METODY GEOMETRYCZNE W KOMBINATORYCZNEJ TEORII GRUP.

3

I. GRAFY I ICH GRUPY KRAWĘDZIOWE (≡ PODSTAWOWE).

Def. **Graf** X to zbiór wierzchołków V_X i łączących je krawędzi (dopuszczamy pętle  i krawędzie wielokrotne ).

E_X - zbiór zorientowanych krawędzi w X (po dwie na każdą krawędź geometryczną: e, e^{-1} $((e^{-1})^{-1} = e)$)

$\forall e \in E_X$ $i(e)$ - wierzchołek początkowy (initial)

$t(e)$ - wierzchołek końcowy (terminal)

[dla pętli zachodzi $i(e) = t(e)$; ogólnie zachodzi $i(e^{-1}) = t(e)$, $t(e^{-1}) = i(e)$].

Def. **Droga** w X to słowo $p = e_1 \dots e_n$ $(n \geq 1)$ nad E_X takie że $t(e_i) = i(e_{i+1})$ dla $i = 1, \dots, n-1$, lub symbol $1_v : v \in V$.

Początek drogi $i(p) := i(e_1)$, koniec $t(p) = t(e_n)$, $i(1_v) = t(1_v) = v$.

Pętla w X to droga p: $i(p) = t(p)$;

zaczepiona w $v \in V$ jeśli $i(p) = t(p) = v$.

1_v to droga pusta zaczepiona w v; jest pętlą zaczepioną w v

Długość drogi: $|p| = |e_1 \dots e_n| = n$, $|1_v| = 0$.

Droga odwrotna: $p^{-1} = (e_1 \dots e_n)^{-1} = e_n^{-1} e_{n-1}^{-1} \dots e_1^{-1}$; $1_v^{-1} = 1_v$.

Droga jest **zredukowana** jeśli nie zawiera żadnego podsłowa postaci ee^{-1}.

Def. Graf jest **spójny** jeśli każde 2 wierzchołki można połączyć drogą.

Def. **Drzewo** to spójny graf nie zawierający zredukowanych pętli długości > 0 (czyli innych od 1_v).

FAKT. W drzewie T każdą parę wierzchołków łączy dokładnie jedna (!) zredukowana droga [$\forall v_1, v_2 \in V_T \ \exists! p : i(p) = v_1, t(p) = v_2$]

Def. Drzewo maksymalne w grafie X to dowolny maksymalny podgraf T będący drzewem.

- ponieważ wstępująca suma poddrzew jest poddrzewem, Lemat Kuratowskiego-Zorna $\Rightarrow$ w każdym X jest drzewo maksymalne
- jeśli X spójny, to dowolne drzewo maksymalne w X zawiera wszystkie wierzchołki X
  (gdyby nie zawierało któregoś $v \in V_X$, to łącząc v z T drogą minimalnej długości, dodając do T jej krawędzie, otrzymując większe poddrzewo – SPRZECZNOŚĆ).

Fakt. Dla skończonego spójnego grafu X liczba krawędzi poza dowolnym drzewem maksymalnym w X jest stała, i wynosi $\alpha_1 - \alpha_0 + 1$, gdzie $\alpha_0 = |V_X|$, $\alpha_1 = |E_X|/2$ – liczba geometrycznych krawędzi.

Dowód: Dla skończonego drzewa T mamy zawsze $|V_T| = |E_T|/2 + 1$. [ćw]

Niech r – liczba krawędzi w X poza T.

Wówczas
$$r = |E_X|/2 - |E_T|/2 = |E_X|/2 - \underset{\overset{\shortparallel}{|V_X|}}{|V_T|} + 1 =$$
$$= |E_X|/2 - |V_X| + 1 = \alpha_1 - \alpha_0 + 1. \quad \square$$

UWAGI. (1) Liczbę $r(X) = \alpha_1 - \alpha_0 + 1$ nazywamy rzędem spójności skończonego spójnego grafu X. Jest ona równa maksymalnej liczbie krawędzi które można naraz usunąć z X bez rozspójnienia X.

(2) Dla dowolnego skończonego drzewa T, $r(T) = 0$.

1-RÓWNOWAŻNOŚĆ lub KOMBINATORYCZNA HOMOTOPIJNOŚĆ w X.

Def. $p_1 \overset{1}{\sim} p_2$ jeśli p_2 powstaje z p_1 w wyniku skończonego ciągu operacji wstawiania lub usuwania podsłów postaci ee^{-1}.

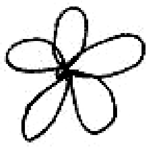
OZN: Klasę drogi p oznaczamy $[p]$.

WŁASNOŚCI: (1) $\overset{1}{\sim}$ jest relacją równoważności.

(2) Jeśli $p_1 \overset{1}{\sim} p_2$ to $i(p_1)=i(p_2)$, $t(p_1)=t(p_2)$. Zatem możemy mówić o wierzchołkach początkowych i końcowych klasy: $i([p]) = i(p)$, $t([p])=t(p)$.

(3) W każdej klasie abstrakcji relacji $\overset{1}{\sim}$ znajduje się dokładnie jedna droga zredukowana.

[dowód identyczny jak dla słów w grupie wolnej]

PRZYKŁAD. Dla $X \cong$ 

i dla zbioru S zawierającego po jednej zorientowanej krawędzi z każdej pary e, e^{-1} drogi w X to słowa nad $S \cup S^{-1}$

zaś $\overset{1}{\sim}$ jest równoważnością słów w grupie wolnej F_S.

SKŁADANIE DRÓG I ICH KLAS

- Jeśli $p = e_1 \cdots e_n$, $q = \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$, $t(p) = i(q)$ to określamy
  $pq := e_1 \cdots e_n \varepsilon_1 \cdots \varepsilon_n$.
- Zachodzi łączność: $(pq)r = p(qr)$
  (o ile przynajmniej jedna ze stron równości ma sens [wtedy druga też ma]).
- Zachodzi też: $1_v p = p$ gdy $i(p)=v$, $p 1_v = p$ gdy $t(p)=v$,
  $(pq)^{-1} = q^{-1} p^{-1}$.
- Relacja $\overset{1}{\sim}$ na $\Pi(X)$ – zbiorze wszystkich dróg w X – jest kongruencją względem składania dróg, tzn.
  $p_1 \overset{1}{\sim} p_2,\ q_1 \overset{1}{\sim} q_2 \Rightarrow p_1 q_1 \overset{1}{\sim} p_2 q_2$ oraz $p_1^{-1} \overset{1}{\sim} p_2^{-1}$
  Stąd składanie ma sens dla klas $x, y \in \Pi(X)/\overset{1}{\sim}$ jeśli $t(x) = i(y)$.

- Mamy własność

$$pp^{-1} \simeq 1_v \quad \text{dla } v = i(p)$$

Stąd każdy element $x \in \Pi(X)/\simeq$ ma element odwrotny.

Klasy $[1_v]$ są lewostronnie neutralne dla takich $[p]$ że $i(p) = v$ i prawostronnie neutralne dla takich $[p]$ że $t([p]) = v$.

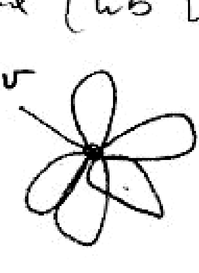
Taką strukturę nazywa się <u>grupoidem</u> nad V_X.

- Dla $v \in V_X$, niech $\Pi(X,v)$ oznacza zbiór pętli ~~zbu~~ w X zaczepionych w v.
- Relacja $\overset{1}{\sim}$ respektuje $\Pi(X,v)$, tzn. jeśli $p \in \Pi(X,v)$ i $p \overset{1}{\sim} q$ to $q \in \Pi(X,v)$.
- $\forall v \in V_X$ $\pi(X,v) := \Pi(X,v)/\overset{1}{\sim}$ jest grupą względem składania
- Jeśli v_1, v_2 są w X połączone drogą p $(i(p)=v_1,\ t(p)=v_2)$ to odwzorowanie $h([q]) = [p^{-1} q p]$ zadaje homomorfizm $\pi(X,v_1) \xrightarrow{h} \pi(X,v_2)$

bo $p^{-1} q_1 p p^{-1} q_2 p \overset{1}{\sim} p^{-1} q_1 q_2 p$

- Homomorfizm $g : \pi(X,v_2) \to \pi(X,v_1)$ zadany przez $g([q]) = [p q p^{-1}]$ jest odwrotny do h, stąd h jest izomorfizmem.

Def. Dla spójnego grafu X, dowolną spośród grup $\pi(X,v)$ nazywamy grupą krawędziową (lub [kombinatoryczną] grupą podstawową) X.

PRZYKŁAD. Gdy $X \cong$ 

to $\pi(X,v) \cong F_S$

(S - zbiór zawierający po jednej zorientowanej krawędzi z każdej pary e, e^{-1} w E_X).

grupoid nad zbiorem V:

$$V \times V \ni (v,w) \rightsquigarrow \Gamma_{v,w}$$

$\forall_{v,w,u}$ $\Gamma_{v,w} \times \Gamma_{w,u} \longrightarrow \Gamma_{v,u}$ mnożenie

- elementy neutralne $e_v \in \Gamma_{v,v}$ $\forall v$
- elementy odwrotne obustronnie
- łączność działania

Przykład:

X graf, $V = V_X$,

- $\Gamma_{v,w} := \{ a \in \Pi(X)/\hat{\sim} : i(a) = v,\ t(a) = w \}$
- mnożenie – składanie klas dróg
- $e_v = [1_v]$, $[p]^{-1} = [p^{-1}]$

TWIERDZENIE. Grupa krawędziowa $\pi(X,v)$ dowolnego spójnego grafu X jest grupą wolną. Dla dowolnego drzewa maksymalnego T w X pewną bazę grupy $\pi(X,v)$ można naturalnie utożsamić ze zbiorem geometrycznych krawędzi w X leżących poza T. W szczególności, dla grafu skończonego X ranga grupy $\pi(X,v)$ jest równa rzędowi spójności $r(X)$.

<u>Dowód</u>

- T – drzewo maksymalne w X (dowolne)
- dla $a,b \in V_X$, $\overline{ab}$ – zredukowana droga w T od a do b (jedyna?)
- dla $e \in E_X$ określamy $\tilde{e} = \overline{v\, i(e)}\, e\, \overline{t(e)\, v} \in \Pi(X,v)$

  (pętla zbazowana w v)

- Niech $\Sigma \subset E_X$ zawiera po jednej krawędzi z każdej pary e, e^{-1} dla każdej geometrycznej krawędzi spoza T

FAKT 1. $S = \{[\tilde{e}] : e \in \Sigma\}$ generuje $\pi(X,v)$.

<u>Dowód FAKTU 1</u>. Zauważmy że

(*) dla $p = e_1 \cdots e_n \in \Pi(X,v)$ $\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n \simeq p$

(*) jeśli $e \subset T$ to $\tilde{e} \simeq 1_v$

Jeśli więc $p = e_1 \cdots e_n \in \Pi(X,v)$, zaś $e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}$ to kolejne krawędzie w p leżące poza T, to $p \simeq \tilde{e}_{i_1} \cdots \tilde{e}_{i_k}$

czyli $[p] = [\tilde{e}_{i_1}] \cdot \ldots \cdot [\tilde{e}_{i_k}]$, zaś każdy $[\tilde{e}_{i_j}] \in S \cup S^{-1}$. □

<u>FAKT 2</u> S jest bazą grupy $\pi(X,v)$, która jest wolna.

<u>Dowód FAKTU 2</u> Wystarczy pokazać, że słowo $s_1 \cdots s_m$ nad $S \cup S^{-1}$ w którym $s_{i+1} \neq s_i^{-1}$ reprezentuje w $\pi(X,v)$ nietrywialny element.

- Zauważmy, że $[\tilde{e}] : e \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$ są parami różne, bo są klasami parami różnych zredukowanych pętli, oraz że $[\tilde{e}_1] = [\tilde{e}_2]^{-1} \iff e_1 = e_2^{-1}$.

• przyjmijmy więc że $s_i = [\tilde{e}_i]$, $e_i \in \Sigma \cup \Sigma^{-1}$, $e_{i+1} \neq e_i^{-1}$

• Zauważmy, że w drzewie T zachodzi uniwersalna równość $\overline{xy}\,\overline{yz} \overset{1}{\sim} \overline{xz}$ $\forall x,y,z \in V_T$.

• Wówczas

$$s_1 \cdots s_m = [\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_m] =$$

$$[\overline{v\, i(e_1)}\, e_1\, \overline{t(e_1)\, i(e_2)}\, e_2\, \overline{t(e_2)\, i(e_3)} \cdots \overline{t(e_{m-1})\, i(e_m)}\, e_m\, \overline{t(e_m)\, v}]$$

gdzie ostatnia pętla jest zredukowana! Ponieważ ta ostatnia pętla jest $\neq 1_v$, więc reprezentuje w $\pi(X,v)$ element $\neq 1$. $\square$

KONIEC DOWODU TWIERDZENIA.

FAKT POMOCNICZY ① $x,y,z \in V_T$ to $\overline{xy}\,\overline{yz} \overset{1}{\sim} \overline{xz}$.

② $p \in \Pi(X,v)$ zredukowane to $[p] \neq 1$ w $\pi(X,v)$.

HOMOMORFIZM INDUKOWANY

Def. $f: Y \to X$ jest <u>morfizmem</u> grafów jeśli przekształca $V_Y \to V_X$ oraz $E_Y \to E_X$ zachowując incydencję oraz odwrócenie orientacji krawędzi (krawędzie geom. w Y na krawędzie geom. w X).

[nie dopuszczamy degeneracji krawędzi do wierzchołka, bo nie mamy takiej potrzeby]

FAKT. Jeśli $f: Y \to X$ morfizm, to $f_\#: \Pi(Y, v) \to \Pi(X, f(v))$ określony przez $f_\#(e_1 \dots e_n) = f(e_1) \dots f(e_n)$ indukuje homomorfizm $f_*: \pi(Y, v) \to \pi(X, f(v))$. [A więc $f_\#$ zachowuje 1-homotopijność]

oczywiste $\square$

NAKRYCIA:

Def. Morfizm $f: Y \to X$ nazywamy <u>nakryciem</u> jeśli jest „na" oraz $\forall v \in V_X$ $\forall v' \in f^{-1}(v)$ f jest bijekcją pomiędzy krawędziami startującymi w v' a krawędziami startującymi w v, oraz
— " — kończącymi — " — kończącymi w v.

PRZYKŁAD X  $\longleftarrow$ 

LEMAT. Niech $f: Y \to X$ nakrycie, $v \in V_X$, $v' \in f^{-1}(v)$.
Wówczas $f_*: \pi(Y, v') \to \pi(X, v)$ jest monomorfizmem.

Dowód:

* każda droga p w X startująca w v <u>jednoznacznie</u> podnosi się do drogi $\tilde{p}$ w Y startującej w v' i takiej, że $f_\#(\tilde{p}) = p$. $\square$
* jeśli $p_1 \overset{1}{\sim} p_2$ drogi startujące w v, to ich podniesienia startujące w v' spełniają $\tilde{p}_1 \overset{1}{\sim} \tilde{p}_2$ (tzw. własność podnoszenia homotopii)
* Stąd, dla $q_1, q_2 \in \Pi(Y, v')$, jeśli $f_\#(q_1) \overset{1}{\sim} f_\#(q_2)$ to $q_1 = \widetilde{f_\#(q_1)} \overset{1}{\sim} \widetilde{f_\#(q_2)} = q_2$, stąd monomorficzność f_*. $\square$

UWAGA.
(interpretujemy grupę $\pi(Y, v')$, poprzez włożenie $f_\#$, jako podgrupę w $\pi(X, v)$

podgrupa odpowiadająca nakryciu.

Odwrócenie ostatniego Lematu:

LEMAT. X spójny graf, $v \in V_X$, $H < \pi(X,v)$ podgrupa.
Wówczas istnieje spójny graf Y, nakrycie $f: Y \to X$, oraz wierzchołek $v' \in f^{-1}(v)$ taki, że $f_*(\pi(Y,v')) = H < \pi(X,v)$.

Dowód: Skonstruujemy Y oraz f.

Niech T maksymalne drzewo w X
i $\forall e \in E_X$ niech $\bar{e} = [\overline{v\, i(e)}\, e\, \overline{t(e)\, v}] \in \pi(X,v)$

$[\bar{e} = 1$ gdy $e \in T$, $\bar{e}$ generator bazowy lub odwrotność gdy $e \notin T]$.

Niech $W = \{Hg : g \in \pi(X,v)\}$ - zbiór prawostronnych warstw.

Niech $V_Y = V_X \times W$, $E_Y = E_X \times W$, przy czym krawędź (e, Hg)
łączy $(i(e), Hg)$ z $(t(e), Hg\bar{e})$ $[i(e,Hg) = (i(e), Hg),\ t(e,Hg) = (t(e), Hg\bar{e})]$

$$\left[(e,Hg)^{-1} = (e^{-1}, Hg\bar{e}) \right]$$

Rzutowania $V_X \times W \to V_X$, $E_X \times W \to E_X$ określają morfizm $f: Y \to X$.

Jest on nakryciem bo $e \to (e, Hg)$ daje bijekcję krawędzi wychodzących
z $u = i(e)$ z krawędziami wychodzącymi z $u' = (i(e), Hg)$

Zaś $e \to (e, Hg\bar{e})$ daje bijekcję krawędzi przychodzących do $u = i(e)$
z krawędziami przychodzącymi do $u' = (i(e), Hg)$.

Niech $v' = (v, H) \in V_Y$.
Oczywiście $f(v') = v$.

Pozostaje pokazać, że $f_*(\pi(Y,v')) = H$.
oraz że Y jest spójny.

- $\underline{f_*[\pi(Y,v')] \subset H}$

Niech $p' = e_1' \cdots e_n'$ – dowolna pętla z $\Pi(Y,v')$.

CEL: $f_*([p']) \in H$.

Niech $f\# p' = e_1 \cdots e_n$ – pętla w $\Pi(X,v)$

Wówczas: $v' = (v,H)$, więc $e_1' = (e_1, H)$

$t(e_1') = (t(e_1), H\overline{e_1})$, więc $e_2' = (e_2, H\overline{e_1})$

itd $e_k' = (e_k, H\overline{e_1} \cdots \overline{e_{k-1}})$ dla $k=1,\dots,n$

w szczególności $t(p') = t(e_n') = (t(e_n), H\overline{e_1} \cdots \overline{e_n}) =$

$= (v, H\overline{e_1} \cdots \overline{e_n})$

Ponieważ jednak $t(p') = v' = (v,H)$, więc $\overline{e_1} \cdots \overline{e_n} \in H$.

Z drugiej strony:

$$f_*([p']) = [f\# p'] = [e_1 \cdots e_n] \overset{(1)}{\sim} [\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n] = [\tilde{e}_1] \cdots [\tilde{e}_n] =$$

$$= \overline{e_1} \cdots \overline{e_n}, \quad \text{więc} \quad f_*([p']) \in H. \quad \square$$

- $\underline{f_*[\Pi(Y,v')] \supset H}$

Niech $h \in H$ dowolne, i niech $p = e_1 \cdots e_n \in \Pi(X,v)$ t.że $[p] = h$.

Pokażemy, że podniesienie p do drogi $\tilde{p}$ w Y o początku v' jest pętlą

(wtedy $h = [p] = [f\# \tilde{p}] = f_*([\tilde{p}]) \in f_*[\Pi(Y,v')]$).

Zachodzi: $\tilde{p} = (e_1, H)(e_2, H\overline{e_1}) \dots (e_n, H\overline{e_1} \cdots \overline{e_{n-1}})$

oraz $t(\tilde{p}) = t((e_n, H\overline{e_1} \cdots \overline{e_{n-1}})) = (\underset{v}{\underset{\parallel}{t(e_n)}}, H\overline{e_1} \cdots \overline{e_{n-1}}\,\overline{e_n})$

Ponieważ jednak $\overline{e_1} \cdots \overline{e_n} = [\tilde{e}_1] \cdots [\tilde{e}_n] = [\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n] = [e_1 \cdots e_n] = h$,

mamy $t(\tilde{p}) = (v, Hh) = (v,H) = v'$

czyli $\tilde{p}$ jest pętlą. $\square$

Spójność Y

$10\frac{1}{1}$

Pokażemy, że wierzchołek $v' = (v, H)$ można połączyć drogą w Y z dowolnym innym wierzchołkiem (u, Hg) $[u \in V_X, g \in \Pi(X, v)]$

Niech $e_1 \cdots e_n \in \Pi(X, v)$ takie że $[e_1 \cdots e_n] = g$,

Mamy wtedy $[e_1 \cdots e_n] = [\tilde{e}_1 \cdots \tilde{e}_n] = \bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n = g$

Niech ponadto $e_{n+1} \cdots e_{n+m}$ droga od $t(e_n) = v$ do u zawarta w drzewie rozpinającym T.

Ponieważ wtedy $\bar{e}_{n+1} = \cdots = \bar{e}_{n+m} = 1$, więc

zachodzi $g = \bar{e}_1 \cdots \bar{e}_n \bar{e}_{n+1} \cdots \bar{e}_{n+m}$

Podniesienie $e_1' \cdots e_{n+m}'$ drogi $e_1 \cdots e_{n+m}$ do drogi w Y o początku v' ma postać

$$(e_1, H)(e_2, H\bar{e}_1) \cdots (e_{n+m}, H\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_{n+m-1})$$

więc końcem tej drogi jest $(t(e_{n+m}), H\bar{e}_1 \cdots \bar{e}_{n+m}) = (u, Hg)$. □

PRZYPOMNIENIA:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{podgrupy}\\ H < \pi(X, v)\end{array}\right\} \xleftrightarrow[H = f_*[\pi(Y, v')]]{} \left\{\begin{array}{c}\text{spójne nakrycie}\\ f:(Y, v') \to (X, v)\end{array}\right\}$$

krotność nakrycia = indeks $(\pi(X,v) : H)$ podgrupy

WAŻNA WŁASNOŚĆ

Niech $p \in \pi(X,v)$ - pętla w X zaczepiona w v,

i niech $f:(Y,v') \to (X,v)$ nakrycie odpowiadające podgrupie $H < \pi(X,v)$. Wówczas

$[p] \in H \iff$ podniesienie $\tilde{p}$ pętli p do (Y,v')

jest pętlą (ma koniec w v').

DALSZE

WŁASNOŚCI NAKRYĆ GRAFÓW

(1) X spójny. Spójne nakrycie odpowiadające podgrupie $H < \pi(X,v)$ jest jednoznaczne w następującym sensie:
jeśli $f_i : (Y_i, v_i) \to (X, v)$, $i = 1,2$, dwa takie nakrycia, że $(f_i)_*[\pi(Y_i,v_i)] = H$, to
$\exists!$ izomorfizm grafów $\alpha : (Y_1, v_1) \to (Y_2, v_2)$ t.że $f_1 = \alpha f_2$.

W szczególności, każde nakrycie odpowiadające podgrupie H jest izomorficzne z nakryciem opisanym konstrukcją. [ZAD na liście]

UWAGA: wzajemnie jednoznaczna odp. pomiędzy podgrupami w $\pi(X,v)$ oraz spójnymi nakryciami grafu (X,v).

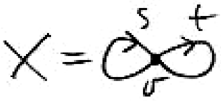
(2) **Def.** Dla spójnego grafu X <u>krotnością</u> nakrycia $f : Y \to X$ nazywamy moc zbioru $f^{-1}(v)$ [która nie zależy od $v \in V_X$].

<u>FAKT</u>. Krotność spójnego nakrycia $f : (Y, v') \to (X, v)$ jest równa indeksowi $\left(\pi(X,v) : f_*[\pi(Y,v')]\right)$.

<u>D-d:</u> Konstrukcja nakrycia odpowiadającego podgrupie $H < \pi_1(X,v)$ była taka, że $f^{-1}(v) = \{(v, Hg) : g \in G\}$, □
stąd równość. □

Inny argument: ZAD

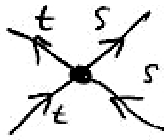
$10\frac{3}{4}$

PRZYKŁAD. $X =$  , $\pi(X,v) = F_{s,t}$,

$h : F_{s,t} \to S_3$ zadany przez $h(s) = (12)$, $h(t) = (23)$.

Znajdź nakrycie grafu X odp. podgrupie $\ker h \triangleleft F_{s,t}$.

INFORMACJE DO WYKORZYSTANIA:

(1) lokalnie takie nakrycie ma postać 

(2) $[F_{s,t} : \ker h] = |S_3| = 6$, więc nakrycie jest krotności 6

[ma 6 wierzchołków i 12 geom. krawędzi]

(3) $h(s^2) = 1$, $h(t^2) = 1$, $h((st)^3) = 1$

więc $s^2, t^2, (st)^3 \in \ker h$

więc podniesienia dróg odp. tym słowom są pętlami

(i to samo jest prawdą dla WSZYSTKICH sprzężeń tych elementów więc podniesienie dróg odp. tym słowom (zbazowane w dowolnym punkcie))

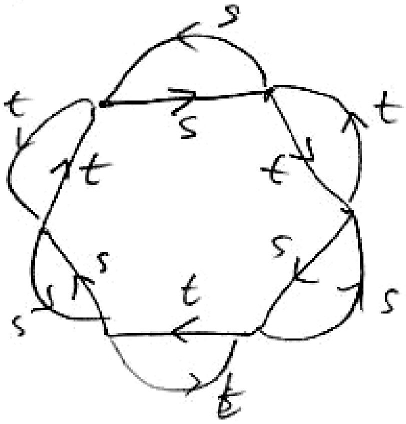
(4) Dla słów $sts\ldots$, $tst\ldots$ długości < 6

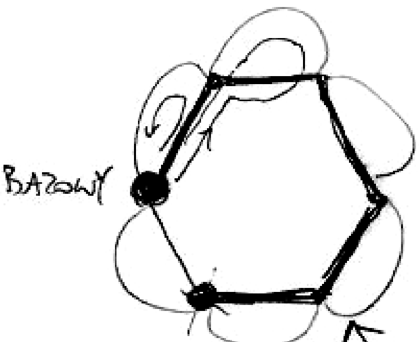
$h(sts\ldots) \neq 1$, $h(tst\ldots) \neq 1$,

więc $sts\ldots$, $tst\ldots \notin \ker h$

a zatem podniesienia dróg odp. tym słowom nie są pętlami

[mają różny początek i koniec]

Stąd nakrycie 



WNIOSKI: $\ker h$ jest grupą wolną rangi 7 z bazą (dla T)

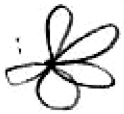
$t^2, ts^2t^{-1}, tst^2s^{-1}t^{-1}, tsts^2t^{-1}s^{-1}t^{-1}, tstst^2s^{-1}t^{-1}s^{-1}t^{-1}$

$tststs$, $tststs^{-1}$

WNIOSKI.

(1) Dowolna podgrupa grupy wolnej jest wolna.

Dowód:

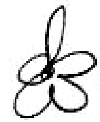
- realizujemy grupę wolną $F = F_S$ jako grupę podstawową $\pi(X_S, v)$ grafu $X_S =$  którego krawędzie geometryczne są 1-1 ze zbiorem S

- niech $H < F$ dowolna podgrupa i niech $f : (Y, v') \to (X_S, v)$ będzie nakryciem odpowiadającym tej podgrupie, czyli takim że $f_*[\pi(Y, v')] = H < \pi(X_S, v)$

- wiemy że $\pi(Y, v')$ jest grupą wolną oraz że f_* jest surjekcją, czyli że $\pi(Y, v') \cong H$. $\square$

(2) Dowolna podgrupa skończonego indeksu d w grupie wolnej F rangi k ma rangę $d(k-1)+1$.

Dowód:

$F_k = \pi(X_k, v)$ $X_k =$  k pętli

- $H = \pi_1(Y, v')$ gdzie Y d-krotne nakrycie X_k

[krotność nakrycia jest równa indeksowi $(F : H)$]

- Y ma d wierzchołków oraz $k \cdot d$ krawędzi

- $\pi_1(Y, v')$ ma rangę równą rzędowi spójności Y,

czyli $dk - d + 1 = d(k-1) + 1$. $\square$

KRYTERIUM NORMALNOŚCI
dla podgrup $H < \pi(X,v)$.

LEMAT. $f:(Y,v') \to (X,v)$ spójne nakrycie.

① Podgrupa $H = f_*[\pi(Y,v')] < \pi(X,v) = G$ jest normalna

$\iff$ grupa $\mathrm{Aut}_f Y$ automorfizmów ϕ grafu Y zgodnych z f

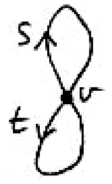
[tzn. $f \circ \phi = f$, czyli $\forall u \in V_Y \;\; \phi(u) \in f^{-1}(f(u))$]

działa tranzytywnie na $f^{-1}(v)$.

Ponadto, $\mathrm{Aut}_f Y$ jest wtedy kanonicznie izomorficzna z G/H.

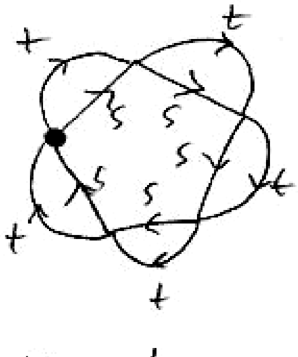
② Ogólnie, $\mathrm{Aut}_f Y \cong N_G(H)/H$

gdzie $N_G(H) = \{g \in G : gHg^{-1} = H\}$ – normalizator H w G.

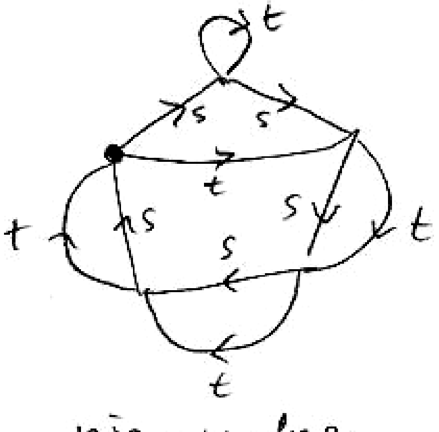
PRZYKŁAD. $X =$ 

$\pi(X,v) \cong F_2 = F_{\{s,t\}}$

Podgrupy indeksu 5 w $\pi(X,v)$ odpowiadające nakryciom



normalne
($F_2/H \cong \mathbb{Z}_5$)



nienormalne

($\mathrm{Aut}_f Y$ – to automorfizmy zachowujące etykiety
wyznaczające odwzorowanie nakrywające $f: Y \to X$)

Dowód (1)

1°. $H \lhd G \iff$ jeśli $[p] \in H$ to podniesienie p w Y zaczynające się od dowolnego $u \in f^{-1}(v)$ jest pętlą (kończy się też w u)
[ozn. $\tilde{p}^u$]

$\Big[ghg^{-1} \in H \iff [\gamma p \gamma^{-1}] \in H \iff \widetilde{\gamma p \gamma^{-1}}^{v'}$ zamknięte w Y
$[\gamma]=g$

$\iff \tilde{p}^u$ zamknięte dla $u = t(\tilde{\gamma})$

$\Big($bo $\widetilde{\gamma p \gamma^{-1}}^{v'} = \tilde{\gamma}^{v'} \tilde{p}^u \widetilde{\gamma^{-1}}^{t(\tilde{p}^u)}$
jest zamknięte $\iff \widetilde{\gamma^{-1}}^{t(\tilde{p}^u)} = (\tilde{\gamma}^{v'})^{-1}\Big)$ $\Big]$

2°. Z 1° wynika, że: $H \ntriangleleft G \iff$ dla pewnego $[p] \in H$ i pewnego $u \in f^{-1}(v)$ podniesienie $\tilde{p}^u$ kończy się w $u' \neq u$

Twierdzę, że wtedy nie ma $\phi \in \mathrm{Aut}_f Y$ t.że $\phi(v') = u$.

Gdyby był, to $\phi(\tilde{p}^{v'}) = \tilde{p}^u$ (zgodność z f)

ale $\tilde{p}^{v'}$ jest pętlą w Y, zaś $\tilde{p}^u$ nie, więc to niemożliwe.

Stąd implikacja $\Leftarrow$ w (1)

3°. Dla dowodu $\Rightarrow$
Korzystamy z zapisu (Y, v') jako:
- $V_Y = V_X \times \{Hg : g \in G\}$, $E_Y = E_X \times \{Hg : g \in G\}$
- $i(e, Hg) = (i(e), Hg)$, $t(e, Hg) = (t(e), Hg\bar{e})$
  gdzie $\bar{e} \in G = \pi(X, v)$ zadane przez e i $T_{max} \subset X$
- $v' = (v, H)$, $f(u, Hg) = u$

Jeśli $H \lhd G$ to mamy działanie $G \curvearrowright Y$:

$g'(u, Hg) = (u, Hg'g) = (u, g'Hg)$ | * dobra określoność
$g'(e, Hg) = (e, Hg'g) = (e, g'Hg)$ | * zgodność z $i, t : E \to V$

Obcięcie tego działania do H jest trywialne, więc mamy $G/H \curvearrowright Y$.

Tranzytywność na $U = f^{-1}(v)$:
$f^{-1}(v) = \{(v, Hg) : g \in G\} = \{g \cdot (v, H) : g \in G\} = \{g \cdot v' : g \in G\}$.

11 $\frac{3}{4}$

4°. Że $\mathrm{Aut}_f Y = G/H$

- $G/H \subset \mathrm{Aut}_f Y$ jasne

  bo $G/H \curvearrowright Y$ zachowuje f

- $\mathrm{Aut}_f Y \subset G/H$ wynika stąd, że

  $\forall u \in f^{-1}(v)$ $\exists$ co najwyżej jeden $\phi \in \mathrm{Aut}_f Y$ t.że $\phi(v') = u$

  (bo taki ϕ rozszerza się jednoznacznie na sąsiadów v' i kolejno na całe Y). (1)

Dowód (2) – zad na liście 6