

## Ćwiczenia - Kombinatoryczna Teoria Grup

### Lista 5+. HNN-rozszerzenia.

1. Pokaż, że gdy  $A = B = G$  to dla dowolnego izomorfizmu  $\varphi : A \rightarrow B$  HNN-rozszerzenie  $G*_\varphi$  jest tożsame z produktem półprostym grupy  $G$  oraz nieskończonej cyklicznej grupy  $Z$ . WSKAZÓWKA: znajdź postacie normalne dla elementów takiego HNN-rozszerzenia, oraz wyprowadź reguły mnożenia elementów przedstawionych w tej formie.
2. Sprawdź, że grupa  $G$  utożsamiona kanonicznie z podgrupą w swoim HNN-rozszerzeniu  $G*_\varphi$  na ogół nie jest podgrupą normalną. Znajdź warunek konieczny i dostateczny na podgrupy  $A, B$  przy którym  $G$  jest normalna w  $G*_\varphi$ .
3. Wprowadź odpowiednie pojęcie cyklicznie  $t$ -zredukowanych słów dla HNN-rozszerzenia. Pokaż, że dowolny element jest sprzężony z elementem reprezentowanym przez takie cyklicznie  $t$ -zredukowane słowo.
4. Uzasadnij, że w dowolnym HNN-rozszerzeniu  $G*_\varphi$  dowolny element skończonego rzędu jest sprzężony z pewnym elementem z  $G$ .
5. (0) Pokaż, że grupa powierzchni

$$\Sigma_g = \langle a_1, b_1, \dots, a_g, b_g \mid a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \dots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} \rangle$$

jest w naturalny sposób HNN-rozszerzeniem grupy wolnej

$$F = \langle b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g \mid \emptyset \rangle.$$

- (1) Zweryfikuj, że element  $a_1 a_2 a_1^{-1} a_2^{-1} \in \Sigma_2$  jest nietrywialny, i że jest on różny od elementu  $b_1 b_2 b_1^{-1} b_2^{-1}$ .
- (2) Opisz algorytm, który rozwiązuje problem słów dla grupy powierzchni  $\Sigma_g$ , odwołując się do powyższego przedstawienia tej grupy jako HNN-rozszerzenia.
6. Rozwiąż zadanie 10(c) z Listy 3 wykorzystując  $p$ -zredukowane formy w HNN-rozszerzeniach.
7. Dla danego HNN-rozszerzenia

$$G*_\varphi = \langle S, t \mid R, t^{-1} a t = \varphi(a) : a \in A \rangle,$$

rozważmy podgrupę  $L < G*_\varphi$  generowaną przez sumę podgrup  $G \cup t G t^{-1}$ . Uzasadnij, że  $L$  jest w naturalny sposób izomorficzna z produktem wolnym z amalgamacją

$$G *_A t G t^{-1}.$$