Zadania z Kombinatorycznej Teorii Grup
Lista 3. Prezentacje grup.

Prezentacje

1. Uzasadnij, że "tabelka działań" dla skończonej grupy G dostarcza skończonej prezentacji tej grupy, w następujący sposób. Za zbiór generatorów obieramy cała grupę G. Jako zbiór relacji bierzemy wszystkie równości postaci $gh = k$, po wszystkich trójkach g, h, k elementów z G takich, że równość $gh = k$ faktycznie zachodzi w G.
2. (a) Uzasadnij, że $\langle a, b \,|\, [a, b] \rangle$ jest prezentacją grupy Z^2.
   (b) Ogólniej, niech $G_1 = \langle S_1 \,|\, R_1 \rangle$ i $G_2 = \langle S_2 \,|\, R_2 \rangle$. Uzasadnij, że produkt $G_1 \times G_2$ ma prezentację $\langle S_1 \sqcup S_2 \,|\, R_1 \cup R_2 \cup \{[s_1, s_2] : s_1 \in S_1, s_2 \in S_2\} \rangle$
   (c) Znajdź podobną prezentację jak w punkcie (b) dla produktu półprostego grup G_1 i G_2 zadanego przez homomorfizm $\alpha : G_1 \to \mathrm{Aut}(G_2)$.
3. Wykaż, że prezentacja $\langle S \,|\, \{w^2 : w \text{ jest dowolnym słowem nad } S \cup S^{-1}\} \rangle$ opisuje sumę prostą $|S|$ kopii grupy Z_2, czyli grupę funkcji $S \to Z_2$ o nośniku skończonym z punktowym działaniem mnożenia indukowanym z Z_2.
4. Pokaż, że prezentacja $\langle a, b \,|\, a^{-1}ba = b^2, b^{-1}ab = a^2 \rangle$ opisuje grupę trywialną.

Zastosowania lematu o uniwersalnej własności grupy zadanej prezentacją

5. Rozważmy grupę $G = \langle a, b, c, d \,|\, a^2, b^2, c^2, d^2, [a, b], [b, c], [c, d], [d, a] \rangle$. Udowodnij, że ac jest elementem nieskończonego rzędu w G, zaś ab ma rząd 2.
6. Uzasadnij, że grupa $\langle a, b \,|\, a^2b^2, (ab)^3 \rangle$ jest nieabelowa. Wskazówka: znajdź homomorfizm tej grupy na grupę symetrii trójkąta równobocznego (równoważnie, grupę permutacji $Sym(3)$).
7. Rozważmy grupę $G = \langle a, t \,|\, t^{-1}at = a^2 \rangle$, zwaną grupą Baumslaga-Solitara.
   (a) Uzasadnij, że elementy a, t mają w tej grupie nieskończony rząd i nie komutują.
   (b) Uzasadnij, że funkcja określona przez $\psi(t) = t, \psi(a) = a^{-2}$ rozszerza się do homomorfizmu $\psi : G \to G$.
   (c) Uzasadnij, że homomorfizm ψ z punktu (b) jest automorfizmem grupy G. Wskazówka: ustal jaką postać musiałby mieć $\psi^{-1}(a)$.
8. Zliczając homomorfizmy $G \to Z_2$ wyznacz rangi grup G zadanych następującymi prezentacjami:
   (a) $G = \langle a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g \,|\, [a_1, b_1] \cdot [a_2, b_2] \cdot \ldots \cdot [a_g, b_g] \rangle, \quad g \geq 1;$
   (b) $\langle a_1, \ldots, a_k \,|\, a_1^2 \cdot a_2^2 \cdot \ldots \cdot a_k^2 \rangle, \quad k \geq 1.$
   (Powyższe grupy z jedną relacją to tzw. *grupy podstawowe* zamkniętych powierzchni (a) orientowalnych i (b) nieorientowalnych; są one też krótko nazywane *grupami powierzchni.*)
9. Dana jest grupa G posiadająca skończoną prezentację, w której jest więcej generatorów niż relacji. Uzasadnij, że G posiada iloraz izomorficzny z nieskończoną grupą cykliczną. Podaj przykład nieskończonej grupy skończenie generowalnej nie posiadającej takiego ilorazu.
10. Uzasadnij, że grupa $G = \langle b, t \,|\, t^{-1}b^2t = b^3 \rangle$ nie jest grupą hopfowską (tzn. posiada surjektywny homomorfizm $\theta : G \to G$ o nietrywialnym jądrze). W tym celu uzasadnij, że
   (a) przyporządkowania $\theta(t) = t$ i $\theta(b) = b^2$ wyznaczają homomorfizm $G \to G$;

(b) homomorfizm ten jest surjektywny;

(c) komutator $[t^{-1}bt, b]$ jest nietrywialnym elementem w G, zaś jego obraz przez θ jest trywialny.

Transformacje Tietzego

11. Zastosuj starannie transformacje Tietzego do przekształcenia prezentacji $\langle a, b, c \,|\, c^{-1}ac = b, c^{-1}bc = a, c^2 = 1\rangle$ w prezentację $\langle a, c \,|\, c^2 = 1\rangle$.
12. Wykaż, że $G = \langle a, b \,|\, ababa = 1\rangle$ jest nieskończoną grupą cykliczną.
13. Niech $G = \langle s_1, \ldots, s_m \,|\, r_1, \ldots, r_n\rangle$ będzie skończenie prezentowalną grupą.
    (a) Niech $\langle s_1, \ldots, s_m \,|\, \rho_1, \ldots\rangle$ będzie inną prezentacją grupy G, względem tego samego układu generatorów, z nieskończoną liczbą relacji. Uzasadnij, że wówczas $\langle s_1, \ldots, s_m \,|\, \rho_1, \ldots, \rho_N\rangle$ jest skończoną prezentacją grupy G dla odpowiednio dużego N.
    (b) Niech $\langle t_1, \ldots, t_k \,|\, p_1, \ldots\rangle$ będzie inną prezentacją grupy G, z nieskończoną liczbą relacji. Pokaż, że istnieje N takie, że $\langle t_1, \ldots, t_k \,|\, p_1, \ldots, p_N\rangle$ jest skończoną prezentacją tej grupy. Wskazówka: użyj transformacji Tietzego oraz punktu (a).

Ilorazy grup zadanych za pomocą prezentacji

14. Ustal jakie grupy powstają w wyniku abelianizacji grup dyhedralnych, grupy Baumslaga-Solitara z zadania 7, oraz grup powierzchni z zadania 8.