Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe
Lista 2. Aksjomaty i modele geometrii euklidesowej płaszczyzny.

1. Dla niżej wymienionych modeli płaszczyzny (i) uzupełnij precyzyjną interpretację wszystkich pojęć pierwotnych, (ii) podaj przykłady wszystkich pojęć występujących w aksjomatach a definiowanych za pomocą pojęć pierwotnych, (iii) rozstrzygnij które aksjomaty płaszczyzny euklidesowej nie są spełnione w tych modelach.
   A. Punkty to liczby rzeczywiste i jest tylko jedna prosta, przy czym wszystkie punkty do niej należą.
   B. Punkty to litery polskiego alfabetu, zaś proste to słowa z ustalonego sławnika języka polskiego.
   C. Punktami są wszyscy pracownicy w Polsce, prostymi wszystkie firmy, zaś porządek zadany jest przez podległość służbową (nie tylko bezpośrednią).
   D. Punktami są punkty z wnętrza pewnego koła, zaś prostymi wnętrza cięciw tego koła; porządek na prostych, miary odcinków i miary kątów są takie jak w zwykłej geometrii.
   E. Rolę płaszczyzny pełni trójwymiarowa przestrzeń, zaś pozostałe pojęcia są określone tak jak w zwykłej geometrii.
   F. Wszystkie pojęcia są takie jak w zwykłej geometrii płaszczyzny, tylko miary kątów są równe połowie zwykłych miar.
   G. Wszystkie pojęcia są takie jak w zwykłej geometrii płaszczyzny, tylko miary odcinków są równe zwykłym miarom podniesionym do kwadratu.
   H. Punktami są punkty pewnej półsfery bez brzegu, zaś prostymi są łuki kół wielkich sfery zawarte w tej półsferze. Porządek na prostych określony jest w sposób naturalny, miary odcinków to długości łuków kół wielkich odpowiadających tym odcinkom, zaś miary kątów to zwykłe miary kątów pomiędzy stycznymi do półprostych w ich wspólnym początku.

Teoria incydencji to teoria będąca fragmentem geometrii euklidesowej, oparta tylko na aksjomatach incydencji I1-I3 oraz na aksjomacie równoległości R. Pojęciami pierwotnymi w tej teorii są tylko: punkt, prosta, relacja należenia.

2. Na rysunkach na następnej stronie (na dole) pogrubione kropki reprezentują punkty, zaś linie (zarówno proste jak owalne) reprezentują proste. Relacja należenia odpowiada leżeniu kropki na linii. Są to modele teorii incydencji. Które z tych modeli spełniają wszystkie aksjomaty teorii incydencji?
3. Zbadaj czy poszczególne aksjomaty teorii incydencji są od siebie niezależne.
4. Czy z aksjomatów teorii incydencji wynika, że:
   a. na każdej prostej leżą przynajmniej 3 punkty;
   b. płaszczyzna składa się z przynajmniej 4 punktów;
   c. na płaszczyźnie znajduje się przynajmniej 6 prostych;
   d. przez każdy punkt przechodzą przynajmniej 3 proste;
   e. dla każdej prostej istnieją przynajmniej dwie proste, które jej nie przecinają?

   Które z powyższych stwierdzeń są niezależne od teorii incydencji?
5. Czy teoria incydencji jest niesprzeczna? A czy jest zupełna?

W pozostałych zadaniach można korzystać wyłącznie z aksjomatów teorii incydencji, oraz z poprzednich zadań lub podpunktów.

6. Proste p_1, p_2 nazywamy *równoległymi* jeśli jest to ta sama prosta lub jeśli są to różne proste i nie mają punktów wspólnych. Uzasadnij, że:
   a. relacja równoległości jest przechodnia;
   b. jeśli $p \neq q$ i p przecina q, to każda prosta równoległa do p przecina q w dokładnie jednym punkcie, zaś przez każdy punkt prostej q przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do p.
7. *Kierunkiem* nazywamy zbiór wszystkich prostych równoległych do pewnej prostej. Uzasadnij, że
   (a) przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta o danym kierunku;
   (b) istnieją conajmniej 3 różne kierunki;
   (c) różne kierunki są rozłaczne jako zbiory prostych;
   (d) ilość prostych w poszczególnych kierunkach jest taka sama (przy założeniu że jest skończona);
   (e) na prostych o danym kierunku leży taka sama ilość punktów.
8. Jeśli p i q są różnymi prostymi, to istnieje prosta r przecinająca każdą z prostych p i q w dokładnie jednym punkcie.
9. Uzasadnij, że na każdych dwóch prostych leży taka sama ilość punktów.
10. *Pękiem* nazywamy zbiór wszystkich prostych przechodzących przez ustalony punkt. Uzasadnij, że każde dwa pęki są równoliczne.
11. Uzasadnij, że liczba prostych w każdym pęku jest o jeden większa niż liczba punktów na dowolnej prostej.