1 Przekształcenia i macierze ortogonalne . . . . .	183
19.2 Przekształcenia ortogonalne na płaszczyźnie . . . . .	188
19.3 Przekształcenia ortogonalne w przestrzeni . . . . .	191



<b>V</b>	<b>Grupy i symetrie</b>	<b>193</b>
<b>20</b>	<b>Symetrie figur i pojęcie grupy</b>	<b>197</b>
20.1	Symetrie figur i grupy przekształceń . . . . .	197
20.2	Ogólne pojęcie grupy . . . . .	200
20.3	Kilka prostych, ale ważnych twierdzeń . . . . .	204
<b>21</b>	<b>Podgrupy, iloczyn i twierdzenie Lagrange'a</b>	<b>207</b>
21.1	Podgrupy . . . . .	207
21.2	Grupy cykliczne i iloczyn grup . . . . .	210
21.3	Twierdzenie Lagrange'a i rozbitcia na warstwy . . . . .	212
21.4	Noether i van der Waerden . . . . .	216
<b>22</b>	<b>Izomorfizm i struktura grup</b>	<b>217</b>
22.1	Izomorfizm . . . . .	217
22.2	Generatory i relacje* . . . . .	220
<b>23</b>	<b>Grupy permutacji i symetrie wielościanów</b>	<b>223</b>
23.1	Permutacje i grupa symetryczna $S_n$ . . . . .	223
23.2	Parzystość permutacji i grupy alternujące $A_n$ . . . . .	225
23.3	Symetrie wielościanów platońskich . . . . .	228
<b>24</b>	<b>Dzielniki normalne, homomorfizmy i grupy ilorazowe*</b>	<b>233</b>
24.1	Elementy sprzężone i dzielniki normalne . . . . .	233
24.2	Grupy proste . . . . .	236
24.3	Homomorfizmy i grupy ilorazowe* . . . . .	238
<b>25</b>	<b>Lemat CFB i skończone grupy symetrii*</b>	<b>241</b>
25.1	Lemat o orbitach i lemat CFB . . . . .	241
25.2	Skończone grupy symetrii . . . . .	246
<b>VI</b>	<b>Pierścienie, ciała i teoria Galois</b>	<b>251</b>
<b>26</b>	<b>Pierścienie, ciała i wielomiany</b>	<b>255</b>
26.1	Pierścienie i ciała . . . . .	255
26.2	Pierścienie wielomianów . . . . .	259
<b>27</b>	<b>Pierścienie ilorazowe i ciała skończone</b>	<b>263</b>
27.1	Konstrukcja . . . . .	263
27.2	Kwestie istnienia* . . . . .	267

<b>28 Ciała skończone i teoria kodowania</b>	<b>269</b>
28.1 Kod Hamminga . . . . .	269
28.2 Kody BCH . . . . .	273
<b>29 Wprowadzenie do teorii Galois*</b>	<b>275</b>
29.1 Rozszerzenia ciała liczb wymiernych . . . . .	276
29.2 Automorfizmy ciał i grupa Galois . . . . .	278
29.3 Galois . . . . .	282
<b>30 Nerozwiązywalne równania i niewykonalne konstrukcje*</b>	<b>283</b>
30.1 Nerozwiązalność równań piątego stopnia . . . . .	283
30.2 Konstrukcje geometryczne . . . . .	286
30.3 Abel . . . . .	288
<b>Odpowiedzi i wskazówki</b>	<b>289</b>
<b>Indeks</b>	<b>307</b>



# Wstęp

*Mam nadzieję, że student nauczy się tu, że rachunki nie są ani głównym sposobem uprawiania matematyki, ani jej głównym celem, ani też główną radością, jaką daje matematyka.*

Robert J. Valenza, *Linear Algebra*,  
Springer Verlag 1993

*Intuicja przestrzenna czy też percepcja przestrzeni (...) to niezwykle skuteczne narzędzie, i dlatego geometria jest tak istotną częścią matematyki — nie tylko dla rzeczy oczywiście geometrycznych, ale nawet dla takich, które geometryczne nie są. Próbujemy nadać im geometryczną postać, gdyż pozwala nam to korzystać z naszej intuicji.*

Michael Atiyah,  
*Mathematical Evolutions*, ed. Abe Schnitzer  
and John Stillwell, MAA 2002

Książka może służyć jako podręcznik algebry liniowej i abstrakcyjnej, a także geometrii analitycznej dla studentów kierunków matematycznych i technicznych. Materiał z geometrii analitycznej staraliśmy się tu ograniczyć do minimum koniecznego w algebrze liniowej. W szczególności skrótowo potraktowane są krzywe stożkowe. Więcej powiemy o nich w kolejnym tomie, gdzie będzie można pokazać ich istotne zastosowania.

## Wstęp do nowoczesnej matematyki

Dwa podstawowe działy matematyki, z jakimi styka się student, to analiza i algebra. Analiza powstała w odpowiedzi na ważne pytania mechaniki; w szczególności, dzięki pracom Newtona, pozwoliła zrozumieć podstawowe zasady ruchu planet.

Algebra jeszcze do niedawna definiowana była jako nauka o rozwiązywaniu równań i ich układów. Badania układów równań liniowych doprowadziły do odkrycia macierzy i wyznaczników, a dalsze próby geometrycznego spojrzenia na układy równań dały matematyce przestrzenie i przekształcenia liniowe. Z tematyki tej wyrosła **algebra liniowa**.

Z kolei wzory na pierwiastki równań algebraicznych trzeciego i czwartego stopnia wprowadziły do matematyki liczby zespolone. Próba znalezienia analogicznych wzorów dla równań piątego stopnia zrewolucjonizowała algebrę, koncentrując jej uwagę na **strukturach** algebraicznych takich, jak grupy, ciała czy pierścienie. Badaniem tych pojęć zajmuje się **algebra abstrakcyjna**.

Algebra liniowa dostarcza narzędzi przede wszystkim dla analizy, równań różniczkowych czy teorii prawdopodobieństwa; algebra abstrakcyjna wiąże się raczej z matematyką dyskretną. Ale ich wspólną cechą jest poziom abstrakcji, wyraźnie wyższy niż w przypadku analizy czy matematyki dyskretnej. Dzięki temu wykłady z algebry dają pierwsze wyobrażenie o charakterze **nowoczesnej matematyki**.

Ta nowoczesność ma swoją cenę. Na wykładach z analizy istotne zastosowania pojawiają się często bezpośrednio po wprowadzeniu odpowiedniego pojęcia, podobnie jest na matematyce dyskretnej. Algebra i geometria są (niestety!) zasadniczo inne. Pomiędzy pojawieniem się jakiegoś pojęcia a jego istotnym zastosowaniem upływają często tygodnie (czyli 50-60 stron książki). Tak więc Czytelnik powinien uzbroić się w cierpliwość.

## Motywy przewodnie

Motywym przewodnim trzech początkowych części książki są **równania**. Mówimy tu o liczbach zespolonych (i równaniach algebraicznych trzeciego stopnia), o stożkowych (i równaniach drugiego stopnia o dwu zmiennych) o macierzach (i układach równań liniowych). Aby zbudować ogólną teorię układów równań liniowych wprowadzamy przestrzenie liniowe.

W trzech końcowych częściach dominują **przekształcenia**. W gruncie rzeczy rozwijamy tu na poziomie abstrakcyjnym dwie proste idee: proporcjonalności (część IV) i symetrii (część V). Te dwa motywy — równania i przekształcenia — łączą się w końcowych wykładach, poświęconych teorii Galois.

## Rachunki w dobie komputera

Naszym podstawowym celem jest zrozumienie pojęć i związków między nimi. Im lepiej rozumiemy materiał, tym łatwiej dostrzegamy możliwe zastosowania.

Czasem jednak niezbędna jest pewna biegłość rachunkowa. W szczególności wymagane będzie swobodne operowanie liczbami zespolonymi i działaniami na małych macierzach. Jest to konieczne dla rozumienia algebry.

Unikamy zadań trudnych rachunkowo. Tam, gdzie jest to konieczne podpowiadamy odpowiednie instrukcje programu Wolfram Alpha<sup>®</sup>.

## Zadania i dowody

Po każdym podrozdziale pojawia się seria zadań. Zadania umieszczone za potrójnym karo mogą wymagać pewnej pomysłowości, a zawsze rozumienia używanych pojęć. Staramy się, aby większość pojęć pojawiała się w różnych kontekstach; tam, gdzie to możliwe pokazujemy nietrywialne zastosowania. Na końcu książki do znacznej części zadań (zwłaszcza istotnych dla podstawowego opanowania materiału) dajemy odpowiedzi bądź wskazówki.

Większość twierdzeń podajemy z uzasadnieniem. Rzadko są to pełne, ścisłe dowody, ale warto je śledzić, aby zrozumieć, jak to wszystko działa.

## Spiesz się powoli

Matthias Beck i Ross Geoghegan w książce *The Art of Proof* (Springer 2010) każdy rozdział kończą taką samą formułką: *Czytanie matematyki różni się od czytania powieści czy książek historycznych. Powinieneś myśleć powoli nad każdym zdaniem. Zazwyczaj będziesz musiał przestudiować ten sam materiał ponownie, często więcej niż raz.*

Uwagi autorów idealnie pasują do materiału zawartego w tych wykładach. Zatem spiesz się powoli.

## Biogramy

Podobnie, jak we wcześniejszych tomach tego cyklu w książce przedstawiamy sylwetki najważniejszych matematyków związanych z wykładaną tematyką. Postacie omówione szerzej w poprzednich tomach cyklu (w tym Karol Fryderyk Gauss) nie mają osobnych biogramów tutaj. Wyjątkiem jest Arthur Cayley, który odegrał wybitną rolę zarówno w rozwoju algebry liniowej, jak też abstrakcyjnej.

Historia algebry jest wyjątkowo skomplikowana, rzadko można wskazać rezultat przypisać jednoznacznie konkretnemu matematykowi. Stąd też kilka biogramów (m.in. Banach, Hilbert, Noether) dotyczy postaci, które zadecydowały o kształcie współczesnej algebry i jej dzisiejszej pozycji, chociaż ich

nazwiska nie występują w głównym tekście książki. Z podobnych powodów umiejscowienie notek biograficznych w tekście jest czasem dość przypadkowe.

## Uwagi dla wykładowców

Materiał książki pozwala w naturalnym tempie realizować roczny kurs algebry liniowej i abstrakcyjnej, a także semestralny kurs algebry abstrakcyjnej. Prawdopodobnie najczęściej wykorzystywany będzie jako podstawa do semestralnego kursu *Algebra z geometrią analityczną*. Taki kurs zazwyczaj ma program dość napięty i słabo umotywowany. Przy zachowaniu troski o motywację można go poprowadzić (przy minimalnych cięciach) na podstawie wykładów 1-14 oraz 16-18, przy łączeniu wykładów 8-9 oraz 11-12. Łączone wykłady wymagać będą oczywiście pominięcia części rozumowań lub innych elementów.



W poprzednich tomach starałem się w tym miejscu wskazać najważniejsze inspiracje. Spróbuję to zrobić i teraz. Części poświęcone algebrze liniowej na pewno sporo zawdzięczają podręcznikom Davida Poole'a *Linear algebra* i Thomasa S. Shoresa *Applied Linear Algebra and Matrix Analysis*. Pracując nad algebrą abstrakcyjną korzystałem z *Groups and Symmetry* M. A. Armstronga, *Algebra and Geometry* Alana F. Beardona, *Abstract Algebra* Ronalda Solomona oraz *Symmetry* Kristophera Tappa.

Motto z Voltaire'a odpowiedziało mi książka Jerzego Kierula *Émilie du Châtelet i Voltaire* (PIW 2014).

Na zakończenie chciałbym podziękować moim Kolegom i zarazem Redaktorom-Wydawcom książki Marianowi Gewertowi i Zbigniewowi Skoczyłowskiemu. Pierwszy z nich zajął się przede wszystkim redakcją techniczną książki, w szczególności wykonał rysunki. Drugi zajmował się redakcją merytoryczną i językową. Podpowiedzieli też kilka ciekawych zadań. Dzięki ich zaangażowaniu udało się wygładzić styl, poprawić układ graficzny, a także usunąć wiele potknięć językowych, pomyłek w składzie i — czasem subtelnych — błędów merytorycznych. Bardzo dziękuję za tę ogromną pracę, tym bardziej, że upalne lato 2015 zupełnie pracom redakcyjnym nie sprzyjało.

Doświadczenie i teoria prawdopodobieństwa podpowiadają, że wiele innych błędów pozostało — mam nadzieję, że niegroźnych. Oczywiście odpowiada za nie wyłącznie autor.

I

# Liczby zespolone i równania





*Pomyśl sobie: w takim rachunku występują z początku całkiem solidne liczby, które mogą przedstawiać metry, ciężary lub coś innego, równie realnego, i przynajmniej są prawdziwymi liczbami. Przy końcu rachunku też są takie liczby. Ale te liczby łączy coś, czego nie ma. Czy to nie jest jak most, w którym jest tylko pierwsze i ostatnie przęsło, a przez który przechodzi się mimo to tak pewnie, jak gdyby stał cały? Dla mnie w takim rachunku jest coś, co powoduje zawrót głowy, jak gdyby kawałek drogi prowadził Bóg wie dokąd.*

*Robert Musil, Niepokoje wychowanka Törlessa,  
przekł. Wandy Kragen, Wydawnictwo Literackie,  
Kraków 1993.*

Algebra z dawien dawna zajmowała się rozwiązywaniem równań i ich układów. Współczesne definicje algebry określają ją znacznie szerzej i bardziej abstrakcyjnie. Te bardziej abstrakcyjne elementy będą wyraźne począwszy od trzeciej części książki. Ale nasz kurs zaczyna się i kończy równaniami.

Punktem wyjścia są równania jednej zmiennej. Już wzory na równania trzeciego stopnia wymagają wprowadzenia nowego rodzaju liczb — liczb zespolonych. Same wzory są całkowicie niepraktyczne, więc nie będziemy się nimi zajmować. Ale liczby zespolone okazały się ważnym narzędziem nie tylko w matematyce, ale również fizyce i naukach technicznych. Poświęcamy im trzy początkowe wykłady.

W wykładzie 4. przechodzimy do równań algebraicznych o dwu niewiadomych. Rozwiązaniem takiego równania jest zawsze pewien podzbiór płaszczyzny, tak więc w istocie są to zagadnienia geometryczne. Ograniczamy się tu do równań pierwszego i drugiego stopnia — ich rozwiązaniami są zazwyczaj proste i krzywe stożkowe (elipsa, hiperbola i parabola).

Wraz z przejściem do dwu (i więcej) zmiennych algebra w istocie zaczyna być geometrią. Ta płynność pomiędzy algebrą — czyli przekształcaniem wyrażeń a geometrią — czyli wyobrażeniami przestrzennymi, będzie widoczna także w dalszych częściach książki.

Równania kwadratowe rozwiązywali już Babilończycy — ok. 4000 lat temu, i starożytni Grecy — ok. 2500 lat temu. W XVI w. matematycy włoscy odkryli metody rozwiązywania równań trzeciego i czwartego stopnia, przy okazji wprowadzając liczby zespolone. W XVII w. Kartezjusz i Fermat pokazali, jak na język algebry przełożyć problemy klasycznej geometrii.

Geometria osiągnęła niemal doskonałość już w *Elementach* Euklidesa (ok. 300 p.n.e.). Także krzywe stożkowe znane były już starożytnym Grekom, a w traktacie *Stożkowe* Apoloniusza z Pergii (ok. 200 p.n.e.) ich teoria osiągnęła poziom bardzo zaawansowany. W XVII w. stały się na nowo jednym z zasadniczych tematów geometrii, dzięki geometrii analitycznej, prawom Keplera i teorii grawitacji Newtona.

W tych początkowych wykładach próbujemy zbliżyć Czytelnika do poziomu, jaki algebra osiągnęła ok. roku 1800.

# Wykład 1

## Liczby zespolone

Liczby zespolone pojawiły się w związku z rozwiązywaniem równań trzeciego stopnia. W połowie XVI w. matematycy włoscy odkryli wzory na pierwiastki równań trzeciego stopnia, zwane dziś wzorami Cardana. Wzory te wymagają operowania pierwiastkami kwadratowymi z liczb ujemnych, chociaż końcowy wynik jest liczbą rzeczywistą. Na przykład, jednym z pierwiastków rzeczywistych równania  $x^3 = 15x + 4$  jest  $x = 4$ , a wzory Cardano dają go w postaci

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = (2 + 11\sqrt{-1}) + (2 - 11\sqrt{-1}).$$

Ponieważ kwadrat liczby rzeczywistej jest zawsze nieujemny, więc jasne jest, że pierwiastkowanie liczb ujemnych wymaga wprowadzenia nowych liczb.

### 1.1 Działania na liczbach zespolonych

*Co to są liczby zespolone? - Cztery podstawowe działania - Pierwiastkowanie - Rozwiązywanie równań kwadratowych - Zadania*

Od momentu pojawienia się liczb zespolonych do podania ich ścisłej definicji upłynęło ponad 200 lat. My też wprowadzimy je w sposób nieformalny. W dalszej części wykładu zastanowimy się, jak nadać im sens.

#### Co to są liczby zespolone?

Przyjmijmy, że istnieje liczba  $i$  taka, że  $i^2 = -1$ . Jeżeli mamy na niej swobodnie wykonywać działania, to musimy zaakceptować też istnienie liczb postaci  $a+bi$ , gdzie  $a, b \in \mathbb{R}$ . Liczby tej postaci nazywamy **liczbami zespolonymi**. Zbiór liczb zespolonych oznaczamy symbolem  $\mathbb{C}$  (z ang. *complex numbers*).

Dla liczby zespolonej  $a + bi$  określamy jej **część rzeczywistą** (*real*) oraz **część urojoną** (*imaginary*) wzorami

$$\operatorname{Re}(a + bi) = a, \quad \operatorname{Im}(a + bi) = b.$$

Na przykład  $\operatorname{Re}(2 - 3i) = 2$ ,  $\operatorname{Im}(2 - 3i) = -3$ . Zwróć uwagę, że część urojona liczby zespolonej to sam *współczynnik* przy  $i$ , więc także ona jest liczbą rzeczywistą.

Dwie liczby zespolone  $a + bi$  oraz  $c + di$  uznajemy za równe, gdy  $a = c$  oraz  $b = d$ , czyli gdy ich części rzeczywiste i urojone są równe.

Zamiast pisać  $a + 0i$ , gdzie  $a \in \mathbb{R}$ , piszemy  $a$ . Tak więc każda liczba rzeczywista jest też liczbą zespoloną.

## Cztery podstawowe działania

**Dodawanie, odejmowanie i mnożenie** liczb zespolonych określamy następująco:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Określenia dodawania i odejmowania nie wymagają komentarza. Na przykład

$$(1 - 2i) + (-2 + i\sqrt{3}) = -1 + (-2 + \sqrt{3})i, \quad (1 - 2i) - (-2 + i\sqrt{3}) = 3 - (2 + \sqrt{3})i.$$

Wzoru na mnożenie nie musimy pamiętać. Wystarczy zrozumieć, skąd wzięło się takie określenie:

$$(a + bi)(c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = ac + adi + bci - bd = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

Na przykład

$$(3 + i)(4 - 5i) = 3 \cdot 4 - 3 \cdot 5i + 4i - 5i^2 = 12 - 15i + 4i - (-5) = 17 - 11i.$$

Dla mnożenia liczb zespolonych zachodzą wszystkie prawa działań dla liczb rzeczywistych, w tym wzory skróconego mnożenia. W szczególności, ze wzoru na różnicę kwadratów otrzymujemy

$$(c + di)(c - di) = c^2 - (di)^2 = c^2 - d^2i^2 = c^2 + d^2.$$

Teraz możemy już pokazać, jak wygląda **dzielenie** liczb zespolonych. Wykorzystujemy tu chwyt, znany z usuwania niewymierności w mianowniku:

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{-ad + bc}{c^2 + d^2}i.$$

Mało kto pamięta wyprowadzony wyżej wzór na dzielenie. Zazwyczaj przy każdym dzieleniu po prostu wykonujemy rachunki podobne do powyższych:

$$\frac{1+i}{3-2i} = \frac{(1+i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{1+5i}{3^2+2^2} = \frac{1}{13} + \frac{5}{13}i.$$

Zauważmy, że dzielenie nie jest wykonalne tylko, gdy  $c^2 + d^2 = 0$ , tzn. dla  $c = d = 0$ . Zatem dzielić można przez dowolną liczbę zespoloną różną od zera.

## Pierwiastkowanie

**Pierwiastkiem stopnia  $n$**  z liczby zespolonej  $z$  nazywamy dowolną liczbę zespoloną  $w$  taką, że  $w^n = z$ . W wykładzie 2. pokażemy, że liczba zespolona różna od zera ma  $n$  pierwiastków stopnia  $n$ .

Łatwo sprawdzić, że są dwa pierwiastki kwadratowe z liczby  $-1$ . Są nimi liczby  $i$  oraz  $-i$ . Nietrudno też przekonać się, że są cztery pierwiastki stopnia 4 z jedynek:  $1, i, -1$  oraz  $-i$ .

Na przykładzie  $\sqrt{3+4i}$  pokażemy, jak obliczyć pierwiastek kwadratowy z dowolnej liczby zespolonej. Niech  $x + yi$ , gdzie  $x, y \in \mathbb{R}$ , będzie szukany pierwiastkiem, tzn.  $(x + yi)^2 = 3 + 4i$ . Zatem  $(x^2 - y^2) + 2xyi = 3 + 4i$ , czyli

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = 4. \end{cases}$$

Z drugiego równania mamy  $y = 2/x$ . Podstawiając do pierwszego otrzymamy

$$x^2 - \left(\frac{2}{x}\right)^2 = 3, \quad \text{czyli} \quad x^4 - 3x^2 - 4 = 0.$$

Podstawienie  $t = x^2$  prowadzi do równania  $t^2 - 3t - 4 = 0$ , skąd  $t = 4$  lub  $t = -1$ . Zatem  $x^2 = 4$  lub  $x^2 = -1$ .

Liczby  $x$  oraz  $y$  są rzeczywiste, więc tylko pierwsze z równań odpowiada warunkom zadania. Tak więc  $x = 2, y = 1$  albo  $x = -2, y = -1$ . Otrzymujemy dwa pierwiastki  $2 + i$  oraz  $-2 - i$ .

W podobny sposób można pokazać, że każda liczba zespolona różna od zera ma dwa pierwiastki zespolone. Pierwiastkami wyższych stopni zajmiemy się w następnym wykładzie.

## Rozwiązywanie równań kwadratowych

Znany wzór na pierwiastki równania  $az^2 + bz + c = 0$  przyjmuje teraz prostszą postać

$$z = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \text{ gdzie } \Delta = b^2 - 4ac.$$

Zwróćmy uwagę, że przed  $\sqrt{\Delta}$  nie ma znaku  $\pm$ . Wynika to stąd, że w zbiorze liczb zespolonych sam pierwiastek oznacza każdą z *dwu* wartości. W szczególności  $\sqrt{-1}$  oznacza zarówno  $i$ , jak też  $-i$ .

Na przykład rozwiązaniem równania  $z^2 + 2z + 2 = 0$  jest

$$z = \frac{-2 + \sqrt{-4}}{2} = \frac{-2 + 2\sqrt{-1}}{2} = -1 + \sqrt{-1} = -1 \pm i.$$

## Zadania

1. Oblicz:

a)  $(2 + i)(3 - 2i)$ ;    b)  $(5 + 2i)(5 - 2i)$ ;    c)  $(3 + 2i)^2 - (3 - 2i)^2$ ;    d)  $(1 - i\sqrt{2})^3$ .

2. Wykonaj dzielenia:

a)  $\frac{1 + i}{1 - i}$ ;    b)  $\frac{11 + 3i}{2 + i}$ ;    c)  $\frac{-11 + 7i}{2 + 6i}$ ;    d)  $\frac{3 + 2i}{-1 + 3i}$ .

3. Wiedząc, że  $a, b \in \mathbb{R}$  znajdź część rzeczywistą i część urojoną liczb:

a)  $i(a + bi)$ ;    b)  $(a + bi)^2$ ;    c)  $(a + bi)(ai + b)$ ;    d)  $(a + bi)^3$ .

4. Oblicz:

a)  $\sqrt{8 + 6i}$ ;    b)  $\sqrt{5 - 12i}$ ;    c)  $\sqrt[3]{-8}$ .

5. Sprawdź, że  $2 + i$  jest jednym z pierwiastków sześciennych z liczby  $2 + 11i$ . Odgadnij jeden z trzech pierwiastków sześciennych z liczby  $2 - 11i$ .

6. Rozwiąż równania:

a)  $z^2 - 2z + 2 = 0$ ;    b)  $2z^2 + 2z + 1 = 0$ ;    c)  $z^2 - 8zi = 25$ ;    d)  $z + \frac{1}{z} = 1$ .

◇ ◇ ◇

7. Jakie wartości może przyjmować suma  $1 + i + i^2 + \dots + i^n$ ?

8. Sprawdź, że  $1 + i$  jest pierwiastkiem czwartego stopnia z liczby  $-4$ . Znajdź trzy pozostałe pierwiastki.

9. (Cardano, *Ars magna*, 1545) Podziel liczbę 10 na dwie tak, aby ich iloczyn równy był 40.

10. W japońskiej łamigłówce *KenKen* mamy wypełnić kwadrat (u nas  $4 \times 4$ ) liczbami tak, aby w każdym obszarze zaznaczonym obwódką otrzymać żądany wynik działania. Na przykład trzy pola w lewej kolumnie mają dać iloczyn 4, a dwa górne prawe różnicę  $1 + i$ . Rozwiąż poniższe łamigłówki używając liczb  $1, 1 + i, 1 - i$  oraz  $2$ .

$4\times$	$3+$	$1+i-$	
			$3+$
		$i-$	
$2\times$		$2\times$	

$i-$	$8\times$	$i-$	
		$4\times$	
			$1-i-$
$i-$			

## 1.2 Interpretacja geometryczna

*Liczby zespolone jako punkty płaszczyzny - Moduł i sprzężenie - Zadania*

Prowadzone przed chwilą rachunki sceptyk może zakwestionować: jak można prowadzić rachunki na liczbach, których nie ma? Teraz nadamy tym liczbom sens.

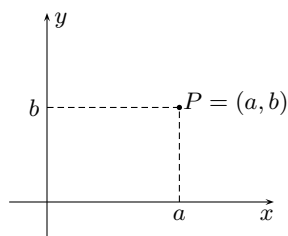
### Liczby zespolone jako punkty płaszczyzny

Istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy liczbami rzeczywistymi a punktami prostej (dokładniej: punktami osi liczbowej). Innymi słowy: punktom osi liczbowej odpowiadają liczby rzeczywiste. Podobnie liczby zespolone możemy traktować jako punkty płaszczyzny z odpowiednio określonymi działaniami.

Rozważmy płaszczyznę z układem współrzędnych. Oznaczmy punkt  $P = (a, b)$  symbolem  $a + bi$  i wprowadźmy na punktach-liczbach dwa działania:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i;$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$



Na mocy powyższej definicji mnożenia kwadratem punktu-liczby  $i = 0 + 1i$  jest  $i^2 = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$ . Widzimy zatem, że zbiór punktów płaszczyzny z tak określonymi działaniami daje nam liczby zespolone.

Przy geometrycznej interpretacji liczb zespolonych oś poziomą nazywamy **osią rzeczywistą**, a pionową — **osią urojoną**.



## Moduł i sprzężenie

**Sprzężeniem** liczby zespolonej  $a + bi$  nazywamy liczbę  $\overline{a + bi} = a - bi$ . Łatwo sprawdzić, że dla dowolnych liczb zespolonych  $z_1, z_2$  mamy

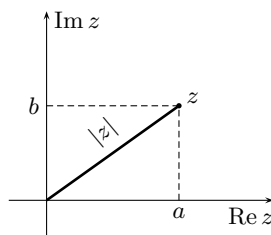
$$\begin{aligned}\overline{z_1 + z_2} &= \overline{z_1} + \overline{z_2}, \\ \overline{z_1 z_2} &= \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}.\end{aligned}$$

Analogiczne równości zachodzą dla odejmowania, a przy założeniu, że  $z_2 \neq 0$  — także dla dzielenia.

**Modułem** liczby zespolonej  $a + bi$  nazywamy jej odległość od zera, tzn.

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Zauważmy, że moduł rozszerza pojęcie wartości bezwzględnej dla liczb rzeczywistych.



Podobnie jak w przypadku modułu liczby rzeczywistej, odległość liczb  $z_1, z_2$  na płaszczyźnie zespolonej jest równa modułowi różnicy  $|z_2 - z_1|$ .

Bezpośrednio z definicji wynika prosta zależność

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Rzeczywiście, dla  $z = a + bi$  mamy

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

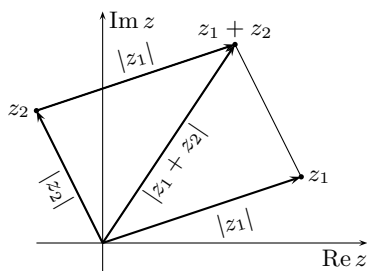
**TWIERDZENIE 1.1** (podstawowe własności modułu)

*Dla dowolnych liczb zespolonych  $z_1, z_2$  zachodzą równości*

$$\begin{aligned}|z_1 z_2| &= |z_1| |z_2|, \\ |z_1 / z_2| &= |z_1| / |z_2|, \text{ o ile } z_2 \neq 0.\end{aligned}$$

*Ponadto zachodzi tzw. nierówność trójkąta*

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$



DOWÓD: Ponieważ moduł jest liczbą nieujemną, więc dla dowodu pierwszej równości wystarczy pokazać, że kwadraty wyrażeń po obu stronach są równe:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)(\overline{z_1 z_2}) = z_1 z_2 \overline{z_1} \overline{z_2} = (z_1 \overline{z_1})(z_2 \overline{z_2}) = |z_1|^2 |z_2|^2.$$

Z kolei na mocy pierwszej równości

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| |z_2| = \left| \frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 \right| = |z_1|,$$

skąd wynika prawdziwość drugiej.

Nierówność trójkąta jest geometrycznie oczywista. Formalny dowód algebraiczny można otrzymać korzystając z nierówności Cauchy'ego-Buniakowskiego-Schwarza (p. str. 130).

## Zadania

11. Jak wygląda zbiór liczb zespolonych opisany warunkiem:

a)  $\bar{z} = z$ ; b)  $\bar{z} = iz$ ; c)  $z\bar{z} = 1$ ; d)\*  $z + \bar{z} = z\bar{z}$ ?

12. Znajdź moduł liczby:

a)  $-3 + 4i$ ; b)  $\sqrt{3} - i$ ; c)  $(1 + i)(1 + 2i)$ ; d)  $\frac{5 + 12i}{12 - 5i}$ .

13. Korzystając z geometrycznej interpretacji modułu różnicy zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór tych  $z$ , dla których:

a)  $|z| \leq 1$ ; b)  $|z - (1 + i)| = 1$ ; c)  $|z + i| = |z - 1|$ ; d)  $|z - 1| + |z - i| = \sqrt{2}$ .

14. Sprawdź, że dla dowolnej liczby zespolonej  $z$  liczby  $z + \bar{z}$  oraz  $z\bar{z}$  są rzeczywiste.

15. Pokaż, że dla dowolnych liczb zespolonych  $z_1, z_2$  liczba  $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2$  jest rzeczywista. Wsk. Pokaż, że jest równa swojemu sprzężeniu.



16. Pokaż, że jeżeli suma oraz iloczyn dwu liczb nierzeczywistych jest rzeczywista, to jedna z tych liczb jest sprzężeniem drugiej.

17. Zapisz za pomocą liczb zespolonych:

a) półpłaszczyznę złożoną z punktów leżących powyżej prostej  $y = x + 1$ ;

b) odcinek domknięty o końcach  $i$  oraz  $1$ .

18. Łatwo sprawdzić, że przekształcenie płaszczyzny dane wzorem

$$\varphi(z) = \bar{z}$$

to symetria względem osi rzeczywistej. Zapisz za pomocą liczb zespolonych:

a) symetrię względem prostej  $\text{Im } z = 1$ ;

b) symetrię względem osi urojonej;

c) symetrię względem prostej  $\text{Im } z = \text{Re } z$ .

19.\* Rozważmy przekształcenie płaszczyzny zespolonej  $f(z) = 1/z$ ,  $z \neq 0$ . Oczywiście okrąg  $|z| = a$  przejdzie przy tym przekształceniu na okrąg  $|z| = 1/a$ .

a) Na jaką figurę przejdzie przy tym przekształceniu okrąg  $|z - 1| = 1$ ?

b) Obrazem jakiej figury będzie prosta  $\text{Im}(z) = 1$ ?

### 1.3 Matematycy włoskiego renesansu

W swym traktacie *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* (1494) **Luca Pacioli (1445-1517)** pisał, że rozwiązanie równania trzeciego stopnia leży poza zasięgiem ludzkiego umysłu. Ale już kilkadziesiąt lat później problem ten został rozwiązany przez jego rodaków. Historia odkrycia wzorów na pierwiastki równań trzeciego stopnia jest dość skomplikowana, jej bohaterami są m.in. Scipione del Ferro, Tartaglia i Cardano.

**Scipione del Ferro (1465-1526)**, w latach 1496-1526 wykładowca arytmetyki i algebry na Uniwersytecie w Bolonii. Nie pozostawił po sobie żadnych manuskryptów ani publikacji drukowanych. Uchodzi za rzeczywistego odkrywcę tzw. wzorów Cardana.

**Niccolo Fontana, zw. Tartaglią (1499-1567)**, syn listonosza, w zasadzie samouk (jeśli wierzyć jego autobiografii, to w szkole poznał alfabet do litery K, gdyż na dalszą naukę nie było go stać). Większość życia żył z nauczania matematyki — najpierw w Weronie, potem w Wenecji. Umarł w biedzie. Niezależnie od Scipione del Ferro odkrył metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Jest też autorem pierwszego przekładu *Elementów* Euklidesa na język nowożytny.

**Girolamo Cardano (1501-1572)**, doktor medycyny, jeden z najwyżej cenionych lekarzy ówczesnej Europy. Profesor medycyny na uniwersytetach Pawii i Bolonii. Autor ponad 200 dzieł z zakresu medycyny, matematyki, fizyki, religii i muzyki. Do historii wszedł dzięki poświęconemu algebrze traktatowi *Ars Magna*, gdzie przedstawił metodę rozwiązywania równań trzeciego stopnia. Znajomość metody zawdzięczał Tartaglii (do czego uczciwie się przyznaje), który jednak nigdy nie wyraził zgody na jej upublicznianie. Cardano jest także jednym z prekursorów rachunku prawdopodobieństwa. Ma też znaczący wkład w mechanikę praktyczną — od niego pochodzi tzw. wał Cardana. Życie prywatne Cardana było wyjątkowo barwne, ale tragiczne. Jego syn został skazany na karę śmierci pod zarzutem otrucia żony, a sam Cardano spędził sporo czasu w więzieniu za sporządzenie horoskopu Chrystusa.

**Rafael Bombelli (1526-1576)**, inżynier i matematyk. Znaczną część życia spędził nadzorując prace związane z osuszaniem bagien. Gdy z przyczyn technicznych trzeba było je przerwać, zajął się pracą nad podręcznikiem algebry. Jego *Algebra* (1572) to starannie napisany podręcznik, wysoko ceniony jeszcze przez Leibniza, sto lat później. Bombelli zrozumiał, że wzory Cardana można stosować także wówczas, gdy w rachunkach pojawiają się pierwiastki z liczb ujemnych, i w ten sposób wprowadził do matematyki liczb zespolone.

## Wykład 2

# Wzór de Moivre'a i pierwiastki z jedności

Każdy rodzaj liczb znanych ze szkoły ma jakąś wadę. Liczb naturalnych nie można odejmować, liczb całkowitych dzielić, pierwiastkowanie liczb wymiernych wymaga wprowadzenia liczb niewymiernych, a dla ujemnych liczb rzeczywistych nie ma pierwiastków.

Liczyby zespolone zostały wprowadzone, aby każda liczba miała pierwiastek *kwadratowy*. Okazuje się jednak, że można z nich wyciągać pierwiastki dowolnego stopnia. Tak więc w zbiorze liczb zespolonych wykonalne jest pięć działań: dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie (z oczywistym wyjątkiem dzielenia przez zero) i pierwiastkowanie. Można przyjąć, że w tym momencie proces tworzenia liczb został zakończony.

### 2.1 Postać trygonometryczna i wzór de Moivre'a

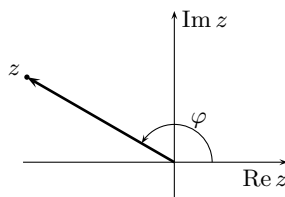
*Postać trygonometryczna - Wzór de Moivre'a - Zadania*

W poprzednim wykładzie liczby zespolone zapisywaliśmy w postaci  $a + bi$ , zwanej **postacią algebraiczną**. Teraz poznamy dwa dalsze sposoby zapisu: postać trygonometryczną (bardzo ważną) i wykładniczą. Wzór de Moivre'a ułatwia potęgowanie liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej.

Liczyby zespolone w postaci algebraicznej łatwo dodawać i odejmować, ale trudno mnożyć, dzielić i potęgować. Liczyby zespolone w postaci trygonometrycznej łatwo jest mnożyć, dzielić i potęgować, trudniej dodawać i odejmować.

## Postać trygonometryczna

Niech  $z = x + yi$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$  będzie liczbą zespoloną różną od zera. Wówczas jej położenie na płaszczyźnie zespolonej można określić za pomocą dwu parametrów: odległości od początku współrzędnych — czyli modułu liczby oraz kierunku promienia wodzącego tej liczby.



Kierunek określamy za pomocą kąta  $\varphi$ , jaki promień wodzący tworzy z dodatnią półosią osi  $Ox$ . Kąt ten nazywamy **argumentem** liczby  $z = x + yi$ . Formalnie, argument określamy warunki

$$\begin{cases} \cos \varphi = \frac{x}{|z|}, \\ \sin \varphi = \frac{y}{|z|}. \end{cases}$$

Jeśli jakiś kąt  $\varphi$  jest argumentem danej liczby zespolonej, to także  $\varphi + 2k\pi$  jest jej argumentem. Najmniejszy nieujemny argument liczby  $z$  nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy symbolem  $\arg z$ . Np.  $\arg(1 + i) = \pi/4$ .

Zauważmy, że dla  $z \neq 0$  mamy

$$z = x + yi = |z| \left( \frac{x}{|z|} + i \frac{y}{|z|} \right) = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

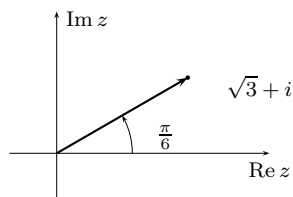
Zapis liczby zespolonej w postaci

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

gdzie  $r$  jest modułem liczby  $z$ , a  $\varphi$  jej argumentem, nazywamy **postacią trygonometryczną** liczby  $z$ .

W najprostszych przykładach postać trygonometryczną można odczytać z rysunku. Na przykład

$$\sqrt{3} + i = 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right).$$



Z geometrycznej interpretacji liczb zespolonych wynika natychmiast, że

$$r_1(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r_2(\cos \psi + i \sin \psi)$$

wtedy i tylko wtedy, gdy  $r_1 = r_2$  oraz  $\varphi = \psi + 2k\pi$  dla pewnej całkowitej liczby  $k$ . Z uwagi tej skorzystamy przy wyprowadzaniu wzoru na pierwiastki.

### Wzór de Moivre'a

Przemnożmy dwie liczby zadane w postaci trygonometrycznej:

$$\begin{aligned} & [r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)][r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)] = \\ & = r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\cos \varphi_1 \sin \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] = \\ & = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Tak więc przy mnożeniu liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej mnożymy moduły i dodajemy argumenty. W podobny sposób można pokazać, że przy dzieleniu dzielimy moduły i odejmujemy argumenty.

Mnożąc  $n$ -krotnie tę samą liczbę zespoloną otrzymamy klasyczny wzór:

**TWIERDZENIE 2.1** (de Moivre'a)

*Dla dowolnej liczby naturalnej  $n$  zachodzi równość*

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

**PRZYKŁAD 2.1** Oblicz  $(1 - i)^{18}$ .

**ROZWIĄZANIE:** Postać trygonometryczna potęgowanej liczby:

$$1 - i = \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right).$$

Ze wzoru de Moivre'a mamy zatem

$$\begin{aligned} (1-i)^{18} &= \left[ \sqrt{2} \left( \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) \right]^{18} = (\sqrt{2})^{18} \left( \cos \frac{18 \cdot 7\pi}{4} + i \sin \frac{18 \cdot 7\pi}{4} \right) = \\ &= 2^9 \left( \cos \frac{126\pi}{4} + i \sin \frac{126\pi}{4} \right) = 512 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right) = -512i. \end{aligned}$$

### Zadania

1. Znajdź postać trygonometryczną liczb:

a)  $-1$ ; b)  $2 - 2i$ ; c)  $-\sqrt{3} + i$ ; d)  $2 + i\sqrt{12}$ ; e)  $\cos \alpha - i \sin \alpha$ ; f)\*  $\sin \alpha + i \cos \alpha$ .

2. Korzystając ze wzoru de Moivre'a oblicz:

a)  $(1 + i)^{20}$ ; b)  $(1 - i\sqrt{3})^{10}$ ; c)  $(-\sqrt{3} + i)^{12}$ ; d)  $(-\sqrt{12} - 2i)^{16}$ .

3. Wyraż za pomocą  $\arg z$ : a)  $\arg(\bar{z})$ ; b)  $\arg(1/z)$ .

4. Korzystając ze wzoru de Moivre'a i wzoru dwumianowego Newtona wyraż:

a)  $\cos 3\alpha$  za pomocą  $\cos \alpha$ ; b)  $\sin 5\alpha$  za pomocą  $\sin \alpha$ .



5.\* Pokaż, że jednym z pierwiastków równania  $8x^3 - 6x = 1$  jest  $\cos 20^\circ$ . Znajdź dwa pozostałe pierwiastki.

## 2.2 Pierwiastki $n$ -tego stopnia

*Wzór na pierwiastki  $n$ -tego stopnia - Postać wykładnicza\* - Zadania*

Konsekwencją wzoru de Moivre'a jest prosty wzór na pierwiastki  $n$ -tego stopnia z liczby zespolonej w postaci trygonometrycznej. W zastosowaniach szczególną rolę odgrywają pierwiastki z jedności.

### Wzór na pierwiastki $n$ -tego stopnia

Niech  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  będzie ustaloną liczbą zespoloną różną od zera, a  $w = |w|(\cos \psi + i \sin \psi)$  — jej pierwiastkiem  $n$ -tego stopnia. Wówczas

$$[|w|(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

a więc mocy wzoru de Moivre'a mamy

$$|w|^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Tak więc

$$\begin{cases} |w|^n = r, \\ n\psi = \varphi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Stąd  $|w| = \sqrt[n]{r}$  oraz  $\psi = (\varphi + 2k\pi)/n$ . Zauważmy, że tylko dla  $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$  otrzymujemy różne wartości kąta  $\psi$ . Dalej wartości te cyklicznie się powtarzają. Otrzymujemy zatem  $n$  różnych pierwiastków. Odnotujmy ten wzór jako osobne twierdzenie.

**TWIERDZENIE 2.2** (wzór na pierwiastki  $n$ -tego stopnia)

*Liczba zespolona  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ , różna od zera, ma  $n$  różnych pierwiastków  $n$ -tego stopnia  $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$ , gdzie*

$$w_k = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right).$$

**PRZYKŁAD 2.2** Wyznacz pierwiastki trzeciego stopnia z 8.

**ROZWIĄZANIE:** Przedstawmy 8 w postaci trygonometrycznej:  $8(\cos 0 + i \sin 0)$ . Na mocy powyższego wzoru otrzymujemy

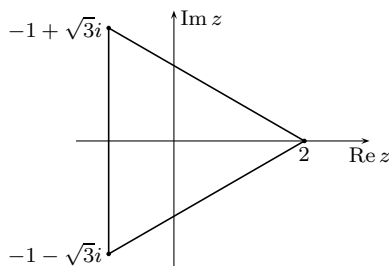
$$w_k = \sqrt[3]{8} \left( \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3} \right) = 2 \left( \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3} \right).$$

Zatem  $w_0 = 2(\cos 0 + i \sin 0) = 2$ ,

$$w_1 = 2 \left( \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 + i\sqrt{3},$$

$$w_2 = 2 \left( \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right) = 2 \left( -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = -1 - i\sqrt{3}.$$

Zauważ, że pierwiastki te tworzą trójkąt równoboczny.



Podobnie, pierwiastki  $n$ -tego stopnia z ustalonej liczby zespolonej tworzą  $n$ -kąąt foremny o środku w punkcie  $z = 0$ . Dla pierwiastków z jedności jednym z wierzchołków jest punkt 1. Na tej podstawie można zaznaczyć na płaszczyźnie pozostałe pierwiastki, obracając promień wodzący skokowo o kąt  $2\pi/n$ .

## Postać wykładnicza\*

Przypomnijmy, że dla liczby rzeczywistej  $x$  zachodzą równości

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Załóżmy, że wzorom tym można nadać *sens* także dla liczb zespolonych. Wówczas proste rachunki pokazują, że

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \dots = \\ &= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \dots = \\ &= \left( 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \dots \right) + i \left( \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) \\ &= \cos x + i \sin x. \end{aligned}$$



Zachodzi zatem równość

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Tak więc liczbę  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  można zapisać w postaci

$$z = re^{i\varphi}.$$

Takie przedstawienie liczby  $z$  nazywamy jej **postacią wykładniczą**.

Zapis ten pozwala w szczególności prościej zapisać pierwiastki  $n$ -tego stopnia z jedności. Ze wzoru na pierwiastki wynika, że  $w_k = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ , a stąd

$$w_0 = 1, \quad w_1 = e^{2i/n}, \quad w_2 = e^{4i/n}, \dots, \quad w_{n-1} = e^{2(n-1)i/n}.$$

## Zadania

6. Znajdź pierwiastki:

a)  $\sqrt[3]{1}$ ; b)  $\sqrt[4]{-1 + i\sqrt{3}}$ ; c)  $\sqrt[3]{8i}$ ; d)  $\sqrt[6]{-1}$ ; e)\*  $\sqrt[4]{(1+i)^8}$ .

7. Korzystając z programu Wolfram Alpha<sup>®</sup> oblicz  $\sqrt[5]{-1}$  za pomocą instrukcji

5th root of - 1.

◇ ◇ ◇

8. Poniższe liczby zapisz w postaci wykładniczej:

a) 2; b) -1; c)  $i$ ; d)  $2 + i\sqrt{12}$ ; e)  $-1 + i\sqrt{3}$ .

9. Jednym z wierzchołków kwadratu jest  $z = 1 + 2i$ , a jego środkiem symetrii  $z = 0$ . Znajdź pozostałe wierzchołki.

10. (z *Algebry Bombellego*, 1572) Oblicz kwadrat liczby  $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-3}}$ .

11. Wskaż równanie, którego pierwiastkami są wierzchołki sześciokąta foremnego:

- a) o środku w punkcie  $z = 0$ , przy czym jednym z wierzchołków jest liczba  $i$ ;  
b) o środku w punkcie  $z = 1$ .

12. Wykaż, że dla  $n \geq 2$  suma wszystkich pierwiastków stopnia  $n$  z jedynki jest równa zeru.

## 2.3 Pierwiastki z jedności a wielokąt foremny\*

*Wielokąt foremny - Konstrukcja pięciokąta foremnego\* - Zadania*

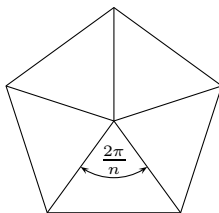
Starożytni Grecy umieli konstruować przy pomocy cyrkla i linijki trójkąt równoboczny, kwadrat, pięciokąt foremny, a w konsekwencji także 6-kąt, 8-kąt, 10-kąt, 12-kąt, a także — kombinując konstrukcje trójkąta równobocznego z pięciokątem — 15-kąt itd. Karol Fryderyk Gauss (1777-1855) — korzystając

z liczb zespolonych — pokazał, jak skonstruować 17-kąt foremny. To odkrycie ostatecznie przesądziło, że 19-letni wówczas Gauss zajął się matematyką, a nie filologią.

## Wielokąty foremne

Przypomnijmy, że **wielokąt foremny**, to wielokąt, w którym wszystkie boki i kąty są równe. Za pomocą cyrkla i linijki łatwo skonstruować trójkąt równoboczny, kwadrat i sześciokąt foremny o zadanym boku.

Gdy  $n$ -kąt foremny podzielimy na  $n$  trójkątów równoramiennych, to otrzymamy trójkąty o kącie wierzchołkowym  $2\pi/n$ . Problem konstrukcji  $n$ -kąta foremnego jest równoważny konstrukcji takiego kąta.



Aby zbudować taki kąt wystarczy znać jego sinus bądź cosinus. Pokażemy, że dla  $n = 5$  cosinus ten (a także sinus) wyraża się za pomocą liczb wymiernych i pierwiastków *kwadratowych*. Gauss pokazał, że jest tak też dla  $n = 17$ , jak również dla innych liczb pierwszych postaci  $n = 2^{2^k} + 1$ .

## Konstrukcja pięciokąta foremnego

W przypadku pięciokąta foremnego rzecz sprowadza się zatem do konstrukcji kąta  $2\pi/5$  (czyli  $72^\circ$ ). Pokazana niżej droga nie jest najprostsza, ale daje wgląd w ogólną metodę konstrukcji wielokątów foremnych.

Rozważmy liczbę  $z = \cos 2\pi/5 + i \sin 2\pi/5$ . Ze wzoru de Moivre'a wiemy, że liczba ta spełnia równanie  $z^5 = 1$ . Zauważmy ponadto, że jest to pierwiastek o minimalnym dodatnim argumentem. Przekształćmy to równanie do postaci  $z^5 - 1 = 0$ , a następnie do postaci

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0.$$

Ponieważ szukane  $z \neq 1$ , więc możemy obie strony równania podzielić przez  $z - 1$ . Otrzymamy  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ . Dzieląc je przez  $z^2$  otrzymamy symetryczną postać

$$z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0.$$

Równoważnie

$$\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0,$$

czyli

$$\left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0.$$

Wprowadźmy zmienną pomocniczą  $u = z + 1/z$ . Otrzymamy wówczas równanie  $u^2 + u - 1 = 0$ , skąd

$$u = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{lub} \quad u = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Ponieważ  $z$  leży w I ćwiartce, więc  $\operatorname{Re}(z + 1/z) > 0$ , zatem  $u = (-1 + \sqrt{5})/2$ . Skoro  $z + 1/z = u$ , to  $z^2 - zu + 1 = 0$ , skąd

$$z = \frac{u \pm \sqrt{u^2 - 4}}{2}.$$

Zauważmy, że  $u^2 - 4 < 0$ , a ponadto  $\operatorname{Im}(z) > 0$ . Zatem

$$z = \frac{u}{2} + i \frac{\sqrt{4 - u^2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{2\sqrt{5} + 10}}{4}i.$$

Stąd  $\cos 2\pi/5 = (-1 + \sqrt{5})/4$ .

Odcinek długości  $\sqrt{5}$  można łatwo skonstruować przy użyciu twierdzenia Pitagorasa. Zatem da się skonstruować także odcinek długości  $\cos 2\pi/5$ . Postępując podobnie Gauss pokazał, jak skonstruować  $\cos 2\pi/17$ .

Do tematu konstruowalności wrócimy jeszcze w ostatnim wykładzie. W szczególności zrozumiemy wówczas, dlaczego za pomocą cyrkla i linijki nie można skonstruować ani siedmiokąta, ani dziewięciokąta foremnego.

## Zadania

13. Pokaż, że problem konstrukcji siedmiokąta foremnego prowadzi do równania zespolonego trzeciego stopnia.

14.\* Pokaż, że problem trysekcji kąta  $60^\circ$  (tzn. podziału tego kąta na trzy równe kąty) sprowadza się do równania trzeciego stopnia.

## Wykład 3

# Wielomiany i Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Wiemy już, że w zbiorze liczb zespolonych wykonalne jest pierwiastkowanie. Oznacza to, że wielomian  $z^n - a = 0$  ma pierwiastek. Zasadnicze Twierdzenie Algebry — w najprostszej postaci — głosi, że podobną własność ma każdy wielomian dodatniego stopnia. W konsekwencji każdy wielomian w zbiorze liczb zespolonych rozkłada się na czynniki liniowe. Dzięki temu świat liczb zespolonych okazuje się prostszy niż świat liczb rzeczywistych.

### 3.1 Wielomiany

*Wielomiany rzeczywiste i wielomiany zespolone - Dzielenie z resztą - Zadania*

Zakładamy, że Czytelnik ma pewne obycie z działaniami na wielomianach. Od strony czysto technicznej przejście od wielomianów rzeczywistych do zespolonych nie stwarza żadnych trudności, gdyż nie będziemy tu wykonywać niemal żadnych rachunków.

#### Wielomiany rzeczywiste i wielomiany zespolone

**Wielomianem rzeczywistym** nazywamy wyrażenie algebraiczne postaci

$$a_n x^n + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

gdzie  $a_i \in \mathbb{R}$ , a zmienna  $x$  przebiega zbiór liczb rzeczywistych.

Analogicznie określamy **wielomian zespolony**  $w(z)$ , gdzie współczynniki  $a_i \in \mathbb{C}$ , a zmienna  $z$  przebiega liczby zespolone. Przykładem jest wielomian  $w(z) = iz^3 + z + 1$ . Często rozważamy też **wielomiany zespolone o współczynnikach rzeczywistych**, gdzie  $a_i \in \mathbb{R}$ , ale zakładamy, że zmienna  $z$  przebiega zbiór liczb zespolonych.

W miarę możliwości zakres zmienności zmiennej wielomianu wskazujemy za pomocą oznaczenia:  $w(x)$  - wielomian rzeczywisty,  $w(z)$  — wielomian zespolony.

W zbiorze wielomianów rzeczywistych wykonalne jest dodawanie, odejmowanie, mnożenie, a także dzielenie z resztą. Te same działania wykonalne są także w zbiorze wielomianów zespolonych.

### Dzielenie z resztą

Przypomnijmy **dzielenie z resztą**. Mówimy, że wielomian  $p(z)$  daje przy dzieleniu przez niezerowy wielomian  $q(z)$  iloraz  $a(z)$  oraz resztę  $r(z)$ , jeżeli

$$p(z) = q(z)a(z) + r(z),$$

przy czym stopień reszty  $r(z)$  jest niższy niż stopień  $q(z)$ . Na przykład  $z^3 + 1$  przy dzieleniu przez  $z^2 + 1$  daje iloraz  $z$  oraz resztę  $-z + 1$ , gdyż

$$z^3 + 1 = (z^2 + 1)z + (-z + 1).$$

Poniższe twierdzenie w Polsce znane jest jako twierdzenie Bezout, co nie ma chyba żadnego uzasadnienia historycznego.

**Twierdzenie 3.1** (o czynniku liniowym wielomianu)

*Liczba  $a$  jest pierwiastkiem wielomianu  $w(z)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $z - a$  dzieli  $w(z)$ .*

**Dowód:** Załóżmy, że  $a$  jest pierwiastkiem  $w(z)$ , czyli  $w(a) = 0$ . Dzieląc  $w(z)$  przez  $z - a$  otrzymamy resztę stopnia mniejszego niż 1, czyli pewną stałą  $r$ . Niech zatem

$$w(z) = (z - a)u(z) + r.$$

Stąd  $w(a) = (a - a)u(a) + r = r$ . Z założenia  $w(a) = 0$ , więc  $r = 0$ , a to oznacza, że  $w(z)$  dzieli się przez  $z - a$ .

Wynikanie w odwrotną stronę jest oczywiste. Jeżeli  $w(z) = (z - a)u(z)$ , to  $w(a) = (a - a)u(a) = 0$ .

## Wielomiany rzeczywiste o współczynnikach wymiernych

Rozwiązywanie równań algebraicznych (tzn. wielomianowych) stopnia wyższego niż 2 jest kłopotliwe, a gdy chodzi o wartości *dokładne* — zazwyczaj niewykonalne. Jednak w przypadku wielomianu rzeczywistego o współczynnikach wymiernych łatwo znaleźć wszystkie jego pierwiastki wymierne. Zauważmy przede wszystkim, że mnożąc przez odpowiednią liczbę całkowitą, wielomian taki zawsze można przekształcić w wielomian o współczynnikach całkowitych.

**TWIERDZENIE 3.2** (o pierwiastkach wymiernych wielomianu)

*Każdy pierwiastek wymierny równania*

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0$$

*o współczynnikach całkowitych wyraża się jako ułamek postaci  $p/q$ , gdzie  $p$  liczba całkowita dzieląca  $a_0$ ,  $q$  — dodatnia liczba naturalna dzieląca  $a_n$ .*

Dowód dla  $a_n = 1$  pozostawiamy jako zadanie. Dowód ogólnego przypadku pominiemy, gdyż wymaga on pewnej — choć dość elementarnej — wiedzy z teorii liczb.

### Zadania

1. Znajdź iloraz i resztę z dzielenia:

- a)  $x^3 + 2x + 1$  przez  $x - 2$ ;    b)  $x^5 + x + 1$  przez  $x^2 + 1$ ;  
 c)  $z^3$  przez  $z + 1$ ;                d)  $z^4 + z^2 + 1$  przez  $z^2 - i$ .

2. Nie wykonując dzielenia znajdź resztę z dzielenia:

- a)  $x^{77} + x^7 + 1$  przez  $x + 1$ ;    b)  $x^{11} + 3x^2 + x + 1$  przez  $x^2 - 1$ .

3. Rozwiąż równania:

- a)  $x^3 = 15x + 4$ ;                      b)  $2x^3 - 5x^2 + 1 = 0$ ;  
 c)  $8x^3 + 4x^2 - 10x + 3 = 0$ ;    d)  $x^4 - 25x^2 + 60x - 36 = 0$ .

4. Uzasadnij, że każdy wymierny pierwiastek równania  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$  o współczynnikach całkowitych jest liczbą całkowitą.



5. Udowodnij twierdzenie 3.2 dla  $a_n = 1$ .

6. Wielomian  $w(x)$  przy dzieleniu przez  $x - 1$  oraz  $x - 2$  daje resztę odpowiednio 1 oraz 3. Jaką resztę daje przy dzieleniu przez  $(x - 1)(x - 2)$ ?

7. Znajdź resztę z dzielenia  $z^{111}$  przez  $z^2 + z + 1$ .

8. (dla osób, które zetknęły się już z pojęciem pochodnej) Mówimy, że  $a$  jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu  $w(x)$ , jeżeli  $(x - a)^2$  dzieli  $w(x)$ . Wykaż, że  $a$  jest pierwiastkiem wielokrotnym wielomianu  $w(x)$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $w(a) = w'(a) = 0$ .

Wsk. Przedstaw  $w(x)$  w postaci  $w(x) = (x - a)^2 q(x) + r(x)$ .

### 3.2 Zasadnicze Twierdzenie Algebry

Każdy trójmian kwadratowy ma dwa pierwiastki zespolone, jeżeli pierwiastek podwójny liczymy jako dwa pierwiastki. Przy podobnej konwencji wielomian trzeciego stopnia ma trzy pierwiastki. Od początków XVIII wieku przypuszczano, że tak jest też dla wielomianów wyższych stopni. Pierwszy ścisły dowód, że tak w istocie jest, pochodzi od Gaussa.

Główna trudność dowodu polega na pokazaniu, że wielomian stopnia  $n \geq 1$  ma przynajmniej jeden pierwiastek. Fakt ten nie jest oczywisty, ale przyjmujemy go bez dowodu. Każdy elementarny dowód tego faktu jest dość techniczny.

Niech  $z_1$  będzie pierwiastkiem  $w(z)$ . Wówczas na mocy twierdzenia 3.1 wielomian  $w(z)$  dzieli się bez reszty przez  $z - z_1$ . Niech zatem

$$w(z) = (z - z_1)w_1(z).$$

Postępując podobnie z wielomianem  $w_1(z)$  itd. otrzymamy

$$w(z) = (z - z_1)(z - z_2)w_2(z) = \dots = (z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n)a_n.$$

Zachodzi zatem poniższe:

**TWIERDZENIE 3.3** (Zasadnicze Twierdzenie Algebry)

*Wielomian zespolony  $w(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  stopnia  $n \geq 1$  da się przedstawić w postaci*

$$w(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n),$$

*gdzie  $z_i$  są jego pierwiastkami.*

W konsekwencji każdy wielomian zespolony stopnia  $n \geq 1$  ma dokładnie  $n$  pierwiastków, o ile pierwiastek krotności  $k$  liczymy jako  $k$  pierwiastków. Ta jednolitość ułatwia budowanie spójnej teorii. Dlatego właśnie analiza przypadków zespolonych często okazuje się prostsza od analizy przypadków rzeczywistych.

W czasach młodości Gaussa liczby zespolone nie były jeszcze w pełni akceptowane, więc formułował on Zasadnicze Twierdzenie Algebry jako twierdzenie o wielomianach rzeczywistych. Oto rzeczywisty — i nadal bardzo użyteczny — wariant twierdzenia:

**TWIERDZENIE 3.4** *Wielomian rzeczywisty stopnia  $n \geq 1$  da się przedstawić w postaci iloczynu czynników rzeczywistych, z których każdy jest czynnikiem liniowym albo nierozkładalnym trójmianem kwadratowym.*

DOWÓD: Z Zasadniczego Twierdzenia Algebry wiemy, że wielomian  $w(x)$  jest iloczynem czynników postaci  $x - z_k$ . Jeżeli  $z_k$  jest liczbą rzeczywistą, to czynnik  $x - z_k$  jest rzeczywistym czynnikiem liniowym w rozkładzie  $w(x)$ . Rozważmy zatem tylko czynniki nierzeczywiste  $x - z_k$ .

Pokażemy, że jeśli liczba  $z_k$  jest pierwiastkiem wielomianu *rzeczywistego*, to także  $\bar{z}_k$  jest jego pierwiastkiem. Dla dowodu przypomnijmy, że sprzężenie sumy i iloczynu jest odpowiednio sumą i iloczynem sprzężeń. Ponadto dla  $z \in \mathbb{R}$  zachodzi równość  $\bar{z} = z$ . Niech zatem  $w(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$  będzie wielomianem o współczynnikach rzeczywistych, a  $z_k$  jego pierwiastkiem. Wówczas

$$\begin{aligned} w(\bar{z}_k) &= a_n (\bar{z}_k)^n + \dots + a_1 (\bar{z}_k) + a_0 = \overline{a_n (z_k)^n} + \dots + \overline{a_1 z_k} + \overline{a_0} = \\ &= \overline{a_n z_k^n + \dots + a_1 z_k + a_0} = \overline{a_n z_k^n + \dots + a_1 z_k + a_0} = \bar{0} = 0. \end{aligned}$$

W świetle powyższej uwagi *nierzeczywiste* pierwiastki wielomianu  $w(x)$  układają się w pary  $z_k, \bar{z}_k$ . Spójrzmy na iloczyn  $(x - z_k)(x - \bar{z}_k)$ :

$$(x - z_k)(x - \bar{z}_k) = x^2 - x(z_k + \bar{z}_k) + z_k \bar{z}_k = x^2 - 2\operatorname{Re}(z_k)x + |z_k|^2.$$

Widzimy zatem, że każda para  $z_k, \bar{z}_k$  wyznacza rzeczywisty trójmian kwadratowy. Oczywiście nierozkładalny, gdyż jego pierwiastkami są liczby nierzeczywiste.

Powyższe twierdzenie jest kluczem do dowodu znanego z analizy faktu, że każda funkcja wymierna właściwa rozkłada się na sumę ułamków prostych.

PRZYKŁAD 3.1 Rozłóż na czynniki liniowe wielomian zespolony  $z^4 + z^2 + 1$ .

ROZWIĄZANIE: Uzupełniając do kwadratu otrzymujemy

$$z^4 + z^2 + 1 = (z^4 + 2z^2 + 1) - z^2 = (z^2 + 1)^2 - z^2 = (z^2 + z + 1)(z^2 - z + 1).$$

Pozostaje znaleźć miejsca zerowe obu czynników. Ze wzoru na pierwiastki równania kwadratowego mamy

$$z_{1,2} = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \quad z_{3,4} = \frac{1 + \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem

$$z^4 + z^2 + 1 = \left(z - \frac{-1 - \sqrt{3}}{2}\right) \left(z - \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}\right) \left(z - \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) \left(z - \frac{1 + \sqrt{3}}{2}\right).$$

W kolejnym przykładzie pokażemy, jak za pomocą liczb zespolonych znaleźć rozkład wyrażeń trudniejszy.



PRZYKŁAD 3.2 Rozłóż na czynniki rzeczywiste wielomian  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ .

ROZWIĄZANIE: Zauważmy, że  $x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ . Tak więc miejscami zerowymi wielomianu  $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$  są pierwiastki piątego stopnia z jedności, z pominięciem  $x = 1$ . Wypiszmy je, łącząc w pary pierwiastki sprzężone:

$$\begin{aligned} x_1 &= \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}, & x_4 &= \cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5}; \\ x_2 &= \cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}, & x_3 &= \cos \frac{6\pi}{5} + i \sin \frac{6\pi}{5} = \cos \frac{4\pi}{5} - i \sin \frac{4\pi}{5}. \end{aligned}$$

Skoro są to pierwiastki z jedności, to moduł każdego z nich jest równy 1. Zatem

$$\begin{aligned} x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 &= [(x - x_1)(x - x_4)][(x - x_2)(x - x_3)] = \\ &= [(x - x_1)(x - \bar{x}_1)][(x - x_2)(x - \bar{x}_2)] = \\ &= (x^2 - 2\operatorname{Re}(x_1)x + |x_1|^2)(x^2 - 2\operatorname{Re}(x_2)x + |x_2|^2) = \\ &= \left(x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{5} + 1\right) \left(x^2 - 2x \cos \frac{4\pi}{5} + 1\right). \end{aligned}$$

Znalezienie takiego rozkładu bez użycia liczb zespolonych wymagałoby wyjątkowej pomysłowości.

## Zadania

9. Rozłóż na czynniki liniowe:

- a)  $z^4 - 1$ ;      b)  $z^4 + 2z^2 + 1$ ;      c)  $z^4 - 8z$ ;  
d)  $z^4 + z^2 + 1$ ;      e)  $z^6 - 1$ ;      f)  $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$ .

10. Rozwiąż równanie  $z^4 - 4z^3 + 8z^2 - 8z + 4 = 0$  na dwa sposoby:

- a) wiedząc, że  $1 + i$  jest jednym z jego pierwiastków;  
b)\* bez dodatkowej wskazówki, za pomocą odpowiedniego podstawienia.

11. Rozłóż na czynniki rzeczywiste wielomian  $x^6 - 1$  na trzy sposoby, zaczynając od rozkładu:

- a)  $x^6 - 1 = (x^3 - 1)(x^3 + 1)$ ;  
b)  $x^6 - 1 = (x^2 - 1)(x^4 + x^2 + 1)$ ;  
c)  $x^6 - 1 = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_6)$ , gdzie  $x_i$  są pierwiastkami 6-tego stopnia z jedności.

◇ ◇ ◇

12. Rozłóż na czynniki rzeczywiste  $x^7 - 1$ .

13. Rozłóż na czynniki liniowe  $z(z + 1)(z + 2)(z + 3) + 1$ .

14. (wzory Viety) Niech  $z_1, z_2, \dots, z_n$  będą pierwiastkami równania

$$a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0.$$

Wyraż za pomocą współczynników  $a_k$ :

- a) sumę  $z_1 + z_2 + \dots + z_n$ ;  
 b) sumę wszystkich podwójnych iloczynów  $z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + \dots + z_{n-1}z_n$ ;  
 c) iloczyn  $z_1z_2 \dots z_n$ .

15.\* Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} z_1 + z_2 + z_3 = 1, \\ z_1z_2 + z_2z_3 + z_3z_1 = 1, \\ z_1z_2z_3 = 1. \end{cases}$$

16.\* Wiedząc, że  $z + 1/z = 2 \cos(\pi/n)$  oblicz  $z^n + \frac{1}{z^n}$ .

### 3.3 Równania algebraiczne trzeciego stopnia\*

*Ogólne równanie trzeciego stopnia - Przykładowe obliczenia - Zadania*

Z Zasadniczego Twierdzenia Algebry wynika, że równanie algebraiczne stopnia  $n$  ma  $n$  pierwiastków zespolonych (z uwzględnieniem krotności). Umiemy rozwiązywać równania kwadratowe oraz proste, ale ważne równanie  $z^n = 1$ . Pokażemy teraz, jak rozwiązywać równania algebraiczne trzeciego stopnia.

Każde równanie trzeciego stopnia można przekształcić do postaci

$$x^3 + px + q = 0.$$

Równaniami takimi zajmowali się matematycy włoscy XVI w., pośród nich Girolamo Cardano, najsilniej z nimi kojarzony.

#### Przykładowe obliczenia

Technikę rozwiązywania równań trzeciego stopnia pokażemy na przykładzie pochodzącym z dzieła Cardana *Ars magna*. Oryginalne wyprowadzenie jest trudniejsze, gdyż większość rozumowań prowadzona jest geometrycznie i bez użycia jakichkolwiek symboli.

Rozwiążmy równanie  $x^3 + 6x = 20$ . Wprowadźmy dwie zmienne pomocnicze  $u, v$  takie, że  $x = u - v$ . Otrzymamy  $(u^3 - 3u^2v + 3uv^2 - v^3) + 6(u - v) = 20$ , po przekształceniu

$$(u^3 - v^3) - 3(2 - uv)(u - v) = 20.$$

Przyjmując dodatkowo  $2 - uv = 0$ , otrzymamy równanie  $u^3 - v^3 = 20$ . Rozwiążmy zatem układ

$$\begin{cases} uv = 2, \\ u^3 - v^3 = 20. \end{cases}$$

Podstawiając  $v = 2/u$  układ ten sprowadzamy do równania

$$u^3 - \left(\frac{2}{u}\right)^2 = 20, \quad \text{czyli} \quad u^6 - 20u^3 - 8 = 0.$$

Kładąc  $t = u^3$  mamy  $t^2 - 20t - 8 = 0$ , skąd

$$t = \frac{20 \pm \sqrt{432}}{2} = 10 \pm \sqrt{108}.$$

Zatem

$$u = \sqrt[3]{10 \pm \sqrt{108}}, \quad v = \frac{2}{\sqrt[3]{10 \pm \sqrt{108}}} = \sqrt[3]{\frac{8}{10 \pm \sqrt{108}}} = -\sqrt[3]{10 \mp \sqrt{108}}.$$

Stąd ostatecznie

$$x = u - v = \sqrt[3]{10 \pm \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 \mp \sqrt{108}}.$$

Niełatwo zauważyć, że suma tych dwu składników jest równa 2. Można wykazać, że jest to jedyny rzeczywisty pierwiastek tego równania.

## Wzory Cardana

Rozumując podobnie można pokazać, że pierwiastki równania  $x^3 + px + q = 0$  wyrażają się wzorem

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Ponieważ pierwiastek sześcienny oznacza trzy różne liczby, pierwiastek kwadratowy dwie, więc może się wydawać, że wzór ten daje  $3 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 = 36$  pierwiastków — w istocie daje on trzy liczby (niekoniecznie różne).

W podobny sposób rozwiązuje się także równania algebraiczne czwartego stopnia, co pokazał Lodovico Ferrari (ok.1540-45). Przez dalsze 250 lat matematycy na próżno szukali analogicznych wzorów dla równań piątego stopnia. W ostatnim wykładzie spróbujemy wyjaśnić, dlaczego ich usiłowania były daremne.

## Zadania

17. Pokaż, że podstawiając  $x = z - a/3$  w równaniu  $z^3 + az^2 + bz + c = 0$  przekształcamy je do postaci  $x^3 + px + q = 0$ .

18. Rozwiąż równanie  $x^3 + 3x - 4 = 0$ :

a) korzystając ze wzorów Cardana; b) nie korzystając z nich.

19.\* Wykaż, że równanie  $x^3 + px + q = 0$  ma pierwiastek wielokrotny wtedy i tylko wtedy, gdy  $4p^3 + 27q^2 = 0$ .