

Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe
Lista 2+

Zadania o modelach arytmetycznych

1. Rozważmy model geometrii (a właściwie teorii incydencji), w którym punktami są wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) , zaś prostymi są następujące dwa rodzaje równań:
 - (1) wszystkie równania postaci $x = c$ dla dowolnych parametrów $c \in R$;
 - (2) wszystkie równania postaci $y = (x - a)^2 + b$ dla dowolnych parametrów $a, b \in R$.Relacja incydencji odpowiada spełnieniu równania przez parę liczb. Zbadaj, czy w tym modelu spełnione są aksjomaty I1, I2 oraz I3, a także aksjomat równoległości.
2. Rozważmy zmodyfikowany model arytmetyczny Hilberta, w którym zamiast liczb rzeczywistych występują liczby wymierne. Tak więc, punktami w tym modelu są pary (x, y) liczb wymiernych, zaś prostymi są zbiory par spełniających równania postaci $ax + by + c = 0$ o współczynnikach a, b, c wymiernych. Pozostałe pojęcia pierwotne są zinterpretowane w taki sam sposób jak w modelu Hilberta. Zbadaj, które spośród aksjomatów geometrii euklidesowej są, a które nie są spełnione w tym modelu.
3. Rozważmy model teorii incydencji, w którym punktami są wszystkie pary (x, y) liczb rzeczywistych, zaś prostymi są zbiory punktów następujących trzech postaci:
 - (a) $\{(x, y) : y = c\}$, dla dowolnej stałej rzeczywistej c ;
 - (b) $\{(x, y) : x = c\}$, dla dowolnej stałej rzeczywistej c ;
 - (c) $\{(x, y) : y = ax + b \text{ i } x \geq 0\} \cup \{(x, y) : y = 2ax + b \text{ i } x \leq 0\}$, dla dowolnych stałych rzeczywistych $a \neq 0$ i b .Uzasadnij, że w tym modelu spełnione są aksjomaty I1-I3 oraz aksjomat równoległości.
4. Uzasadnij, że model z poprzedniego zadania jest, jako model teorii incydencji, **izomorficzny** z modelem Hilberta. W tym celu zapisz wzorem wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie $F : R^2 \rightarrow R^2$ które proste z modelu Hilberta przeprowadza na proste z modelu z poprzedniego zadania też w sposób wzajemnie jednoznaczny.
5. Rozważmy model teorii incydencji, w którym punktami są wszystkie pary liczb rzeczywistych (x, y) , zaś prostymi są następujące dwa rodzaje linii (równań):
 - (a) $x = c$ dla dowolnego rzeczywistego parametru c ;
 - (b) $y = a|x - b| + c$ dla dowolnego parametru $a > 0$ i dowolnych parametrów rzeczywistych b i c .Zbadaj, które spośród aksjomatów teorii incydencji są spełnione w tym modelu. Czy w tym modelu jest spełniony aksjomat Łobaczewskiego?