

PRODUKT WOLNY RODZINY GRUP G_α .

OPIS

- W - zbiór „zredukowanych” słów nad $\bigcup_2 G_\alpha$

$$g_1 \dots g_m : g_i \in G_{\alpha_i} \setminus \{1\}$$

$$\alpha_{i+1} \neq \alpha_i \text{ dla } i=1, \dots, m-1$$

$$m \geq 0 \text{ dowolnie}$$

($m=0$ oznacza słowo puste 1)

- operacje mnożenia polegające na zestawieniu i zredukowaniu:

zestawienie

$$(g_1 \dots g_m)(h_1 \dots h_n) = g_1 \dots g_m h_1 \dots h_n$$

redukcja: • jeśli $g_m h_1 \in G_{\alpha_m}$ to zastępujemy $g_m h_1$ przez jeden symbol $(g_m h_1) \in G_{\alpha_m}$

- jeśli produkt $g_m h_1 = 1$ w G_{α_m} , to wykreślamy oba symbole $g_m h_1$

- powtarzamy powyższe aż do skutku

(jednocześnie procedury nie stykają się z innymi słowami).

- W z operacją mnożenia: ma element neutralny; elementy odwracalne
- Aby mieć grupę - trzeba zdefiniować odwrotność
- Tożsamość operacji mnożenia sprawdzamy zadając

w grupie permutacji elementów z W :

* dla $g \in G_\alpha$ określamy odwzorowanie $L_g: W \rightarrow W$ zadane domnożeniem z lewej: $L_g(g_1 \dots g_n) = g g_1 \dots g_n$.

* dla $g, g' \in G_\alpha$ mamy $L_{gg'} = L_g L_{g'}$

Też to sprawdzisz na dwóch przypadkach 1° $\alpha = \alpha_1$, 2° $\alpha \neq \alpha_1$

(w przypadku 1° sprowadzi się do Tożsamości w G_α)

* z powyższej formuły wynika że $L_g L_{g^{-1}} = L_{g^{-1}} L_g = L_1 = \text{id}_W$

lub $L_{g^{-1}} = (L_g)^{-1}$ i wszystkie te operacje są permutacjami W .

ponadto $g \mapsto L_g$ to izjedytany homomorfizm z G_d 2
w grupe $\text{Sym}(W)$ permutacji W .

* Określony $L: W \rightarrow \text{Sym}(W)$ przez

$$L(g_1, \dots, g_m) = L_{g_1} \dots L_{g_m}$$

Z własności $L_{gg'} = L_g L_{g'}$ dla $g, g' \in G_d$ wynika iż

$$L w_1 \quad L w_2 = L_{w_1 w_2} \quad \text{dla } w_1, w_2 \in W$$

* L jest izjedytny, do

permutacji $L(g_1, \dots, g_n)$ przyporządkowa $\lambda \in W$ na $g_1, \dots, g_n \in W$

Stąd W

transfere z obrazem przez L
w $\text{Sym}(W)$. \square

OZN. $* G_d$.

UWAGA. ③ "Zredukowane" słowa z W reprezentacje danych z $*G_\alpha$ na zynany postacią normalną dla elementów z $*G_\alpha$.

① $\forall \alpha G_{\alpha_0} = \{g : g \in G_{\alpha_0}\} \subset *G_\alpha = W$

grupy G_α konownie zmnaje sie w produkt wolny

② $\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow G_{\alpha_1} \cap G_{\alpha_2} = \{1\} \subset *G_\alpha$

③ $*G_\alpha$ jest generowana przez $\bigcup_\alpha G_\alpha$

④ Dla dowolnej rodziny homomorfizmów $h_\alpha : G_\alpha \rightarrow H$

$\exists!$ $h : *G_\alpha \rightarrow H$ rozszerzający wszystkie h_α

Dowód ④: Jeśli h istnieje, to dla dowolnego

"zredukowanego" słowa $g_1 \dots g_n \in W$ repr. element z $*G_\alpha$, gdzie $g_i \in G_{\alpha_i}$, musi być określony przez

$$h(g_1 \dots g_n) = h_{\alpha_1}(g_1) \cdot \dots \cdot h_{\alpha_n}(g_n).$$

Ze tej definicji $h : *G_\alpha \rightarrow H$ jest homomorfizmem wynika z reguły mnożenia słów z W

PATRZ SOBNA KARTKA

3

Rozmiar

$$u = g_1 \dots g_n \in W, \quad v = g'_1 \dots g'_m \in W, \quad g_i \in G_{\alpha_i}, \quad g'_j \in G_{\alpha'_j}$$

• Jeśli $\alpha_n \neq \alpha'_1$ to $h(\prod_{i=1}^n g_i) \cdot h(\prod_{j=1}^m g'_j) = h(\prod_{i=1}^n g_i \prod_{j=1}^m g'_j)$ $[h(u) \cdot h(v) = h(u \cdot v)]$

• Jeśli $g_n \in G_{\alpha_n} \ni g'_1$ i $g_n g'_1 \neq 1$ to

$$\begin{aligned} h(\prod_{i=1}^n g_i) \cdot h(\prod_{j=1}^m g'_j) &= \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(g_i) \cdot \prod_{j=1}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) = \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) h_{\alpha_n}(g_n) h_{\alpha_n}(g'_1) \prod_{j=2}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) = \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) h_{\alpha_n}(g_n g'_1) \prod_{j=2}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) = h\left[\left(\prod_{i=1}^{n-1} g_i\right) \left(\prod_{j=1}^m g'_j\right)\right]. \quad \square \end{aligned}$$

• Jeśli $g_n \in G_{\alpha_n} \ni g'_1$ i $g_n g'_1 = 1$ to równości jaw. daje

$$h(\prod_{i=1}^n g_i) \cdot h(\prod_{j=1}^m g'_j) = \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) \cdot \prod_{j=2}^m h_{\alpha'_j}(g'_j)$$

co ostetene tej daje $h(u) \cdot h(v) = h(u \cdot v)$

□

- $$h(u) \cdot h(v) = h\left(\prod_{i=1}^n g_i\right) \cdot h\left(\prod_{j=1}^m g'_j\right) =$$

$$= \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(g_i) \cdot \prod_{j=1}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) = h\left(\prod_{i=1}^n g_i \prod_{j=1}^m g'_j\right) = h(u \cdot v)$$

- $$h(u) \cdot h(v) = \prod_{i=1}^n h_{\alpha_i}(g_i) \prod_{j=1}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) \right] h_{\alpha_n}(g_n) h_{\alpha'_1}(g'_1) \left[\prod_{j=2}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) \right] =$$

$$= \left[\prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) \right] \cdot h_{\alpha_n}(g_n g'_1) \cdot \left[\prod_{j=2}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) \right] =$$

$$= \dots =$$

$$= h(u \cdot v)$$

bo (p= redukci)

$$u \cdot v = g_1 \dots g_{n-1} (g_n g'_1) g'_2 \dots g'_m$$

- $$h(u) \cdot h(v) = \prod_{i=1}^{n-1} h_{\alpha_i}(g_i) \cdot \prod_{j=2}^m h_{\alpha'_j}(g'_j) = h(u \cdot v)$$

PRODUKT WOLNY Z AMALGAMACJA

D

Uogodnienie produktu wolnego $G_1 * G_2$

(w ktorej $G_1 \cup G_2 / \sim_{G_1} = \sim_{G_2}$ "generuje w sobie wolny" grupy)

na przykladach gdy

$A \leq G_1$, $B \leq G_2$ podgrupy, $\varphi: A \rightarrow B$ izomorfizm

i postulujemy by zbiorem $G_1 \cup_{\varphi} G_2 = G_1 \cup G_2 / \sim_{\varphi(A)}$

"generat w sobie wolny" grupy $G_1 *_{A \cong B} G_2$.

PRODUKT WOLNY Z AMALGAMA A_2 :

1

Definicja (uniwersalna):

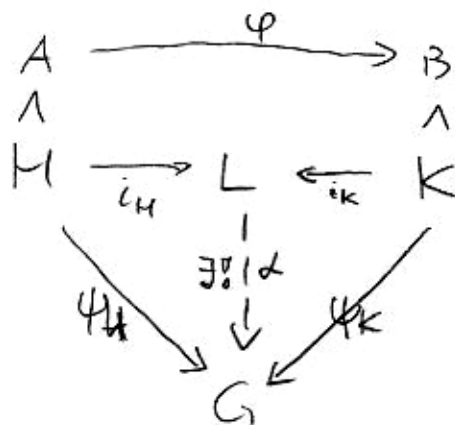
Dane są $A < H, B < K, \varphi: A \rightarrow B$ izomorfizm.

Produkt wolny z amalgamacją grup H, K względem φ nazywamy

grupę L wraz z homomorfizmami $i_H: H \rightarrow L, i_K: K \rightarrow L$ zgodnymi na A, B (czyli t.j.c $i_K \varphi = i_H |_A$), także t.j.c

$\forall G \quad \forall \psi_H: H \rightarrow G, \psi_K: K \rightarrow G$ zgodnych na A, B (czyli t.j.c $\psi_K \varphi = \psi_H |_A$)

$\exists! \alpha: L \rightarrow G$ zgodny z ψ_H i ψ_K (czyli t.j.c $\alpha i_H = \psi_H, \alpha i_K = \psi_K$).



UWAGA: W danyście, choć nie w definicji:

- i_H, i_K są wchłonne, utożsamiają H, K z podgrupami $i_H(H), i_K(K)$ w L
- podgrupy A i B utożsamienia się w L zgodnie z φ [$i_K \varphi = i_H |_A$]
- przekrój H, K jako podgrup w L jest dokładnie równy w swojej podgrupie odpowiadającej $A \stackrel{\varphi}{\cong} B$ $\Rightarrow i_K(B) = i_H(A)$

$$[i_H(H) \cap i_K(K) = i_H(A) = i_K(B)].$$

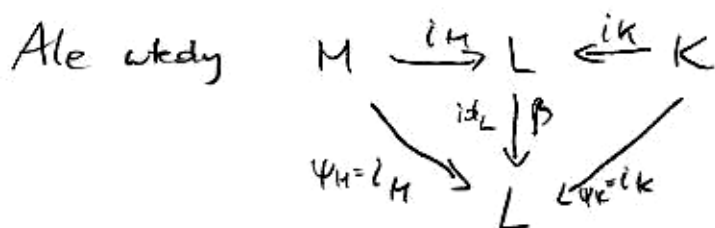
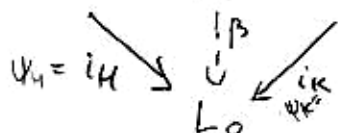
JEDYNOŚĆ (\Rightarrow dektudością do izomorfizmu
respektującego (i_H, i_K))

2

FAKT 1. Każde grupa L spełniająca warunki Definicji jest generowana przez $i_H(M) \cup i_K(K)$.

Dowód: Jeśli nie, to nied $L_0 \subsetneq L$, $L_0 = \langle i_H(M) \cup i_K(K) \rangle$.

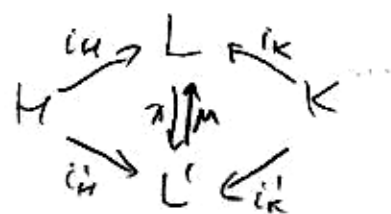
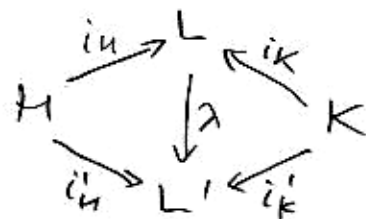
Wówczas $M \xrightarrow{i_H} L \xleftarrow{i_K} K$ indukuje homomorfizm $\beta: L \rightarrow L_0 \subset L$
niepełnym podgrupy.



mamy dwa różne
homomorfizmy, wbrew
założeniu jedności. \square

FAKT 2. Jeśli (L, i_H, i_K) oraz (L', i'_H, i'_K) dwie grupy
spełniające warunki Definicji, to istnieje izomorfizm $\lambda: L \rightarrow L'$
respektujący homomorfizmy i_H, i_K, i'_H, i'_K , tzn. taki że
 $\lambda i'_K = i_K$, $\lambda i'_H = i_H$.

Dowód: Homomorfizm λ istnieje
z Definicji, podobnie jak homomorfizm
 $\mu: L' \rightarrow L$.



Złożenie $\mu\lambda: L \rightarrow L$ jest identyfikacją,
bo jest tożsamością na generatach
 $\supseteq i_H(M) \cup i_K(K)$:

- dla $h \in M$ mamy
 $\mu\lambda(i_H(h)) = \mu i'_H(h) = i_H(h)$
- podobnie dla $k \in K$.

Analogicznie, złożenie $\lambda\mu = id_{L'}$. Stąd zarówno λ jak μ są izomorfizmami. \square

ISTNIENIE (za pomocą prezentacji).

3

Niech $H = \langle S \mid D \rangle$, $K = \langle T \mid E \rangle$

i niech podgrupa A będzie generowana przez zbiór Q generatorów.

LEMAT. Niech $L = \langle S \cup T \mid D \cup E \cup \{a = \varphi(a) : a \in Q\} \rangle$

gdzie elementy $a \in Q$ są wyrażone w $S \cup S^{-1}$, zaś $\varphi(a) \in T \cup T^{-1}$.

Niech $i_H: H \rightarrow L$ zadany przez id_S , zaś $i_K: K \rightarrow L$ przez id_T .

Wówczas (L, i_H, i_K) spełniają ^{właści} definicję produktu ^{właści} z amalgamacją.

Dowód: • Spełniony jest warunek zgodności $i_K \varphi = i_H |_A$, bo

dla $a \in Q$ mamy $i_H(a) = i_K(\varphi(a))$
 $\begin{matrix} \parallel \\ a \\ \cap \\ L \end{matrix} \xrightarrow{\text{relacja}} \begin{matrix} \parallel \\ \varphi(a) \\ \cap \\ L \end{matrix}$ czyli $i_H(a) = i_K(\varphi(a))$,

wskazując, że $i_K \varphi = i_H$ obowiązuje na grupie generowanej przez Q

czyli $i_K \varphi = i_H |_A$.

• Rozważmy homomorfizm $\psi_H: H \rightarrow G$, $\psi_K: K \rightarrow G$ t.j.e. $\psi_K \varphi = \psi_H |_A$
Ważni $\alpha |_H = \psi_H$, $\alpha |_K = \psi_K$ wyznaczają dokładnie α na generatach przez

$\alpha(s) = \psi_H(s)$ dla $s \in S$ (stąd jednoznaczność α)
 $\alpha(t) = \psi_K(t)$ dla $t \in T$.

Relacje z D są spełnione przez obrazy $\alpha(s)$ bo ψ_H homomorfizm

—||— E —||— $\alpha(t)$ bo ψ_K —||—

Relacje $a = \varphi(a)$; $a \in Q$ są spełnione w G przez obrazy, bo

$\psi_H(a) = \psi_K(\varphi(a))$ z zał.
o ψ_H i ψ_K .

Zatem α wynika się ^{jednoznacznie} do $\alpha: L \rightarrow G$,

który z definicji spełnia wymagane założenia $\alpha |_H = \psi_H$, $\alpha |_K = \psi_K$. \square

OZNACZENIE: $H \underset{A=B}{*} K$ (uwaga: wznik zależy od φ na wyśót!).

Przyjmijmy $A=B=\{1\}$, $\varphi = \text{id}_{\{1\}}$,

przejdźmy do opisanego wcześniej produktu wolnego $H * K$.

(bo polonij jest dobrane $\psi_H: H \rightarrow G$, $\psi_K: K \rightarrow G$
 rozszerzenie się jednorodne do $\psi: H * K \rightarrow G$)

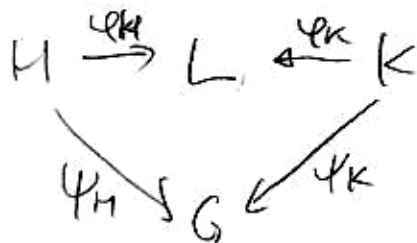
UWAGI:

1. $H * K$ nie charakteryzuje uniwersalności

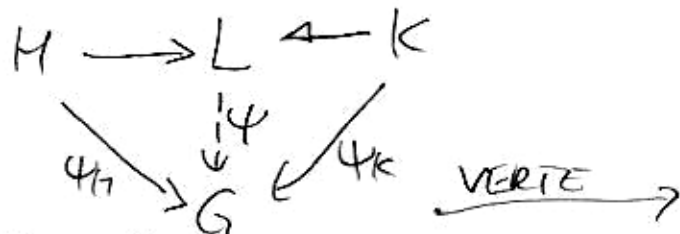
jesto jedyną grupę L dopełniającą $\psi_H: H \rightarrow L$, $\psi_K: K \rightarrow L$

i toka, że

dotyczy drugą konstrukcją



dotyczy się jednorodne do



2. To że $H \hookrightarrow H * K$, $K \hookrightarrow H * K$, $H \cap K = \{1\}$

nie wyprowadzić Twierdzenia bezpośrednio z
 (charakteryzacji) uniwersalności

ponieważ definicji
 jest, ale wynika to z tej charakterystyki
 $H * K$.

3. Analogiczne własności dla $\frac{\text{ogólnego}}{A=\varphi} H * K$ są trudniejsze
 do otrzymania.

4. [2015] Jeśli $H_\alpha = \langle S_\alpha | R_\alpha \rangle$ to

$$*_\alpha H_\alpha = \langle \underset{\alpha}{\dot{\cup}} S_\alpha \mid \underset{\alpha}{\dot{\cup}} R_\alpha \rangle,$$

Identyfikując potonuje się następującym dowodem, że jest unikalnym
produktem całego dowolnej rodziny grup $\{H_\alpha\}_\alpha$

jest to jedyna grupa L dopuszczająca homomorfizm $\varphi_\alpha: H_\alpha \rightarrow L$

taka, że dla dowolnej grupy G i dowolnej rodziny

homomorfizmów $\psi_\alpha: H_\alpha \rightarrow G$

istnieje jedyny homomorfizm $\psi: L \rightarrow G$

$$\text{Lubi się } \forall \alpha \quad \begin{array}{ccc} H_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & L \\ & \searrow \psi_\alpha & \downarrow \psi \\ & & G \end{array}$$