Uniwersytet Wrocławski
Wydział Matematyki i Informatyki
Instytut Matematyczny
specjalność: nauczycielska

Anna Sznajder Otfinowska

Podstawy geometrii i elementy geometrii nieeuklidesowej. Skrypt do zajęć na specjalności nauczycielskiej.

Praca magisterska
napisana pod kierunkiem
prof. dr hab. Jacka Świątkowskiego

Wrocław 2005

Spis treści

Wstęp

Skrypt został napisany do wykładu z geometrii elementarnej i geometrii nieeuklidesowej z myślą o studentach sekcji nauczycielskiej i ogólnej. W zamierzeniu ma on być alternatywą dla i tak nielicznych publikacji z geometrii nieeuklidesowej. Treści w nim zawarte starałam się przedstawić prostym i jasnym językiem, tak by ułatwić czytelnikowi zrozumienie poruszonych zagadnień związanych z różnymi modelami geometrii.

W pierwszych rozdziałach skryptu opisuję ogólną strukturę teorii aksjomatyczno – dedukcyjnej na przykładzie teorii pola dla figur wielokątnych. Następnie w rozdziale V omawiam geometrię euklidesową płaszczyzny, która od czasów Euklidesa była prototypem dyscypliny zaksjomatyzowanej. Przedstawiam szczegółowy układ aksjomatów i pojęć pierwotnych geometrii euklidesowej zaproponowany przez Hilberta oraz opisuję różne modele geometrii, w tym arytmetyczny model geometrii euklidesowej według Hilberta, który jest jednocześnie dowodem jej niesprzeczności. Burzliwe dzieje rozwoju aksjomatyki geometrii euklidesowej zaowocowały nie tylko uzasadnieniem niesprzeczności, ale również były przyczyną powstania nowej geometrii – geometrii nieeuklidesowej. W Rozdziale VI szczegółowo opisuję związek jednego z aksjomatów, aksjomatu równoległości nazywanego V postulatem Euklidesa z geometrią nieeuklidesową. Aby ułatwić czytelnikowi zrozumienie faktu istnienia innych geometrii niż euklidesowa w drugiej części rozdziału VI zacytowałam „Bajkę na dobry początek". Wprowadza ona czytelnika w przystępny i zabawny sposób w nowy i mało znany świat geometrii nieeuklidesowej. Następne rozdziały poświęcone są charakterystyce jednej z geometrii nieeuklidesowej, geometrii Bolyai – Łobaczewskiego. W pierwszej kolejności przedstawiam krótką charakterystykę prostych oraz opisuję różnorodność form geometrycznych nowej geometrii. Na zakończenie zajmuję się problemem niesprzeczności geometrii nieeuklidesowej. Okazuje się, że modeli spełniających aksjomaty geometrii nieeuklidesowej świadczących o niesprzeczności jest wiele. W wykładzie ograniczyłam się do przedstawienia jednego modelu, modelu półpłaszczyznowego Poincarego.

Życzę czytelnikowi powodzenia w odkrywaniu nowych geometrii i zmaganiu się z dotychczas poznaną. Żywię nadzieję, że niniejszy skrypt będzie w tym pomocny.

Anna Otfinowska

ROZDZIAŁ 1

Teoria pola jako przykład aksjomatyczno – dedukcyjnej teorii matematycznej

1.1. STRUKTURA TEORII AKSJOMATCZNO - DEDUKCYJNEJ

Zbiór zdań danego języka nazywa się teorią, jeśli konsekwencje i wnioski ze zdań należących do teorii również do niej należą. Spośród teorii danego języka można wyróżnić *teorie aksjomatyczno-dedukcyjne*.

W aksjomatyczno-dedukcyjnej teorii alfabetem są *pojęcia pierwotne*, czyli pojęcia intuicyjnie jasne, który przyjmuje się bez definicji. Jednym z pojęć pierwotnych może być na przykład punkt, czy prosta oraz relacja „leży na”, czy „przechodzi przez”. Oczywiście można powiedzieć, że przecież każdy wie co to jest punkt i umie go opisać. Owszem, ale podając definicję używa się pojęć, które nie zostały wcześniej opisane, nie zostały zdefiniowane. Więc znów należy zdefiniować wyrazy , których użyliśmy. W ten sposób, cofając się można by spróbować zdefiniować wszystkie pojęcia, ale niestety zawsze natrafimy na słowo jeszcze nie zdefiniowane. Dlatego ustalamy pewną grupę pojęć jako pojęcia pierwotne, a dopiero na ich bazie budujemy teorię. Musimy jeszcze pamiętać, że z samych pojęć pierwotnych nie stworzymy teorii, tak jak znając jedynie litery i wyrazy nie umiemy mówić po polsku. Należy jeszcze określić jakie własności mają te pojęcia oraz jakie prawa między mini zachodzą. Tak jak wybieraliśmy pojęcia pierwotne, tak też należy pewne stwierdzenia w teorii uznać za prawdziwe bez dowodu. Takie stwierdzenia, których prawdziwość uznajemy bez dowodu nazywamy *aksjomatami*. Na przykład aksjomatem może być zdanie „przez każde dwa punkty przechodzi jedna prosta”. Dopiero teraz gdy mamy wyróżnione pojęcia pierwotne i aksjomaty możemy opierając się na nich drogą logicznego rozumowania (dedukcją) budować teorię, czyli dowodzić nowych twierdzeń i określać nowe pojęcia. Podsumujmy w kilku punktach, jak powstaje aksjomatyczno-dedukcyjna teoria matematyczna.

Budując aksjomatyczno-dedukcyjną teorię matematyczną:

- Wyróżniamy ***pojęcia pierwotne*** – czyli pojęcia, które przyjmuje się bez definicji.

- ***Aksjomaty*** - czyli stwierdzenia, które przyjmuje się za prawdziwe bez dowodu. Tworzą one układ stwierdzeń, możliwie niewielu, które postulują pewne własności pojęć pierwotnych za oczywiste, intuicyjnie prawdziwe.

- Opierając się na pojęciach pierwotnych i aksjomatach drogą ***dedukcji***, czyli logicznego rozumowania dowodzimy nowych twierdzeń naszej teorii. Możemy również opierając się na wcześniej udowodnionych twierdzeniach i używając pojęć pierwotnych definiować nowe pojęcia.

1.2. TEORIA POLA FIGUR WIELOKĄTNYCH.

1.2.1. Opis teorii pola.

Przykładem aksjomatyczno–dedukcyjnej teorii jest teoria pola figur wielokątnych. Właśnie teorią pola dla figur wielokątnych będziemy szerzej zajmować się na tym wykładzie, ilustrując na jej przykładzie rozmaite aspekty dotyczące teorii aksjomatyczno-dedukcyjnych.

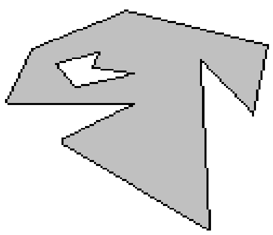
Zwykle pojęciem pola posługujemy się w sposób intuicyjny. Na tym wykładzie spróbujemy uściślić to pojęcie w języku matematycznym. Oczywiście możemy zrobić to na różne sposoby, gdyż jest wiele możliwych podejść do zagadnienia pola. Zależą one przede wszystkim od gustów matematyków oraz tego co uważają za prostsze lub bardziej popularne w danym okresie. Jednak podejścia te nie są ze sobą sprzeczne, a raczej uzupełniają się dając możliwość spojrzenia na to zagadnienie z różnych stron. Celem tego wykładu jest przedstawienie teorii pola w sposób aksjomatyczno–dedukcyjny, czyli wyrażenie teorii pola przez aksjomaty i stwierdzenia, które można z nich wyprowadzić.

DEFINICJA 1.1. ***Polem*** nazywamy funkcję przypisującą figurom wielokątnym W liczby rzeczywiste $P(W)$. Zakładamy, że funkcja pola posiada pewne własności, czyli spełnia aksjomaty pola.

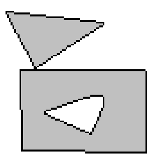
Aby moc rozważać teorię pola figur wielokątnych należy jeszcze wyjaśnić co rozumiemy przez pojęcie figury wielokątnej.

DEFINICJA 1.2. ***Figura wielokątna*** może być dowolnym wielokątem znanym z geometrii płaskiej, jednak pojęcie to rozszerza nam zbiór wielokątów o figury, które nie są wielokątami, ale spełniają niżej opisane warunki. Są to figury, które są sumą skończonej ilości nie zachodzących na siebie trójkątów. Figury nie zachodzące na siebie, to takie które nie mają wspólnych punktów wewnętrznych (rozłączność wnętrz). Przykładem figur wielokątnych są :

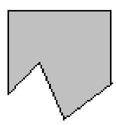
a)



b)



c)



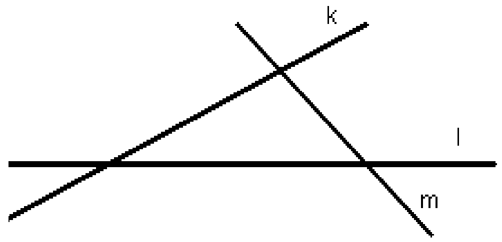
1.2.2. Wybór aksjomatów w teorii pola.

Aksjomaty pola są to stwierdzenia, które przyjmujemy za prawdziwe bez dowodu, na bazie, których pokażemy jak wygląda (choć częściowo) dedukcyjny wywód teorii pola. Za oczywiste przyjmuje się, że przy wyborze grupy aksjomatów należy pamiętać, by nie były one wzajemnie sprzeczne. Jeżeli jedno stwierdzenie zaprzeczałoby drugiemu, wówczas teoria powstała na ich bazie nie miałaby sensu.

PRZYKŁAD 1.1. Wyobraźmy sobie sytuację, w której aksjomatami pewnej teorii są zdania:

1. „przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna prosta”;
2. „istnieją trzy punkty nie leżące na jednej prostej”;
3. „przez dwa dowolne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta”.

Wówczas wnioski jakie uzyskujemy z tych trzech aksjomatów wzajemnie się wykluczają. Wystarczy, że weźmiemy trzy punkty nie leżące na jednej prostej. Z jednej strony jeżeli przez dane dwa punkty poprowadzimy prostą *l* i weźmiemy trzeci punkt z poza prostej to wówczas w myśl aksjomatu „przez dwa punkty przechodzi dokładnie jedna prosta” wyznaczymy proste *k* i m. Jednak oznacza to, że przez jeden punkt przechodzą przynajmniej dwie proste, co przeczy pierwszemu aksjomatowi.



Ten przykład obrazuje nam, że aksjomatów nie można dobierać w dowolny sposób. Poza tym liczba stwierdzeń, które obieramy za aksjomaty powinna być ograniczona. Oczywiście nie ma odgórnego przykazu, że nie może być ich więcej niż pięć czy dziesięć, jednak postuluje się by było ich możliwie niewiele. Umiar przy wyborze aksjomatów zależy nie tylko od rozsądku opisującego teorię matematyczną, ale również istotne jest sprawdzenie czy wybrane aksjomaty nie niosą ze sobą tej samej treści ujętej innymi słowami. Błędem byłoby sądzić, że nagle ktoś wymyśla sobie kilka aksjomatów i pojęć pierwotnych i tak długo myśli nad treścią jaką postulują, aż dochodzi do zadziwiających wniosków, czyli twierdzeń, które poznajemy i używamy. Sam proces tworzenia teorii matematycznych jest dużo bardziej skomplikowany, zależy od obserwacji i doświadczeń. Historia matematyki ukazuje mam liczne drogi powstawania i odkrywania matematyki. Metoda aksjomatyczno – dedukcyjna służy do rozwinięcia powstałej teorii, do usystematyzowania wiadomości, które już zostały odkryte i ułożenia w logiczną całość.

1.2.3. Aksjomaty teorii pola figur wielokątnych.

(A1): Aksjomat sumy

Jeśli wielokąt W jest sumą nie zachodzących na siebie wielokątów W_1 i W_2 to pole danego wielokąta jest równe sumie pól wielokątów W_1 i W_2 .

(A2): Aksjomat przystawania

Wielokąty przystające mają równe pola.

(A3): Aksjomat monotoniczności

Jeśli wielokąt W_1 zawiera się w wielokącie W_2 to pole wielokąta W_1 jest mniejsze lub równe polu wielokąta W_2.

(A4): Aksjomat jednostki
Pole ustalonego kwadratu K_0 o boku długości 1 wynosi 1.

1.2.4. Dedukcyjny wywód teorii.

Fragment teorii pola posłuży nam jako przykład do przedstawienia dedukcyjnego wywodu teorii matematycznej. Krok po kroku korzystając z aksjomatów i geometrycznych własności figur wielokątnych nie związanych z pojęciem pola będziemy dowodzić nowych stwierdzeń. W konsekwencji otrzymamy uporządkowany zapis części teorii pola.

STWIERDZENIE 1.1. *Pole każdego kwadratu K o boku 1 wynosi 1.*

DOWÓD: Rozważany kwadrat K jest przystający do wyróżnionego kwadratu K_0 ,więc na mocy aksjomaty przystawania mają równe pola. Z aksjomatu jednostki wiemy, że pole K_0 wynosi jeden zatem $P(K) = 1$. ■

STWIERDZENIE 1.2. *Jeśli figury wielokątne $W_1, \ldots ,W_n$ nie zachodzą na siebie to pole figury, będącej sumą $W_1, \ldots ,W_n$ jest równe sumie pól poszczególnych figur, co możemy zapisać:*

$$P(W_1 \cup \ldots \cup Wn) = P(W_1) + \ldots + P(Wn).$$

DOWÓD: Należy zastosować (n-1) - krotnie aksjomat sumy. ■

STWIERDZENIE 1.3. *Pole prostokąta o bokach długości $\frac{1}{n}$ i $\frac{1}{m}$, gdzie n, m są liczbami naturalnymi jest równe iloczynowi długości boków i wynosi $\frac{1}{nm}$.*

DOWÓD: Z $n \cdot m$ przystających i nie zachodzących na siebie prostokątów o wymiarach $\frac{1}{n}$ na $\frac{1}{m}$ otrzymujemy kwadrat o boku długości 1. Z jednej strony pole kwadratu o boku długości jeden wynosi 1 (ze Stwierdzenia 1.1). Z drugiej strony na podstawie stwierdzenia 2 wiemy, że pole powstałego kwadratu jest równe sumie pól $n \cdot m$ przystających prostokątów o bokach długości $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$. Zatem pole jednego prostokąta o bokach długości $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{m}$ wynosi $\frac{1}{nm}$, co kończy dowód. ■

STWIERDZENIE 1.4. *Pole prostokąta W o bokach długości $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, gdzie a,b,c,d są liczbami naturalnymi, wynosi $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.*

DOWÓD: Bok długości $\frac{a}{b}$ dzielimy na a równych części, zaś bok długości $\frac{c}{d}$ dzielimy na c równych części. Nasz wyjściowy prostokąt jest w takim razie sumą $a \cdot c$

przystających i nie zachodzących na siebie prostokątów W' o bokach długości $\frac{1}{b}$ i $\frac{1}{d}$.

Pole takich prostokątów umiemy już obliczyć (stw.3) i wynosi ono $P(W') = \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d}$

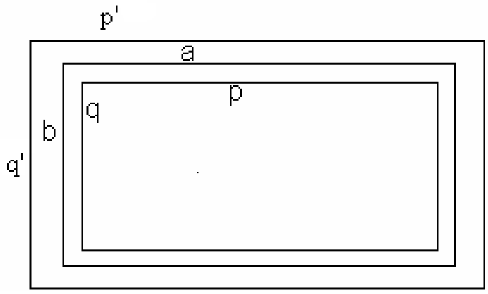
Ostatecznie na mocy Stwierdzenia 1.2 pole prostokąta *W* wynosi:

$$P(W) = a \cdot c \cdot P(W') = a \cdot c \cdot \frac{1}{b} \cdot \frac{1}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} . \qquad \blacksquare$$

Udowodniliśmy więc, że pole prostokąta o wymiernych długościach boków x i y jest równe iloczynowi długości jego boków i wynosi xy. Zastanówmy się czy z aksjomatów możemy wyprowadzić analogiczny wzór na pole każdego prostokąta, czyli również takiego, którego długości boków mogą być niewymierne. Okazuje się, że tak.

STWIERDZENIE 1.5. *Pole prostokąta W o bokach dowolnych długości a, b wynosi a · b.*

DOWÓD: Przypadek gdy a, b są liczbami dodatnimi wymiernymi udowodniony został w Stwierdzeniu 1.4. Zajmijmy się prostokątem W, którego przynajmniej jedna z długości boków a, b jest liczbą niewymierną. Wyróżniamy dwie takie sytuacje, to znaczy gdy jedna z długości jest liczbą niewymierną, lub gdy obie długości boków są niewymierne. Rozważmy najpierw sytuację z dwiema niewymiernymi długościami boków.
Weźmy pomocniczo dwa prostokąty W_{pq} *oraz* $W_{p'q'}$ o wymiernych długościach boków, których położenie względem danego prostokąta przedstawia rysunek. Długości boków rozważanych prostokątów przedstawiają nierówności:



$p < a < p'$ i $q < b < q'$

oraz

$P(W_{pq}) = p \cdot q \quad P(W_{p'q'}) = p' \cdot q'$

Na mocy aksjomatu monotoniczności:

$P(W) \geq P(W_{pq}) = p \cdot q$

$P(W) \leq P(W_{p'q'}) = p' \cdot q'$ czyli

$p \cdot q \leq P(W) \leq p' \cdot q'$

Każdą liczbę rzeczywistą możemy przybliżyć (zarówno z góry jak i z dołu) ciągiem liczb wymiernych. Dobierzmy więc takie wartości p, p', q, q' aby $p \to a$, $q \to b$, $p' \to a$, $q' \to b$. Wtedy:

$$\lim_{\substack{p \to a \\ q \to b}} p \cdot q \leq P(W) \leq \lim_{\substack{p' \to a \\ q' \to b.}} p' \cdot g'$$

Otrzymujemy zatem w granicy, że: $a \cdot b \leq P(W) \leq a \cdot b$
zatem ostatecznie $P(W) = a \cdot b$.

Przypadek gdy długość jednego z boków jest liczbą wymierną, a druga niewymierną rozważa się analogicznie. Zatem pokazaliśmy, że pole dowolnego prostokąta o bokach długości *a, b* wynosi $P(W) = a \cdot b$. ■

Korzystając jedynie z czterech aksjomatów i z kolejno udowodnionych stwierdzeń otrzymaliśmy wzór na pole dowolnego prostokąta. Ponadto okazuje się, że już na tym etapie, mając do dyspozycji tak mało stwierdzeń możemy wyprowadzić wzory na pola innych wielokątów. Zajmiemy się wzorem na pole trójkąta. Podobnie jak w przypadku prostokąta wyprowadzimy dany wzór w kilku etapach. Rozważmy najpierw trójkąty prostokątne.

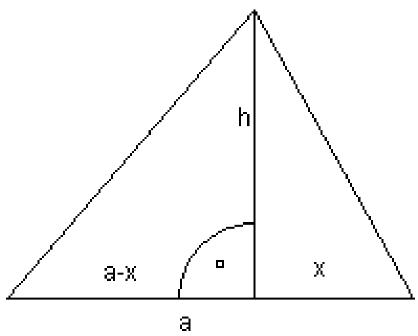
STWIERDZENIE 1.6. *Pole trójkąta prostokątnego T o przyprostokątnych długości a, b wynosi* $P(T) = \frac{a \cdot b}{2}$.

DOWÓD: Rozważmy prostokąt o bokach długości *a, b*. Z własności geometrycznych prostokątów wiemy, że przekątna prostokąta podzieli nam dany prostokąt na dwa przystające i prostokątne trójkąty. Z jednej strony pole prostokąta wynosi *ab* (Stwierdzenie 1.5). Z drugiej strony na podstawie Stwierdzenia 1.2 mamy, że jest sumą pól dwóch przystających trójkątów. Na mocy aksjomatu przystawania, pola trójkątów są równe więc pole jednego trójkąta jest połową pola prostokąta. ■

STWIERDZENIE 1.7. *Pole dowolnego trójkąta T wynosi* $P(T) = \frac{a \cdot h}{2}$ *gdzie a - długość boku trójkąta, h – długość wysokości trójkąta opuszczonej na bok a.*

DOWÓD:

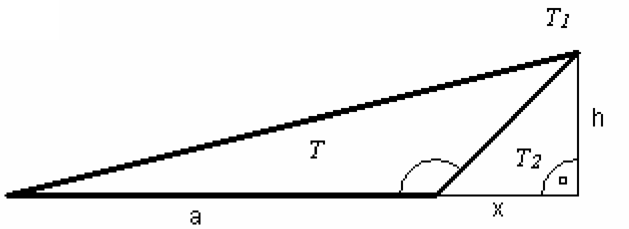
1. T- trójkąt ostrokątny



Wysokość *h* opuszczona na bok *a* dzieli go na dwie części długości *x* i *(a-x)*. Dodatkowo wysokość *h* dziel nam trójkąt *T* na dwa trójkąty prostokątne, których długości przyprostokątnych są równe odpowiednio *x, h* oraz *(a-x), h.* Pola powstałych trójkątów umiemy obliczyć, a korzystając z faktu udowodnionego w Stwierdzeniu 1.2 otrzymujemy, że

$$P(T) = \frac{x \cdot h}{2} + \frac{(a - x) \cdot h}{2} = \frac{a \cdot h}{2}.$$

2. T– trójkąt rozwartokątny



Z wysokość h opuszczonej z wierzchołka naprzeciw największego kąta oraz boków b, a, x, powstał trójkąt prostokątny T_1 polu $\frac{(a+x)\cdot h}{2}$, natomiast pole trójkąta prostokątnego T_2 wynosi $\frac{x\cdot h}{2}$ (Stwierdzenie 1.6). Zatem na mocy Stwierdzenia 1.2 otrzymujemy równości:

$$P(T) + P(T_2) = P(T_1)$$
$$P(T) = P(T_1) - P(T_2)$$
$$P(T) = \frac{(a+x)\cdot h}{2} - \frac{x\cdot h}{2}.$$

Co daje szukany wzór $$P(T) = \frac{a\cdot h}{2}$$ ■

1.2.5. Zbiór sensownych stwierdzeń teorii pola.

Do tej pory, przy budowaniu teorii pola zajmowaliśmy się takimi stwierdzeniami, które okazywały się prawdziwe i pokazywaliśmy ich dowody. Niestety nie każde stwierdzenie, które jest sensownym zdaniem dotyczącym pojęć rozważanej teorii, jest jego twierdzeniem. Na przykład zdanie „pole dowolnego prostokąta wynosi jeden" okazuje się zdaniem fałszywym w tej teorii (pokazanie, że istotnie tak jest pozostawiam czytelnikowi jako ćwiczenie). Ponadto mogą istnieć takie stwierdzenia, których prawdziwość czy fałszywość w żaden sposób nie zależy od układu aksjomatów i nie da się jej orzec odwołując się do ustalonego układu aksjomatów i metody dedukcyjnej. Nazywamy je stwierdzeniami niezależnymi.

Wyróżniamy trzy typy sensownie sformułowanych stwierdzeń:

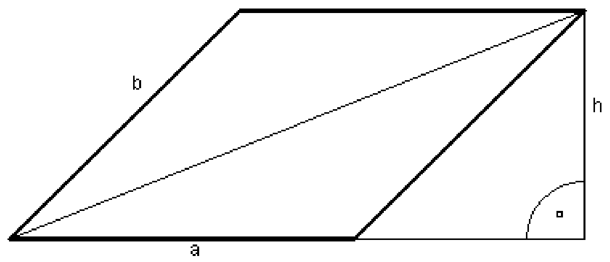
- **Stwierdzenia prawdziwe** w danej teorii, dające się wyprowadzić z aksjomatów.
- **Stwierdzenia fałszywe** w danej teorii, czyli takie które można obalić za pomocą aksjomatów.
- **Stwierdzenia niezależne** w danej teorii, których nie można wyprowadzić, ani obalić na gruncie zadanego układu aksjomatów.

Do stwierdzeń prawdziwych, czyli twierdzeń teorii pola figur wielokątnych zaliczamy stwierdzenia 1.1 – 1.7. Przykładem stwierdzenia fałszywego w rozważanej teorii jest poniższe Stwierdzenie 1.8.

STWIERDZENIE 1.8. *Pole dowolnego wypukłego czworokąta C o kolejnych bokach długości a, b, c, d wynosi* $P(C) = \frac{1}{2} (a + c) \cdot \frac{1}{2}(b + d)$

DOWÓD NIEPRAWDZIWOŚCI: W dwóch krokach przedstawimy, że rozważane stwierdzenie nie jest prawdziwe w teorii pola figur wielokątnych..

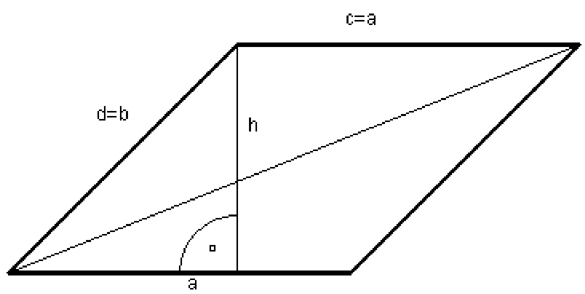
KROK 1. Pole równoległoboku *R* wynosi $P(R) = a \cdot h$



Dowód: Przekątna dzieli równoległobok na dwa przystające trójkąty, każdy o polu równym $\frac{a \cdot h}{2}$ (Stwierdzenie 1.7). Na mocy Stwierdzenia 1.2 otrzymujemy

$$P(R) = \frac{a \cdot h}{2} + \frac{a \cdot h}{2} = a \cdot h. \qquad \blacksquare$$

KROK 2. Pokażemy przykład czworokąta wypukłego o kolejnych bokach długości *a, b, c, d*, którego pole nie jest równe $\frac{1}{2} (a + c) \cdot \frac{1}{2}(b + d)$.



Niech czworokąt *C* będzie równoległobokiem (który nie jest prostokątem) o wymiarach *a, b, c, d*. Wiemy z geometrii, że $h < b$, oraz zachodzą równości: $a = c, b = d$.
Po podstawieniu do wzoru na pole postulowanego w Stwierdzeniu 1.8 otrzymujemy

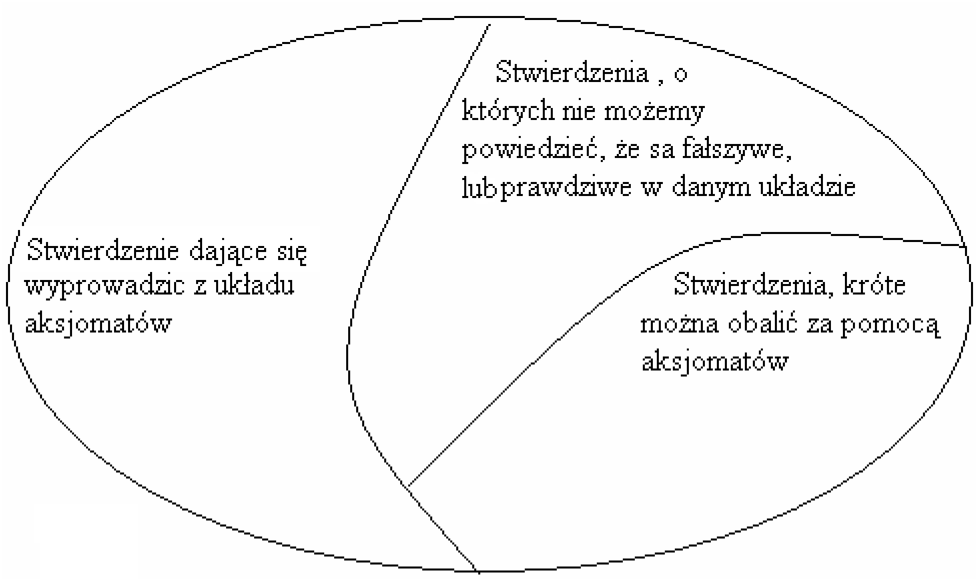
$$P(C) = \frac{1}{2} (a + a) \cdot \frac{1}{2}(b + b) = a \cdot b.$$

Z drugiej strony, w punkcie 1 wykazaliśmy, że pole równoległoboku wynosi $a \cdot h$. Ponieważ $a \cdot h < a \cdot b$ dostajemy sprzeczność.
Zatem Stwierdzenie 1.8 jest nieprawdziwe w teorii pola figur wielokątnych. ■

ROZDZIAŁ 2

Układ aksjomatów.
Kryterium równoważności dwóch układów aksjomatów.

Zbiór stwierdzeń dotyczących pojęć pewnej teorii matematycznej możemy podzielić na trzy grupy: stwierdzenia prawdziwe, stwierdzenia fałszywe i stwierdzenia niezależne. Ich rozmieszczenie sugeruje poniższy diagram.



W rozdziale 1 powiedzieliśmy, że aby rozważana teoria matematyczna miała sens, układ aksjomatów powinien być dobrany w taki sposób, by wnioski jakie z niego płyną wzajemnie się nie wykluczały. Płynie z tego wniosek, że zbiory zdań prawdziwych i fałszywych danej teorii muszą być rozłączne. Wtedy rozważana teoria ma sens czyli nie jest sprzeczna.

DEFINICJA 2.1. Układ aksjomatów nazywamy **niesprzecznym** jeśli zachodzi którykolwiek z równoważnych warunków 1), 2).

1) zbiory stwierdzeń dających się wyprowadzić i obalić są rozłączne
2) nie można z niego wyprowadzić stwierdzeń ze sobą sprzecznych

Rozważać będziemy teorie budowane na niesprzecznych układach aksjomatów. Wśród nich wyróżniamy podział teorii matematycznych na te, które zawierają trzy rodzaje sensownych stwierdzeń (prawdziwe, fałszywe i niezależne) oraz na takie, których każde sensowne stwierdzenie dotyczące teorii jest albo prawdziwe, albo fałszywe. W zależności od tego jaki układ aksjomatów wybierzemy, otrzymamy na drodze dedukcji teorie, w których są zdania niezależne od aksjomatów lub ich brak.

DEFINICJA 2.2. (**Zupełny układ aksjomatów)** - układ aksjomatów, który jest niesprzeczny nazywamy zupełnym jeśli nie istnieją stwierdzenia niezależne od tego układu. Stąd wniosek, że każde stwierdzenie dotyczące danej teorii jest albo prawdziwe, albo fałszywe.

Teoria powstała na gruncie zupełnego układu aksjomatów nazywa się teorią **zupełną**. Często zdarza się, że tworząc pewną teorię matematyczną okazuje się, że wybrany układ aksjomatów jest niekompletny, w tym sensie, że nie da się odwołując do tego układu aksjomatów odpowiedzieć na ważne pytania dotyczące teorii. Mówimy wtedy, że teoria jest **niezupełna**. Natomiast stwierdzenia, o których prawdziwości nie umiemy nic powiedzieć stają się prawdziwe lub fałszywe przy uzupełnieniu układu aksjomatów nowymi. Tak uzupełniona teoria staje się teorią zupełną.

Przy doborze aksjomatów przyjmuje się zasadę oszczędności. Polega ona na tym by nie dopuścić do takiej sytuacji, że aksjomat A_n jest jednocześnie stwierdzeniem wyprowadzonym z pozostałych wcześniej wybranych aksjomatów $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Ponadto ważne jest by nie okazało się, że aksjomat A_n można obalić za pomocą aksjomatów $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Jeżeli tak się stanie to wnioski płynące z aksjomatów z rozważanego układu będą wzajemnie się wykluczały. Wynika z tego, że aksjomat A_n nie powinien być w żaden sposób zależny od pozostałych.

DEFINICJA 2.3. Aksjomat A_n jest **niezależny** od aksjomatów $A_1, \ldots, A_{n-1}$ jeśli nie da się go wyprowadzić lub obalić logicznym rozumowaniem z tych aksjomatów. Innymi słowy nie jest on twierdzeniem teorii opartej na pozostałych aksjomatach, ale również jego zaprzeczenie nie jest twierdzeniem wynikającym z pozostałych aksjomatów.

DEFINICJA 2.4. (**Niezależny układ aksjomatów)** - niesprzeczny układ aksjomatów $A_1, \ldots, A_n$ nazywamy **niezależnym** gdy każdy aksjomat z tego układu jest niezależny od pozostałych.

Dany jest układ aksjomatów $A_1, \ldots, A_n$. Jeżeli aksjomatu A_i dla pewnego $i \in \{1,\ldots,n\}$ nie można wyprowadzić z pozostałych aksjomatów układu, wtedy jest on niezależny od pozostałych. Układ złożony z aksjomatów o tej własności nazywamy właśnie niezależnym układem aksjomatów.

Teorię matematyczną buduje się na niesprzecznym i niezależnym układzie aksjomatów. Jednak to jaki układ stwierdzeń spełniający powyższe warunki wybierzemy na aksjomaty jest w dużym stopniu dowolne. Ważne, by wybrane układy aksjomatów prowadziły do tych samych wniosków, czyli zbudowały tę samą teorię matematyczną.

Jak rozpoznać, że dwa na pierwszy rzut oka różne układy aksjomatów są podstawą tej samej teorii? Wystarczy pokazać, że każdy aksjomat jednego układu jest logiczną konsekwencją wszystkich, bądź części aksjomatów z drugiego układu. Analogicznie należy pokazać, że każdy aksjomat z drugiego układu jest konsekwencją aksjomatów pierwszego układu. Mówimy wtedy, że rozważane układy aksjomatów są równoważne.

DEFINICJA 2.5. Dwa układy aksjomatów $A_1, \ldots, A_n$ oraz $A'_1, \ldots, A'_m$ są **równoważne** dokładnie wtedy gdy każdy aksjomat z pierwszego układu można wyprowadzić z aksjomatów drugiego układu i na odwrót.

UWAGA: Z dwóch równoważnych układów aksjomatów otrzymujemy te same stwierdzenia i wnioski, czyli tę samą teorię.

PRZYKŁAD 2.1. Sprawdź, że podane układy aksjomatów są równoważne.

Układ I: Układ aksjomatów teorii pola figur wielokątnych opisanych w rozdziale 1.

Układ II:

- Aksjomat przystawania,
- Aksjomat sumy,
- A Î (Aksjomat prostokąta)

Aksjomat prostokąta brzmi: *prostokąt o bokach długości a, b ma pole równe a · b.*

UZASADNIENIE RÓWNOWAŻNOŚCI UKŁADÓW I i II

1^0 Pokażemy, że aksjomaty układu II wynikają z układu I.

Aksjomaty sumy i przystawania są w obu układach, więc ich wynikanie jest oczywiste. Pozostaje zatem pokazać, że A Î wynika z układu I. W rozdziale 1 z tego samego układu aksjomatów wyprowadziliśmy stwierdzenie 1.5, które brzmi „Pole prostokąta o bokach dowolnej długości a, b wynosi a · b”. Zauważmy, że A Î mówi to samo, więc A Î wynika z pierwszego układu aksjomatów.

2^0 Pokażemy, że aksjomaty układu I wynikają z układu II

Aksjomat jednostki wynika z aksjomatów układu II ponieważ, kwadrat jednostkowy K_0 o bokach 1 na 1 ma pole równe $P(K_0) = 1 \cdot 1 = 1$ na podstawie A Î.

By pokazać, że AM wynika z układu II, bazując na układzie II wyprowadzimy kilka pomocniczych stwierdzeń.

STWIERDZENIE P.1. *Każdy prostokąt ma dodatnie pole.*

DOWÓD: Stwierdzenie wynika bezpośrednio z A Î.

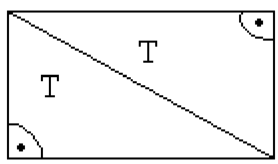
STWIERDZENIE P.2. *Każdy trójkąt prostokątny ma dodatnie pole.*

DOWÓD: Niech *T* będzie trójkątem prostokątnym. Możemy zbudować prostokąt *W* z dwóch przystających trójkątów *T*. Z aksjomatu sumy i przystawania oraz Stwierdzenia P.1 otrzymujemy:

$$2\,P(T) = P(W)$$

czyli

$$P(T) = \tfrac{1}{2}\,P(W) > 0.$$



■

STWIERDZENIE P.3. *Każdy trójkąt ma dodatnie pole.*

DOWÓD: Dowolny trójkąt T mogę podzielić, prowadząc wysokość na najdłuższy bok z przeciwległego wierzchołka, na dwa trójkąty prostokątne T_1, T_2, których pola są dodatnie (Stwierdzenie P.2).
Na mocy aksjomatu sumy:

$$P(T) = P(T_1) + P(T_2)$$

zatem

$$P(T) > 0.$$

■

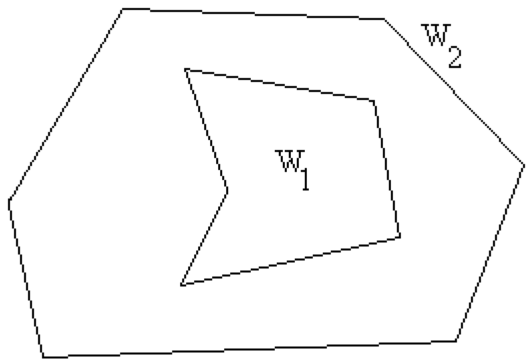
STWIERDZENIE P.4. *Z aksjomatów układu II wynika aksjomat monotoniczności.*

DOWÓD: Rozważmy dwa wielokąty W_1, W_2, takie że $W_1 \subset W_2$.

Istnieje figura wielokątna W_3 nie zachodząca na W_1,

taka że:

$$W_1 \cup W_3 = W_2.$$



Wiemy z aksjomatu sumy, że

$$P(W_1) + P(W_3) = P(W_2).$$

Wystarczy więc pokazać, że

$$P(W_3) \geq 0.$$

To zaś wynika ze Stwierdzenia P.3 i aksjomatu sumy przy użyciu indukcji, gdyż figurę W_3 możemy przedstawić jako sumę $W_3 = T_1 \cup \ldots \cup T_k$ pewnymi nie zachodzącymi na siebie trójkątami. ■

W analogiczny sposób przeprowadza się dowód równoważności innych układów aksjomatów. Ważne jest by pamiętać o tym, że rozumowanie należy przeprowadzić w dwie strony. Przypomnijmy jeszcze raz, że równoważne układy aksjomatów prowadzą do tej samej teorii. Jeżeli wykażemy, że choć jeden aksjomat układu nie zależy od drugiego układu aksjomatów wówczas otrzymamy dwie różne teorie matematyczne, które będą miały wspólne tylko niektóre spośród swoich twierdzeń.

ROZDZIAŁ 3

Modele teorii

W poprzednich rozdziałach zajmowaliśmy się teorią od strony pojęć pierwotnych, aksjomatów i stwierdzeń, które się na nią składają. Istnieje drugi sposób patrzenia na teorię i omówimy go szerzej w tym rozdziale. Polega on na zinterpretowaniu języka teorii w jakiejś znanej nam dziedzinie. Przypomina to trochę obsadzanie ról w filmie i tworzenie scenografii. Na początku postaci są jedynie opisane w scenariuszu. Wybierając konkretne osoby i miejsca nie robimy nic innego jak interpretujemy pojęcia i nadajemy im rzeczywisty kształt. Tak samo tworzymy konkretną interpretację teorii matematycznej nazywaną modelem teorii.

DEFINICJA 3.1. Funkcje pola to funkcje, które figurom wielokątnym przyporządkowują liczby rzeczywiste. Określają wartość liczbową, czyli pole danego wielokąta.

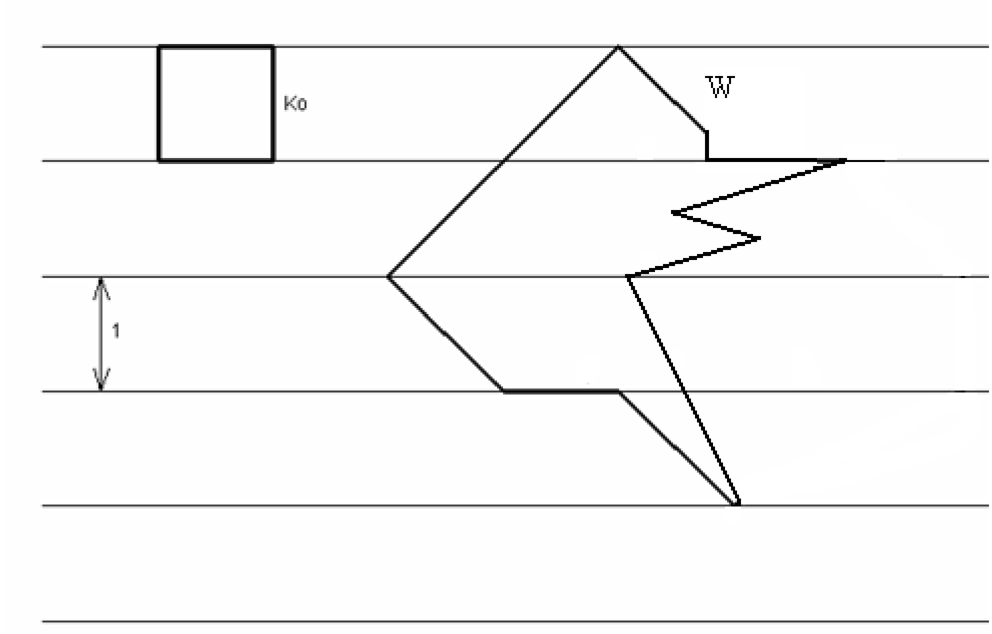
DEFINICJA 3.2. Model teorii to jawnie opisany w terminach matematycznych system, w którym pojęciom teorii odpowiadają konkretne obiekty na przykład: zbiory, funkcje. Przykładem modelów teorii pola dla figur wielokątnych są funkcje pola.

W dowolnym modelu aksjomaty mogą być spełnione lub nie. Jeżeli są spełnione, to automatycznie prawdziwe są wszystkie stwierdzenia teorii i mówimy, że jest to model spełniający aksjomaty. Jeżeli rozważając teorię pola figur wielokątnych wybierzemy taką funkcje pola (taki model), w której prawdziwe są tylko niektóre aksjomaty wówczas otrzymamy interpretację teorii zawężonej do stwierdzeń wynikających z aksjomatów spełnionych w wybranym modelu.

PRZYKŁAD 3.1. Funkcja pola $P_\alpha(W)$ jako model teorii pola wielokątów.

Naszym zadaniem jest przedstawienie modelu teorii pola, czyli stworzenie takiej funkcji, która figurom wielokątnym przyporządkowuje pewne wartości liczbowe.

Rozważmy rodzinę prostych równoległych, położonych w odległości co *1* i takich, że dwie spośród tych prostych zawierają boki kwadratu K_0 wymienionego w Aksjomacie jednostki. Obiekty, które będziemy badać to figury wielokątne.



Funkcję pola $P_\alpha(W)$ definiujemy jako funkcję przypisującą wartość rzeczywistą dowolnej figurze wielokątnej W. Funkcję P_α dla danej figury wielokątnej W obliczamy następująco: Patrzymy na wnętrze figury W i sumujemy długości „kawałków" prostych w nim zawartych. Następnie patrzymy na brzeg figury i te części brzegu figury, które pokrywają się z prostymi również dodajemy. Otrzymane wartości podstawiamy do wzoru na, który określa nam funkcja pola.

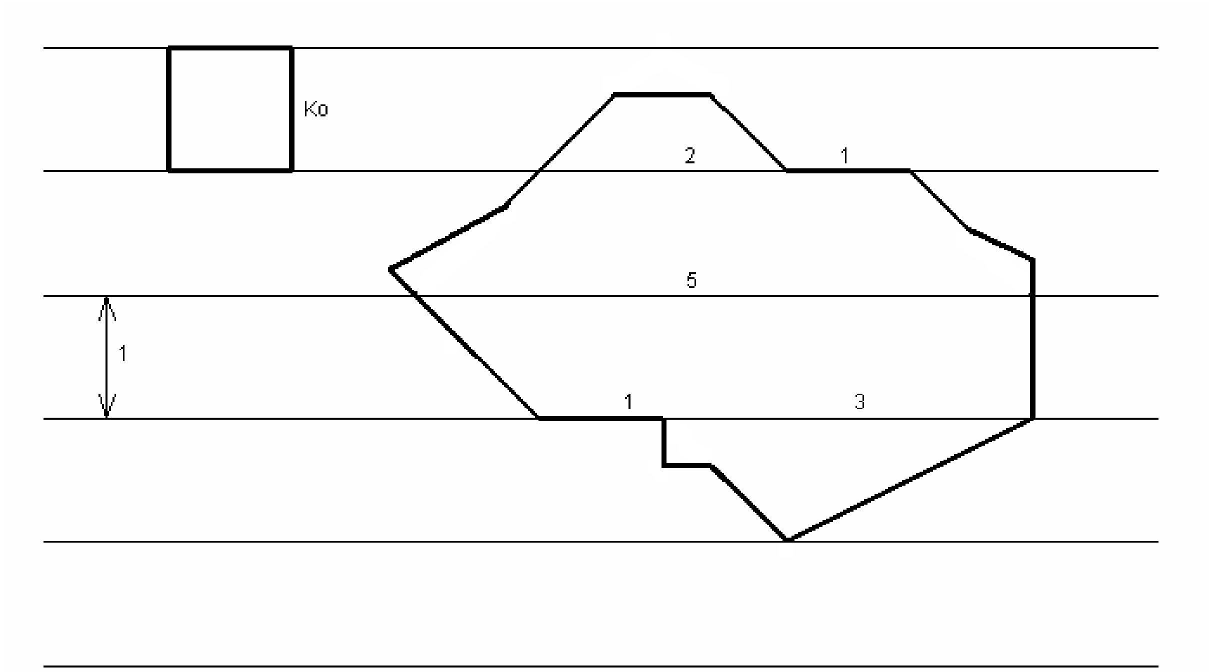
Dla ułatwienia wprowadźmy oznaczenia:

- α – rodzina prostych na płaszczyźnie, parami równoległych, położonych w odległości „co *1*".
- $intW$ - wnętrze figury W
- δW – brzeg figury W
- d – suma długości

Funkcję pola P_α definiujemy jako:

(wzór 3.1) $$P_\alpha(W) = d\,(intW \cap \alpha) + ½\, d(\delta W \cap \alpha)$$

Obliczmy wartość funkcji P_α dla przykładowego wielokąta W.



Suma długości prostych zawartych w wnętrzu figury wynosi $(2 + 5 + 3) = 10$.

Suma długości prostych położonych na brzegu wielokąta W wynosi 2.

Podstawmy do wzoru:

$$P_\alpha(W) = 10 + ½ \cdot 2 = 11$$

Funkcja P_α jest modelem teorii pola, która określa pole wielokąta wzorem $P_\alpha(W) = d\,(intW \cap \alpha) + ½\, d(\delta W \cap \alpha)$. Aby stworzyć inny model teorii pola wystarczy podać inną funkcję, czyli zdefiniować inny „przepis” na obliczanie pola.

Rola modelu ogranicza się nie tylko do zilustrowania teorii matematycznej. Za pomocą modeli można uzasadniać, że aksjomaty teorii są niezależne, oraz że teoria jest niesprzeczna.

UWAGA 3.1. *Dowód niesprzeczności danego układu aksjomatów polega na znalezieniu takiej interpretacji (modelu), która spełnia wszystkie aksjomaty tego układu. Zatem teoria jest niesprzeczna jeśli posiada model, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty.*

UWAGA 3.2. *Niezależności aksjomatu A_i od pozostałych aksjomatów układu $A_1,\dots,A_{i-1}, A_{i+1},\dots,A_n$ dowodzimy poprzez znalezienie:*

i. *modelu spełniającego wszystkie aksjomaty $A_1,\dots,A_{i-1}, A_{i+1},\dots,A_n$;*

ii. *modelu, w którym aksjomat A_i nie jest prawdziwy, ale spełnione są wszystkie pozostałe aksjomaty $A_1,\dots,A_{i-1}, A_{i+1},\dots,A_n$;*

Sprawdźmy czy funkcja P_α z przykładu 3.1. spełnia aksjomaty teorii pola.

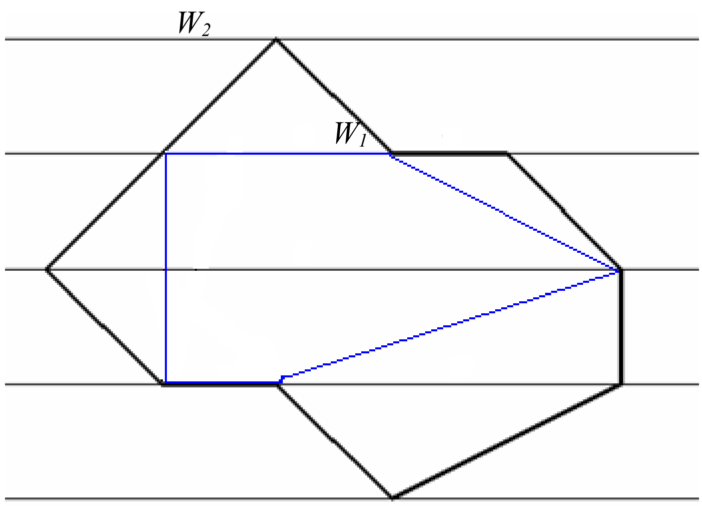
1^0 Aksjomat jednostki

Dwie spośród prostych równoległych, oddalonych co *1* zawierają boki kwadratu K_0. Sprawdźmy czy pole jednostkowego kwadratu wynosi *1*.

$$P_\alpha(K_0) = 0 + ½ \cdot (1 + 1) = 1 \qquad ■$$

2^0 Aksjomat monotoniczności

Rozważmy figury wielokątne W_1, W_2, takie że $W_1 \subset W_2$.
Pokażemy, że $P_\alpha(W_1) \lesseqgtr P_\alpha(W_2)$.



Wprowadźmy następujące oznaczenia:

d_0 – suma długości odcinków z $\delta W_1 \cap \delta W_2 \cap \alpha$
d_1 – suma długości odcinków z $\delta W_1 \cap \alpha$ rozłącznych z δW_2
d_2 – suma długości odcinków z $\delta W_2 \cap \alpha$ rozłącznych z δW_1
d_3 – suma długości odcinków z $intW_1 \cap intW_2 \cap \alpha$
d_4 – suma długości odcinków z $intW_2 \cap \alpha$ rozłącznych z $intW_1$
Zatem $P_\alpha(W_1) = d_3 + ½\, d_1 + ½\, d_0$

$P_\alpha(W_2) = d_3 + d_4 + ½\, d_2 + ½\, d_0$

Zauważmy, że w d_4 zawierają się odcinki brzegowe W_1 rozłączne z W_2, które w W_2 stają się odcinkami wewnętrznymi, zatem $d_4 = d_1 + d_4'$.
Natomiast d_4' oznacza sumę długości pozostałych odcinków wewnętrznych W_2 rozłącznych z W_1. Otrzymujemy więc, że z jednej strony

$$P_\alpha(W_1) = d_3 + ½\, d_1 + ½\, d_0.$$

A z drugiej strony

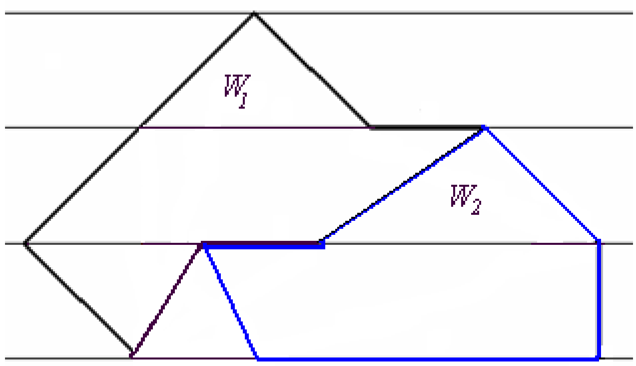
$$P_\alpha(W_2) = d_3 + d_1 + d_4' + ½\, d_2 + ½\, d_0.$$

Ponieważ funkcja pola W_2 zawiera we wzorze te same składniki co dla W_1 oraz dodatkowo jeszcze $d_4' + ½\, d_1$ zatem spełniona jest nierówność $P_\alpha(W_1) \leq P_\alpha(W_2)$. ■

3^0 Aksjomat sumy

Niech W_1, W_2 to figury nie zachodzące na siebie. Pokażemy, że zachodzi równość

$P_\alpha(W_1) + P_\alpha(W_2) = P_\alpha(W_1 \cup W_2)$.



Odcinki wewnętrzne W_1, W_2 pozostają odcinkami wewnętrznymi $W_1 \cup W_2$. Natomiast wspólne odcinki brzegowe W_1, W_2 stają się odcinkami wewnętrznymi w $W_1 \cup W_2$.

Wprowadźmy następujące oznaczenia:
- d_0 – suma długości odcinków z $\delta W_1 \cap \delta W_2 \cap \alpha$;
- d_1 – suma długości odcinków z $\delta W_1 \cap \alpha$ rozłącznych z W_2;
- d_2 – suma długości odcinków z $\delta W_2 \cap \alpha$ rozłącznych z W_1;

Zatem długość odcinków wewnętrznych $W_1 \cup W_2$ wyraża się wzorem:

(wzór 3.2) $$d(int(W_1 \cup W_2) \cap \alpha) = d(intW_1 \cap \alpha) + d(intW_2 \cap \alpha) + d_0.$$

Natomiast długości odcinków brzegowych figur wielokątnych W_1, W_2 wynoszą:

$$d(\delta W_1 \cap \alpha) = d_1 + d_0$$

$$d(\delta W_2 \cap \alpha) = d_2 + d_0.$$

Dodając podane wielkości otrzymujemy:

$$d(\delta W_1 \cap \alpha) + d(\delta W_2 \cap \alpha) = (d_1+d_2)+2\cdot d_0$$

(wzór 3.3) $\quad \frac{1}{2} d(\delta W_1 \cap \alpha) + \frac{1}{2} d(\delta W_2 \cap \alpha) = \frac{1}{2} (d_1+d_2) + d_0$

Odcinki brzegowe W_1 rozłączne z W_2 pozostają odcinkami brzegowymi w $W_1 \cup W_2$. Podobnie odcinki brzegowe W_2 rozłączne z W_1 pozostają odcinkami brzegowymi w $W_1 \cup W_2$. Zatem długość odcinków brzegowych figury wielokątnej $W_1 \cup W_2$ wyraża się wzorem:

(wzór 3.4) $\quad d(\delta (W_1 \cup W_2) \cap \alpha) = d_1 + d_2.$

Przypomnijmy wzór definiujący funkcję P_α:

$$P_\alpha(W_1 \cup W_2) = d(int(W_1 \cup W_2) \cap \alpha) + \frac{1}{2} d(\delta (W_1 \cup W_2) \cap \alpha).$$

Podstawiając wyrażenia ze wzorów 3.2 i 3.4, a następnie korzystając ze wzoru 3.3 otrzymujemy:

$$P_\alpha(W_1 \cup W_2) = d(intW_1 \cap \alpha) + d(intW_2 \cap \alpha) + d_0 + \frac{1}{2}(d_1 + d_2) =$$

$$= d(intW_1 \cap \alpha) + d(intW_2 \cap \alpha) + \frac{1}{2} d(\delta W_1 \cap \alpha) + \frac{1}{2} d(\delta W_2 \cap \alpha) =$$

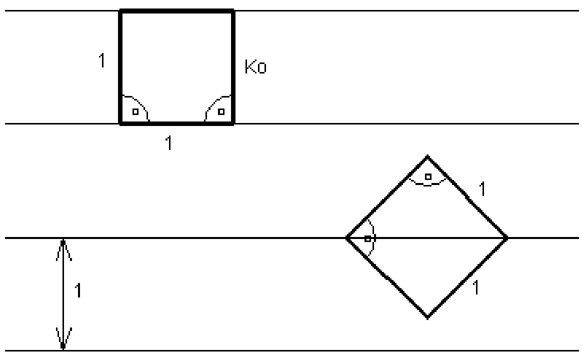
$$= P_\alpha(W_1) + P_\alpha(W_2). \qquad \blacksquare$$

4^0 Aksjomat przystawania

Aksjomat przystawania nie jest spełniony, ponieważ istnieją dwa przystające kwadraty o boku 1, dla których wartości funkcji P_α są różne.

$P_\alpha (K_0) \neq P_\alpha (K_1)$

$P_\alpha (K_0) = 1$ ale $P_\alpha (K_1) = \sqrt{2}$



WNIOSEK 3.1. Aksjomatu przystawania nie da się wyprowadzić z pozostałych aksjomatów pola.

DOWÓD: Gdyby aksjomat przystawania wynikał z aksjomatów sumy, monotoniczności i jednostki, to każda funkcja spełniająca wymienione trzy aksjomaty musiałaby też spełniać aksjomat przystawania. Jednak wskazaliśmy funkcję P_α, która nie spełnia aksjomatu przystawania.

Teoria jest niesprzeczna gdy ma model spełniający aksjomaty tej teorii. Rozważmy teorię pola opartą na trzech z czterech aksjomatów teorii pola. Znaleźliśmy model (funkcję pola) spełniający aksjomaty sumy, monotoniczności i jednostki. Jest nim funkcja P_α opisana w Przykładzie 3.1. Oznacza to, że teoria pola dla figur wielokątnych oparta na aksjomacie sumy, jednostki i monotoniczności jest niesprzeczna.

Funkcja pola P_α nie spełnia jednego z czterech aksjomatów teorii pola - aksjomatu przystawania. Istnieje więc podejrzenie, że Aksjomat przystawania jest niezależny od pozostałych aksjomatów układu. Na mocy Uwagi 3.2 wystarczy znaleźć model, w którym spełnione są wszystkie aksjomaty pola figur wielokątnych by dowieść niezależności aksjomatu przystawania od aksjomatów sumy, monotoniczności i jednostki. Funkcję pola spełniającą wszystkie aksjomaty teorii pola omówimy w następnym rozdziale.

ROZDZIAŁ 4

Niesprzeczność teorii pola dla figur wielokątnych

Skonstruujemy bez odwoływania się do pojęcia pola funkcję przyporządkowującą wielokątom liczby, spełniającą wszystkie cztery aksjomaty pola. W tym celu przypomnijmy, że przez wielokąt będziemy rozumieć każdą figurę na płaszczyźnie dającą się przedstawić jako suma skończonej liczby niezachodzących na siebie trójkątów.

KONSTRUKCJA FUNKCJI P_0

DEFINICJA 4.1. Określenie funkcji P_0 (w dwóch krokach):

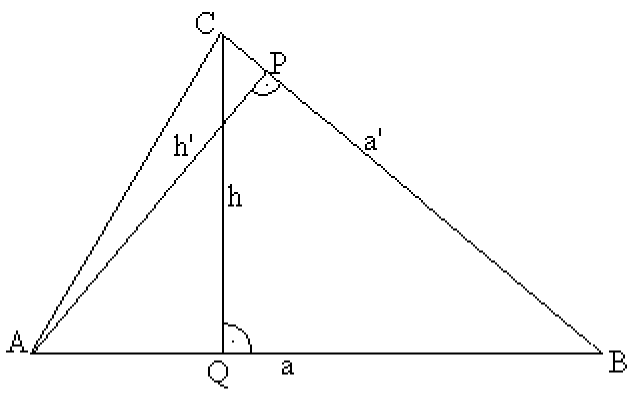
1) Jeśli *T* jest trójkątem o podstawie *a* i wysokości *h* to funkcją P_0 tego trójkąta określamy wartość $P_0(T) = \frac{1}{2}ah$

2) Jeśli *W* jest figurą wielokątną będącą sumą niezachodzących na siebie trójkątów T_1 , ..., T_k to określamy $P_0(W) = P_0(T_1) + ... + P_0(T_k)$.

Powyższe określenia możemy uznać za poprawne dopiero wtedy gdy sprawdzimy, że zachodzą następujące fakty:

FAKT 4.1. *$P_0(T)$ nie zależy od wyboru podstawy w trójkącie T.*

DOWÓD: Trójkąty *CQB* i *APB* są podobne, ponieważ są trójkątami prostokątnymi o wspólnym kącie przy wierzchołku *B*.



Zatem

$$\frac{h}{a'} = \frac{h'}{a}$$

stąd

$$ha = h'a'.$$

Po pomnożeniu obu stron przez $\frac{1}{2}$

mamy

$$\frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}a'h'$$

czyli $P_0(T)$ nie zależy od wyboru podstawy i wysokości. ■

FAKT 4.2. *$P_0(W)$ nie zależy od sposobu przedstawienia figury W jako sumy niezachodzących na siebie trójkątów.*

DOWÓD FAKTU 4.2. Rozważmy dwa podziały figury W na trójkąty o rozłącznych wnętrzach. Z jednej strony wielokąt W możemy podzielić na k trójkątów tak, że $W = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$. Z drugiej strony wielokąt W złożony jest z m rozłącznych trójkątów $W = \bigcup_{j=1}^{m} T_j'$.

Pokażemy, że $\sum_{i=1}^{k} P_o(T_i) = \sum_{j=1}^{m} P_o(T'_j)$.

Zauważmy, że możemy podzielić wielokąt W na jeszcze mniejsze trójkąty Δ_n, nakładając na siebie obydwa poprzednie podziały i rozdrabniając ustalone w ten sposób wielokąty na trójkąty. Wtedy każdy trójkąt T_i jest sumą pewnych trójkątów Δ_n, i każdy trójkąt T'_j również jest sumą pewnych trójkątów Δ_n . Musimy pokazać, że prawdziwa jest następująca równość:

$$\sum_{i=1}^{k} P_o(T_i) = \sum_{n=1}^{t} P_o(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{m} P_o(T'_j)$$

Aby to zrobić skorzystamy z następującego lematu (dowód podamy później).

LEMAT 1. *Jeśli trójkąt T jest sumą nie zachodzących na siebie trójkątów Δ_i to*

$$P_0(T) = \sum_{i=1} P_o(\Delta_i).$$

Wracając do dowodu Faktu 4.2, na mocy Lematu 1 otrzymujemy

$$\sum_{i=1}^{k} P_o(T_i) = \sum_{n=1}^{t} P_o(\Delta_n) \text{ oraz } \sum_{n=1}^{t} P_o(\Delta_n) = \sum_{j=1}^{m} P_o(T'_j).$$

Porównanie stronami otrzymanych równości kończy dowód Faktu 4.2. ■

Pozostaje nam udowodnić Lemat 1. Przeprowadzenie dowodu wymaga podania ciągu lematów wraz z dowodami. Zaczniemy od przypadków gdy wielokąt W jest trójkątem, zaś jego rozkłady na mniejsze trójkąty są szczególnie proste.

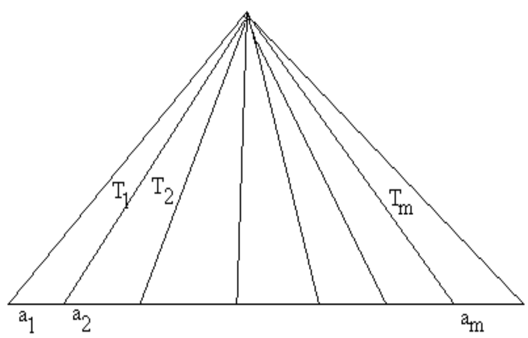
LEMAT 2. *Jeśli trójkąt T rozdzielimy na mniejsze niezachodzące na siebie trójkąty $T_1, \ldots, T_m$ odcinkami wychodzącymi z ustalonego wierzchołka, to*

$$P_0(T) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_m).$$

DOWÓD: Zauważmy, że trójkąty T_i oraz trójkąt wyjściowy T mają wspólną wysokość h. Natomiast podstawa $a = a_1 + \ldots + a_m$. Funkcja $P_0(T) = \frac{1}{2} ah$, zatem dla trójkąta T_i funkcja $P_0(T_i) = \frac{1}{2} a_i h$.

Otrzymujemy stąd, że

$$P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_m) =$$



$$= \frac{1}{2} a_1 \cdot h \; + \ldots + \; \frac{1}{2} a_m \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} a_1 \cdot h \; + \ldots + \frac{1}{2} a_m \cdot h =$$

$$= \frac{1}{2} h \, (a_1 + \ldots + a_m \,) = \frac{1}{2} h \cdot a.$$

Ostatecznie więc

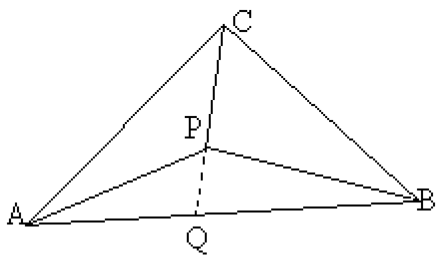
$$P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_m) = ½\, h \cdot a = P_0(T). \qquad \blacksquare$$

LEMAT 3. *Dla punktu P wewnątrz trójkąta ABC zachodzi równość:*

$$P_0(ABC) = P_0(APC) + P_0(BPC) + P_0(APB).$$

DOWÓD: Wprowadźmy pomocniczy punkt *Q* będący punktem przecięcia przedłużonego odcinka *CP* z bokiem trójkąta *AB*, jak na rysunku poniżej. Wówczas otrzymamy podział analogiczny do podziału z Lematu 2. Zachodzi zatem,

wzór (1): $P_0(ABC) = P_0(AQC) + P_0(QBC)$



Obliczmy funkcje P_0 dla trójkątów *AQC* oraz *QBC*. Zauważmy, że wielkości $P_0(AQC)$, $P_0(QBC)$ możemy obliczyć znów korzystając z Lematu 2.
Otrzymujemy wtedy:

$$P_0(AQC) = P_0(AQP) + P_0(APC),$$

$$P_0(QBC) = P_0(QBP) + P_0(PBC).$$

Podstawiając te dane do wzoru (1) mamy

$$P_0(ABC) = P_0(APC) + \underline{P_0(AQP) + P_0(QBP)} + P_0(PBC).$$

Korzystając kolejny raz z Lematu 2, tym razem dla trójkąta *APB* otrzymujemy

$$P_0(APB) = P_0(APQ) + P_0(QBP).$$

Po podstawieniu otrzymujemy

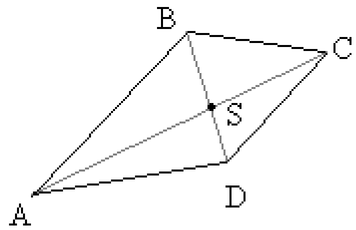
$$P_0(ABC) = P_0(APC) + P_0(QBC) + P_0(PBC),$$

co kończy dowód. $\blacksquare$

LEMAT 4. *Dla dwóch różnych podziałów czworokąta wypukłego ABCD trójkątami*

ABC i CDA oraz ABD, DCB zachodzi następująca równość:

$P_0\,(ABD) + P_0\,(BDC) \;=\; P_0\,(ABC) + P_0\,(ADC).$



DOWÓD: Korzystamy dwukrotnie z Lematu 3 otrzymujemy równości:

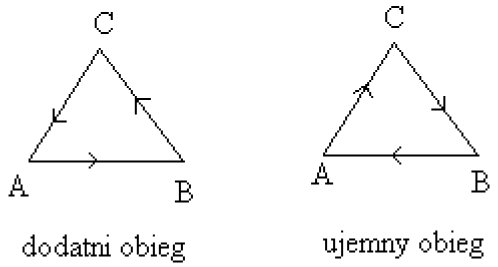
$P_0\,(ABD) + P_0\,(BDC) =$

$= P_0\,(ABS) + P_0\,(BCS) + P_0\,(ADS) + P_0\,(DSC) =$

$= P_0\,(ABC) + P_0\,(ADC).$ ■

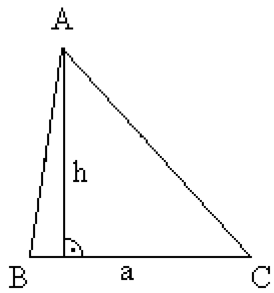
Ponadto do dowodu Lematu 1 potrzebne mam będzie pojęcie <u>obiegu trójkąta</u> i wielkości z nim związanych.

DEFINICJA 4.2. ***Obiegiem ABC*** trójkąta *ABC* nazywamy kierunke poruszania się po obwodzie trójkąta od *A* do *B,* potem do *C* i z powrotem do *A*. Obieg nazywamy ***dodatnim*** gdy jest przeciwny do kierunku ruchu wskazówek zegara, zaś ***ujemnym*** w przeciwnym wypadku.

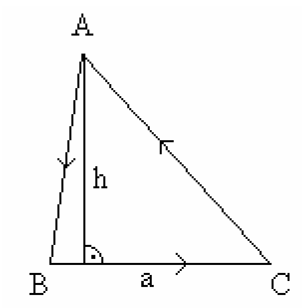


DEFINICJA 4.3. Dla trójkąta *ABC* określamy następujące wielkości:

$$\mathbf{(ABC)} = \begin{cases} \frac{1}{2}ah & \text{gdy obieg } ABC \text{ jest dodatni} \\ -\frac{1}{2}ah & \text{gdy obieg } ABC \text{ jest ujemny} \end{cases}$$



Jeśli punkty *A, B, C* są współliniowe, to nie tworzą one trójkąta i przyjmujemy, że *(ABC) = 0.*



Na rysunku obok *ABC* jest obiegiem dodatnim, zatem wielkość $(ABC) = \frac{1}{2}\,ah.$

Jeżeli zaczniemy poruszać się w przeciwną stronę z punktu *A* to wtedy $(ACB) = -\frac{1}{2}\,ah.$

Pozostałe wielkości takie jak *(BCA), (CAB), (CBA)* itd. różnią się jedynie znakiem i wynoszą $\pm\frac{1}{2}ah$. Zależą jedynie od tego, w którą stronę będziemy się poruszać po obwodzie trójkąta i nie zależą od którego punktu na trójkącie zaczniemy.

LEMAT 5. *Dla trzech niewspółliniowych punktów A, B, C oraz dowolnego punktu O zachodzi równość:* $(ABC) = (OAB) + (OBC) + (OCA)$.

DOWÓD: Dowodząc lemat należy rozważyć wszystkie możliwe położenia punktów *A, B, C, O* oraz posłużyć się Lematami 2, 3 i 4. W każdym z przypadków równość wynika z analizy znaków obiegów poszczególnych trójkątów.

Rozważmy przypadki, zależne od położenia punktu *O*.

1. Gdy punkt *O* leży poza wnętrzem trójkąta *ABC*, w sposób przedstawiony na rysunku to mamy sytuację rozważaną w Lemacie 3

   Otrzymujemy więc równość

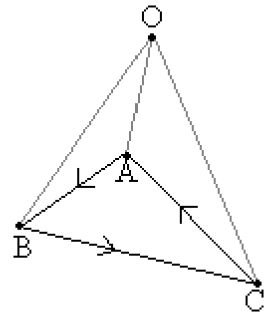
   $P_0(OBC) = P_0(OCA) + P_0(OAB) + P_0(ABC)$.

   Uwzględniając znaki obiegów możemy wyrazić tę równość

   jako $(OBC) = -(OCA) - (OAB) + (ABC)$.

   Po przeniesieniu części wyrazów na drugą stronę otrzymujemy tezę:

   $(ABC) = (OAB) + (OBC) + (OCA)$.



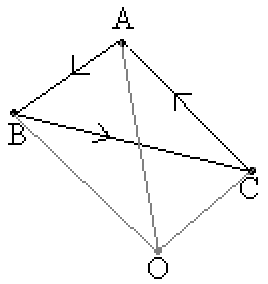
2. Gdy punkt *O* jest w innym położeniu niż w podpunkcie pierwszym, ale poza wnętrzem trójkąta *ABC*.
   Obieg trójkąta *ABC* jest dodatni zatem

   $(ABC) = \frac{1}{2}ah = P_0(ABC)$.

   Obiegi pozostałych trójkątów są równe:

   $(OAB) = P_0(OAB)$, $(OBC) = P_0(OBC)$,

   $(OCA) = -P_0(OCA)$ (obieg ujemny).



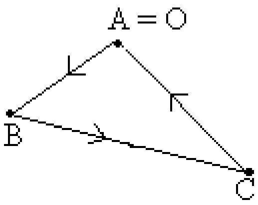
   Równość, którą mamy pokazać sprowadza się do równości

   $P_0(ABC) + P_0(OCA) = P_0(OAB) + P_0(OBC)$.

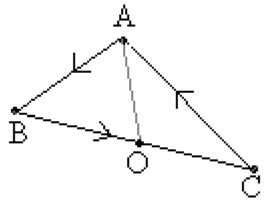
   Równość ta zachodzi na podstawie Lematu 4.

3. Gdy punkt *O* leży wewnątrz trójkąta *ABC* równość wynika wprost z Lematu 3.

4. Gdy punkt O leży na jednym z wierzchołków trójkąta ABC teza zachodzi, bo $(PQR) = 0$ gdy punkty P, Q, R są współliniowe. (rys.1)



rysunek 1



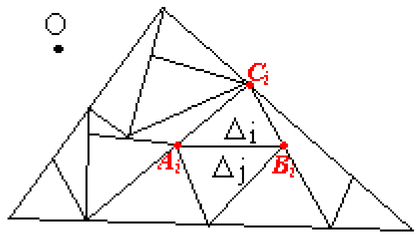
rysunek 2

5. Gdy punkt O leży na jednym z boków trójkąta ABC (rys.2), ale nie na wierzchołku, to teza wynika z Lematu 2 i faktu, że punkt O jest współliniowy z dwoma punktami, będącymi wierzchołkami trójkąta.

Udowodniliśmy wszystkie pomocnicze do dowodu Lematu 1 twierdzenia i lematy. Przechodzimy więc do dowodu Lematu 1.

DOWÓD **LEMATU 1.** Oznaczmy wierzchołki trójkątów Δ_i przez A_i, B_i, C_i tak by wszystkie obiegi $A_i B_i C_i$ były dodatnie. Obierzmy też na płaszczyźnie pewien punkt O. Wiemy, że gdy $(A_i B_i C_i) > 0$ to

$$\sum_i P_o(\Delta_i) = \sum_i (A_iB_iC_i).$$

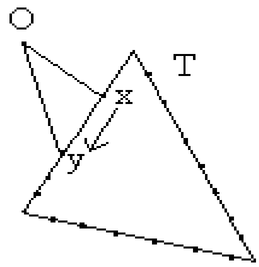


Na podstawie Lematu 5 otrzymujemy:

$$\sum_i (A_iB_iC_i) = \sum_i ((OA_iB_i) + (OB_iC_i) + (OC_iA_i)).$$

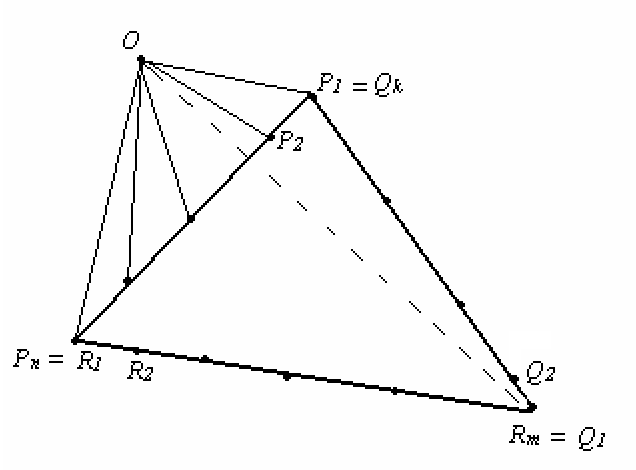
Po prawej stronie równości występują wyłącznie składniki postaci (OXY).
Dla krawędzi XY przechodzącej przez wnętrze T w rozważanej sumie występują dwa składniki pochodzące od trójkątów sąsiadujących z tą krawędzią, mianowicie $(OXY), (OYX)$. Składniki te są do siebie przeciwne więc się zredukują.
Natomiast dla krawędzi XY zawartej w brzegu T w sumie $\sum_i ((OA_iB_i) + (OB_iC_i) + (OC_iA_i))$ występuje tylko jeden składnik (OXY) gdzie kierunek od X do Y jest zgodny z dodatnim obiegiem trójkąta T.
Kontynuując obliczenia otrzymujemy

$$\sum_i P_o(\Delta_i) = \sum_i (OXY)$$



gdzie XY – krawędzie podziału zawarte w brzegu T i takie, że kierunek od X do Y jest zgodny z dodatnim obiegiem T.

Wprowadźmy nowe oznaczenia dla trójkąta T *(patrz rysunek poniżej)*. Skrajne punkty P_n, R_m, Q_k są jednocześnie wierzchołkami A, B, C w rozważanym trójkącie T.



Z Lematu 2 dla trójkąta OP_1P_n otrzymujemy wzór (*):

(*) $P_0(OP_1P_n) = P_0(OP_1P_2) + \ldots + P_0(OP_{n-1}P_n)$.

Ponadto trójkąty OP_iP_{i+1} mają dodatni obieg, zatem

$$P_0(OP_1P_n) = (OP_1P_n) \quad oraz \quad P_0(OP_iP_{i+1}) = (OP_iP_{i+1}).$$

Po podstawieniu do wzoru (*) otrzymujemy, że

$$(OP_1P_n) = P_0(OP_1P_2)+\ldots+ P_0(OP_{n-1}P_n) = (OP_1P_2)+\ldots+(OP_{n-1}P_n).$$

Podobne wartości otrzymujemy, gdy podzielimy trójkąty OR_1R_m, OQ_1Q_k,

$(OR_1R_n) = P_0(OR_1R_2)+\ldots+ P_0(OR_{n-1}R_n) = (OR_1R_2)+\ldots+(OR_{n-1}R_n)$,

$(OQ_1Q_n) = P_0(OQ_1Q_2)+\ldots+ P_0(OQ_{n-1}Q_n) = (OQ_1Q_2)+\ldots+(OQ_{n-1}Q_n)$.

Podstawiając otrzymane wielkości do $\sum_i (OXY)$ mamy,

$$\sum_i P_o(\Delta_i) = \sum_i (OXY) = \sum_{i=1}^{n-1} (OP_iP_{i+1}) + \sum_{j=1}^{m-1} (OR_jR_{j+1}) + \sum_{l=1}^{k-1} (OQ_lQ_{l+1}) =$$

$$= (OP_1P_n) + (OR_1R_m) + (OQ_1Q_k) = (OCA) + (OAB) + (OBC).$$

Korzystając z Lematu 5 otrzymujemy:

$$(OAB) + (OBC) + (OCA) = (ABC) = P_0(ABC) = P_0(T).$$

Zatem ostatecznie $\sum_i P_o(\Delta_i) = P_0(T)$

Co kończy dowód Lematu 1. ■

Przeprowadzone rozumowanie daje nam pewność, że konstrukcja funkcji P_0 jest jednoznaczna. Zajmiemy się teraz badaniem własności tak zdefiniowanej funkcji P_0.

Przypomnijmy definicję funkcji P_0 :

1) Jeśli T jest trójkątem o podstawie a i wysokości h to $P_0(T) = \frac{1}{2}ah$

2) Jeśli W jest figurą wielokątną będącą sumą nie zachodzących na siebie trójkątów $T_1, \ldots, T_k$ *to* $P_0(W) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_k)$.

TWIERDZENIE 4.1. *Funkcja* P_0 *spełnia aksjomaty pola.*

DOWÓD: Pokażemy, że aksjomaty pola są spełnione:

- **Aksjomat jednostki**

Weźmy kwadrat jednostkowy K_0, podzielmy go na dwa trójkąty prostokątne, przystające T_1, T_2, które mają wtedy podstawę i wysokość długości 1.

Zatem $P_0(K_0) = P_0(T_1) + P_0(T_2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$ ■

- **Aksjomat monotoniczności**

Dane są dwa wielokąty W_1, W_2. Niech $W_1 \subseteq W_2$.

a) Jeżeli $W_1 = W_2$ to wtedy $P_0(W_1) = P_0(W_2)$ i teza aksjomatu zachodzi.

b) Jeżeli zaś $W_1 \subset W_2$ i $W_1 \neq W_2$ wtedy istnieją trójkąty $\Delta_1 \ldots \Delta_k$ niezachodzące na siebie i na W_1, takie że: $W_2 = W_1 \cup \Delta_1 \cup \ldots \cup \Delta_k$

Wielokąt W_1 dzielimy na trójkąty $T_1, \ldots, T_n$ niezachodzące na siebie.
Otrzymujemy wtedy:

$$P_0(W_1) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n),$$
$$P_0(W_2) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n) + P(\Delta_1) + \ldots + P(\Delta_k).$$

Ponieważ $P_0(\Delta_i) = \frac{1}{2} a_i h_i > 0$ więc $\sum_{i=1} P_0(\Delta_i) > 0$,

co daje, że $P_0(W_1) < P_0(W_2)$. ■

- **Aksjomat sumy**

Wielokąty W_1, W_2 możemy podzielić na rozłączne trójkąty $T_1, \ldots, T_n$ i $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ odpowiednio. Wtedy,

$$P_0(W_1) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n),\ P_0(W_2) = P_0(\Delta_1) + \ldots + P_0(\Delta_k),$$

oraz

$$P_0(W_1 \cup W_2) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n) + P(\Delta_1) + \ldots + P(\Delta_k).$$

Stąd już widać, że $P_0(W_1) + P_0(W_2) = P_0(W_1 \cup W_2)$. ■

- **Aksjomat przystawania**

Dane są dwa przystające wielokąty W_1, W_2, które dzielimy na rozłączne trójkąty $T_1, \ldots, T_n$ i $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ odpowiednio, tak by $T_1 \equiv \Delta_1, \ldots, T_n \equiv \Delta_n$.

Wtedy $P_0(T_i) = \frac{1}{2} a_i h_i = P_0(\Delta i)$.

Zatem otrzymujemy szukaną równość

$$P_0(W_1) = P_0(T_1) + \ldots + P_0(T_n) = P_0(\Delta_1) + \ldots + P_0(\Delta_n) = P_0(W_2).$$ ■

WNIOSEK 4.1. Aksjomaty pola są niesprzeczne.

Ponieważ powyższe rozumowania pokazują, że istnieje efektywnie skonstruowana funkcja P_0 spełniająca wszystkie cztery aksjomaty pola.

TWIERDZENIE 4.2. *Teoria pola oparta na aksjomatach sumy, jednostki, przystawania i monotoniczności jest zupełna.*

Zupełność wynika stąd, że cztery aksjomaty teorii pola jednoznacznie wyznaczają pole każdej figury wielokątnej. Dowolną figurę wielokątną możemy podzielić na niezachodzące na siebie trójkąty, których wzór na pole jest wyznaczony i wynosi połowę iloczynu długości wysokości i boku, na który dana wysokość spada. wyznaczone jest jednoznacznie. Zupełność teorii pola oznacza, że nie znajdziemy takich stwierdzeń dotyczących teorii pola, których wartość logiczna jest nam nieznana. Każde twierdzenie jest albo prawdziwe, albo fałszywe w tej teorii, a jego wartość logiczną możemy zweryfikować obliczając pole.

UWAGA 4.1. Zupełność teorii można też udowodnić za pomocą modeli tej teorii. Teoria jest zupełna jeśli każde dwa modele tej teorii są izomorficzne czyli nie różnią się od siebie w istotny sposób. W przypadku teorii pola dla figur wielokątnych zupełność wynika z faktu, że nie ma innej funkcji spełniającej aksjomaty niż przedstawiona funkcja P_0. Gdyby była inna funkcja, wówczas nie spełniała by aksjomatów z których jednoznacznie wynika wzór na pole trójkąta, który tym samym określa pole całej figury, jako wielokąta złożonego z trójkątów.

ROZDZIAŁ 5

Aksjomaty i modele geometrii euklidesowej płaszczyzny

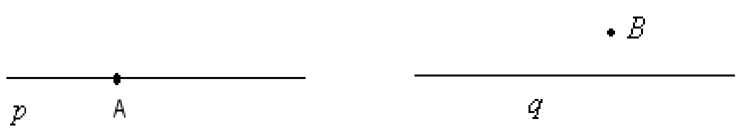
Od czasów Euklidesa geometria była prototypem dyscypliny zaksjomatyzowanej. W trzecim wieku przed naszą erą powstały „Elementy”, nieporównywalne dzieło systematycznej, dedukcyjnej myśli greckiej przedstawiające w 13 księgach ówczesny stan geometrii i arytmetyki. Treści geometrycznych ksiąg Elementów do XIX wieku służyły jako podręcznik do nauki geometrii w wielu europejskich szkołach. Książka doczekała się niezliczonej ilości wydań i przez przeszło 2 tysiące lat była powszechnie uważana za wzorcowe dzieło pod względem ścisłości i jasności wykładu geometrii. Samego Euklidesa uważa się za tego, który jako pierwszy podjął trud zestawienia ówczesnej wiedzy o geometrii w aksjomatyczno-dedukcyjnym systemie. Treści przedstawione w „Elementach” na przestrzeni lat były wnikliwie badane i nieco modyfikowane, gdyż odkryto, że zawierają pewne luki, które uniemożliwiały dowody niektórych twierdzeń. Jednak poprawienie układu pojęć pierwotnych i aksjomatów geometrii Euklidesa, tak by możliwy był dowód niesprzeczności, okazał się wielkim wyzwaniem dla matematyków niemożliwym do zrealizowania przez ponad dwa tysiące lat. Dopiero w XIX wieku badania zakończono sukcesem. W 1899 roku niemiecki matematyk David Hilbert (1862 - 1943) w dziele „Grundlagen der Geometrie” podał dokładny układ pojęć pierwotnych i aksjomatów geometrii Euklidesa i przeprowadził pełny dowód niesprzeczności tego układu.

Omówimy szczegółowo układ aksjomatów geometrii euklidesowej zaproponowany przez Hilberta i spróbujemy znaleźć różne modele geometrii, które spełniają przynajmniej niektóre aksjomaty.

5.1. AKSJOMATY GEOMETRII EUKLIDESOWEJ WEDŁUG DAVIDA HILBERTA, 1899r.

<u>I. Pojęcia pierwotne.</u>

1. punkt,
2. prosta,
3. relacja należenia (dla par punkt – prosta), oznaczana symbolem $\in$,



relacja zachodzi - $A \in p$ relacja nie zachodzi $B \notin q$

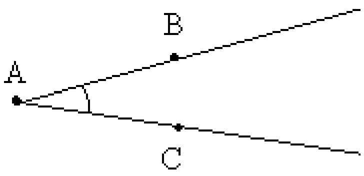
4. relacja porządku dla punktów z dowolnej prostej p, oznaczana symbolem $\langle_p$,

(dla każdej prostej p możemy określić też drugą relację porządku przeciwną do pierwszej relacji)

5. miara odcinków, oznaczana symbolem *m*,
6. miara kątów, oznaczana symbolem μ .

Inne pojęcia pojawiające się w treści aksjomatów są zdefiniowane za pomocą pojęć pierwotnych. Jednocześnie przyjmuje się zasadę nie korzystania z innych pojęć, tak długo jak nie zdefiniuje się ich za pomocą pojęć pierwotnych lub pojęć poprzednio zdefiniowanych. Oto niektóre definicje nowych pojęć:

- dla różnych punktów *A, B* należących do prostej p ***odcinkiem AB*** nazywamy zbiór złożony z punktów *A* i *B* oraz wszystkich punktów *C* takich, że $A \langle_p C \langle_p B$ lub $B \langle_p C \langle_p A$;
- ***półprostą*** o początku A nazywamy każdy zbiór postaci $\{A\} \cup \{X \in p : A \langle_p X\}$ lub postaci $\{A\} \cup \{X \in p : X \langle_p A\}$, gdzie *p* jest dowolną prostą zawierającą punkt *A*;
- ***kąt*** to dwie półproste o wspólnym początku nie leżące na jednej prostej;
Kąt *ABC* jest to kąt utworzony z półprostych *AB* i *AC* o wspólnym początku w punkcie *A*.



- ***półpłaszczyzną*** ograniczoną prostą *p* jest każdy zbiór postaci $\{Y : Y \in p\} \cup \{C\} \cup \{X : CX \cap p = \emptyset\}$, gdzie *C* jest dowolnym punktem nie należącym do *p*.

II. Aksjomaty incydencji.

Słowo „incydencja" będziemy wiązali z parą złożoną z punktu i prostej. Jest to relacja, która oznacza „leży na" lub „przechodzi przez". Wyróżniamy trzy aksjomaty incydencji:

I1. Dla dowolnych różnych punktów *A* i *B* istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez te punkty.

Można też powiedzieć: *Każde dwa punkt są incydentne z jedną jedyną prostą.*

I2. Na każdej prostej leżą przynajmniej *2* punkty.

I3. Istnieją *3* punkty nie należące na jednej prostej.

III. Aksjomaty porządku.

Dla punktów z dowolnej prostej *p* relacja $\langle_p$ jest relacją liniowego porządku, to znaczy:

a) Jeśli $A \langle_p B$ to $A \neq B$;

b) Jeśli $A \in p$, $B \in p$ i $A \neq B$ to zachodzi dokładnie jedna z relacji $A \langle_p B$, $B \langle_p A$;

c) Jeśli $A \langle_p B$ i $B \langle_p C$ to $A \langle_p C$;

P2. (aksjomat Moritza Pascha)

Dla dowolnych niewspółliniowych punktów *A, B, C* oraz dowolnej prostej *p* nie przechodzącej przez żaden z punktów *A, B, C* jeśli *p* przecina odcinek *AB* to przecina też dokładnie jeden spośród odcinków *BC* i *AC*.

IV. Aksjomaty miary odcinków.

Dla każdego odcinka AB miara $m(AB)$ jest liczbą dodatnią.

M2. Dla każdej półprostej r o początku w A i dla dowolnej liczby dodatniej d istnieje punkt $B \in r$ taki, że $m(AB) = d$.

M3. Jeśli $A \langle_p B \langle_p C$ to $m(AB) + (BC) = m(AC)$.

V. Aksjomaty miary kątów.

K1. Dla każdego kąta rs (utworzonego z półprostych r i s o wspólnym początku) miara μ (rs) jest liczbą z otwartego przedziału $(0, \pi)$.

K2. Dla dowolnej prostej p, dowolnej półpłaszczyzny Ω ograniczonej przez p, dowolnej półprostej r zawartej w p i dowolnej liczby $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje półprosta s zawarta w Ω tworząca wraz z r kąt rs taki, że μ $(rs) = \alpha$.

K3. Niech A, B, C i A', B', C' będą dwoma trójkami niewspółliniowych punktów. Dla trójki punktów A, B, C rozważmy dwie półproste AB i AC o początku w punkcie A i przechodzące przez punkty B i C odpowiednio. Podobnie dla trójki punktów A', B', C'. Analogicznie w pozostałych przypadkach.

Jeśli $m(AB) = m(A'B')$, $m(AC) = m(A'C')$ i μ $(BAC) = \mu$ $(B'A'C')$

to μ $(ABC) = \mu$ $(A'B'C')$.

VI. Aksjomat równoległości.

R. Jeśli punkt A nie leży na prostej p, to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca p.

5.2. MODELE GEOMETRII OPARTEJ NA AKSJOMATYACH GEOMETRII EUKLIDESOWEJ WEDŁUG DAVIDA HILBERTA

Rozważmy teorię będącą fragmentem geometrii euklidesowej, czyli teorię opartą na wybranych aksjomatach i pojęciach pierwotnych. Tworzenie modeli i sprawdzanie czy spełnione są aksjomaty jest analogiczne jak w przypadku teorii opartej na wszystkich aksjomatach geometrii. Przykładem takiej teorii jest teoria incydencji.

TEORIA INCYDENCJI

Pojęcia pierwotne teorii incydencji, to:

1. punkt
2. prosta
3. relacja należenia.

Aksjomatami tej teorii są aksjomaty incydencji i aksjomat równoległości R.

I1. Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez te punkty

Na każdej prostej leżą przynajmniej *2* punkty.

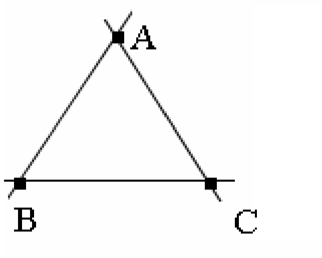
Istnieją *3* punkty nie należące na jednej prostej.

R. Jeśli punkt *A* nie leży na prostej *p*, to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez *A* i nie przecinająca *p*.

RZYKŁAD 5.1.

Rozważmy model teorii incydencji przedstawiony na rysunku. Pogrubione kropki reprezentują punkty, natomiast linie reprezentują proste. Relacja należenia odpowiada leżeniu kropki na linii.

Sprawdzamy, czy spełnione są aksjomaty teorii incydencji:



I1 – dla dowolnych dwóch punktów (kropek) istnieje dokładnie jedna prosta (linia) przechodząca przez te punkty; Zatem aksjomat I1 jest spełniony.

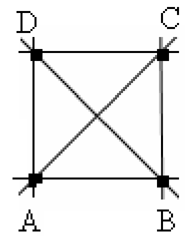
I2 – jest spełniony, ponieważ na każdej prostej leżą dwa punkty;

I3 – zachodzi w modelu, ponieważ istnieją trzy różne punkty np. *A, B, C* nie należące do jednej prostej;

R – nie jest spełniony, ponieważ nie istnieje prosta rozłączna *A* i z prostą, na której leży punkt *A*;

PRZYKŁAD 5.2. Model geometrii spełniający aksjomaty teorii incydencji.

Analogicznie jak w przykładzie 5.1 kropki oznaczają punkty, linie to proste, a relacja należenia odpowiada leżeniu kropki na linii.
Zauważmy, że proste BD i AC w naszym modelu nie przecinają się, ponieważ żadna z „kropek" nie leży na obu z nich.
Sprawdzamy, czy spełnione są aksjomaty teorii incydencji:



Aksjomaty I1, I2, I3 są spełnione (argumentacja jak w przykładzie 5.1).

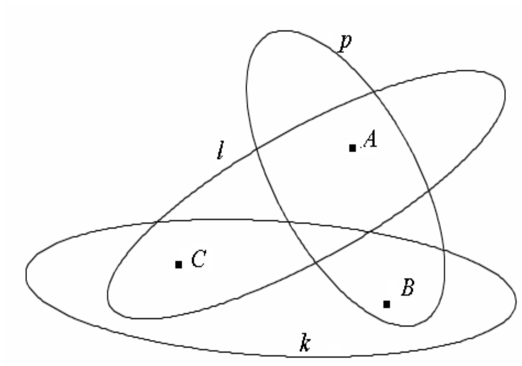
R – jest spełniony, co nietrudno sprawdzić, że dla każdego punktu *A* nie leżącego na zadanej prostej, istnieje tylko jedna prosta przechodząca przez *A* i rozłączna z zadaną prostą.

Zauważmy, że wystarczy rozpatrzyć przypadki dla punktu *A*, ponieważ pozostałe są symetryczne. Dla punktu *A* i prostej *DB* z nim rozłącznej jedyną prostą spełniającą aksjomat równoległości jest prosta *AC*. Natomiast dla prostej *DC* jest nią prosta *AB*, a dla prostej *CB* jest to prosta *AD*. Wymienione trzy proste są jedynymi prostymi rozłącznymi z punktem A, zatem aksjomat równoległości jest spełniony.

Model geometrii euklidesowej, czyli teorii opartej na aksjomatach i pojęciach pierwotnych opisanych w podrozdziale 5.1, to dowolny układ, w którym nadany jest precyzyjny sens wszystkim pojęciom pierwotnym. Podamy przykład bardzo prostego modelu geometrii euklidesowej, który nie będzie właściwie oddawał zjawisk z geometrii euklidesowej, co przejawi się w szczególności tym, że nie wszystkie aksjomaty teorii będą w tym modelu spełnione.

PRZYKŁAD 5.3.

1. **Opis modelu.**



Dany jest model, jak na rysunku, w którym:

- punkty - w modelu to kropki A, B, C.
- proste – pętelki l, k, p;
- relacja należenia zachodzi gdy punkt leży na prostej, czyli gdy kropka jest wewnątrz pętelki, a nie zachodzi gdy kropka jest poza pętelką;

Na przykład: $B \in p$, $C \in l$, $A \in l$, ale $B \notin l$;

- relacja porządku: $A \langle_l C$, $A \langle_p B$ *oraz* $C \langle_k B$;
- odcinek w rozważanym modelu to:

$AB = \{A; B\} \cup \{X : A \langle_p X \langle_p B\}$,

$AC = \{A; C\} \cup \{X : A \langle_l X \langle_l C\}$ oraz $CB = \{C; B\} \cup \{X : C \langle_k X \langle_k B\}$;

Zauważmy, że zbiór $\{X : A \langle_p X \langle_p B\}$ jest zbiorem pustym, ponieważ pomiędzy punktami A i B nie ma żadnych punktów. Analogicznie zbiory $\{X : A \langle_l X \langle_l C\}$ i $\{X : C \langle_k X \langle_k B\}$ są zbiorami pustymi. Mamy więc trzy odcinki w modelu, z których każdy jest zbiorem dwuelementowym.

- odcinki w modelu mają następujące miary: $m(AB) = 1$, $m(AC) = \frac{1}{3}$, $m(BC) = \frac{1}{2}$;
- wyróżniamy 12 półprostych;

Na przykład półproste o początku w punkcie A zawarte w prostej l to: $\{A\} \cup \{X \in l : X \langle_l A\} = \{A\}$ *oraz* $\{A\} \cup \{X \in l : A \langle_l X\} = \{AC\}$.

Widzimy zatem, że półprosta w naszym modelu może być zbiorem jednopunktowym lub zbiorem dwupunktowym. Wydaje się to sprzeczne z obrazem półprostej, jaki znaliśmy do tej pory. Jednak jest to tylko potwierdzenie faktu, że każda teoria może mieć wiele modeli, a tym samym, istnieje wiele różnych przedstawień półprostych.

- miary wszystkich kątów wynoszą $\frac{\pi}{2}$.

2. **Aksjomaty w modelu.**

- Aksjomaty incydencji są spełnione w modelu. Wynika to wprost z rysunku modelu.
- Podobnie z rysunku wynika, że aksjomat porządku P1 jest spełniony.
- Aksjomat P2 – nigdy nie są spełnione założenia Aksjomatu Pascha, bo każda prosta przechodzi przez, któryś z punktów zatem P2 jest spełniony.
- Miary odcinków są dodatnie, zatem M1 zachodzi.
- Aksjomat M2 nie zachodzi, ponieważ dla półprostej *{A,C}* o początku w *A* i każdej liczby dodatniej $d \neq \frac{1}{3}$ nie istnieje taki punkt *P* z półprostej *{A,C}*, że $m(AP) = d$.
- Aksjomat M3 jest spełniony, ponieważ w rozważanym modelu nie występują trzy różne punkty leżące na jednej prostej.
- Aksjomat miary kątów K1 zachodzi, ponieważ miary kątów wynoszą $\frac{\pi}{2}$.
- Odkładanie kąta o zadanej mierze po ustalonej stronie zadanej półprostej nie jest możliwe dla kątów o mierze różnej niż $\frac{\pi}{2}$. Zatem aksjomat K2 nie zachodzi.
- Miary wszystkich kątów są ustalone i wynoszą $\frac{\pi}{2}$. Zatem miary kątów występujących w aksjomacie K3 mogą wynosić tylko $\frac{\pi}{2}$, a więc teza aksjomatu zachodzi.
- Aksjomat równoległości nie jest spełniony w modelu. Dla punktu *A* i prostej *k*, nie istnieje prosta rozłączna z *k* i przechodząca przez *A*.

Opisany model geometrii nie spełnia wszystkich aksjomatów geometrii euklidesowej. Rozważając inne modele geometrii euklidesowej możemy w analogiczny sposób sprawdzić, czy spełniają wszystkie aksjomaty czy też nie. Ponadto możemy próbować wskazać konkretną interpretacje pojęć pierwotnych, tak by były spełnione wszystkie lub tylko wskazane aksjomaty.

MODEL ARYTMETYCZNY HILBERTA I DOWÓD NIESPRZECZNOŚCI AKSJOMATYKI GEOMETRII EUKLIDESA.

Najważniejszym zagadnieniem dotyczącym układu aksjomatów geometrii jest zagadnienie jego niesprzeczności. Aby dowieść niesprzeczności układu aksjomatów, interpretuje się w pewien sposób jego pojęcia pierwotne i wykazuje, że przy tej interpretacji spełnione są wszystkie aksjomaty. Innymi słowy, wskazuje się model spełniający wszystkie aksjomaty.

Pojęcia pierwotne w modelu Hilberta

Podamy interpretację pojęć pierwotnych oraz uzupełnimy ten opis komentarzami niezbędnymi w dalszym posługiwaniu się wymienionymi pojęciami w modelu.

Punkt - para liczb rzeczywistych (x, y).
Liczby x i y będziemy nazywać współrzędnymi punktu (x, y).
Zbiór wszystkich par (x, y) tworzy płaszczyznę oznaczaną symbolem R^2.

Prosta – podzbiór R^2 złożony z takich par (x, y), które spełniają ustalone równanie postaci $Ax + By + C = 0$, gdzie $(A,B) \neq (0,0)$.

Wyróżniamy dwa typy prostych o równaniu $Ax + By + C = 0$.

1. Gdy $B = 0$ wówczas po przekształceniu równania prostej $Ax + C = 0$ otrzymujemy $x = a$ gdzie a – pewna stała.
   Proste określone równaniem postaci $x = a$ składają się z punktów o współrzędnych (a, y) *gdzie* $y \in R$. Dla różnych wartości y_1, y_2 otrzymujemy różne punkty $(a, y_1) \neq (a, y_2)$.

2. Gdy $B \neq 0$ równanie prostej $Ax + By + C$ sprowadza się do równania $y = ax + b$. Dwa punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) z prostej są różne gdy $x_1 \neq x_2$.

FAKT 5.1. Punkty należące do prostej p o równaniu $Ax + By + C = 0$ mają postać $(x_0 + tB, y_0 - tA)$ dla pewnego $t \in R$, gdzie (x_0, y_0) jest zadanym punktem z prostej.

W zależności od parametru B równanie prostej p i współrzędne punktów z prostej p możemy zmodyfikować do następujących postaci:

1) dla $B = 0$ równanie prostej p jest postaci $Ax + C = 0$ natomiast punkty spełniające równanie to $\left(\frac{-C}{A}, y_0 + t \right)$;

2) dla $B \neq 0$ równanie prostej p przyjmuje postać $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ gdzie punkty należące do prostej są postaci $\left(x_0 + t, y_0 - \frac{A}{B}t \right)$.

DOWÓD: Po podstawieniu współrzędnych postaci $(x_0 + tB, y_0 - tA)$ do równania prostej p otrzymujemy

$$A(x_0 + tB) + B(y_0 - tA) + C = Ax_0 + tAB + By_0 - tAB + C = 0$$

Zatem dowolny punkt o współrzędnych $(x_0 + tB, y_0 - tA)$ spełnia równanie prostej. Należy jeszcze pokazać, że każdy punkt z prostej możemy zapisać w rozważanej postaci. W dowodzie rozważymy dwie postaci prostej w zależności od parametru B.

Punkty z prostej typu $Ax + C = 0$ mają współrzędne $\left(\frac{-C}{A}, y\right)$ czyli są to po prostu punkty postaci $\left(\frac{-C}{A}, y_0 + t\right)$;

Dla prostych typu $\frac{A}{B}x + y + \frac{C}{B} = 0$ mamy, że dla każdego $x = x_0 + t$ równanie przybiera postać $\frac{A}{B}x_0 + \frac{A}{B}t + y + \frac{C}{B} = 0$. Zatem aby punkty (x, y) spełniały równanie to $y = y_0 - \frac{A}{B}t$ co kończy dowód. ■

FAKT 5.2. Dwa równania $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ i $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ wyznaczają tę samą prostą, czyli ten sam zbiór par (x,y) jest ich rozwiązaniem, gdy ich współczynniki są proporcjonalne.
Proporcjonalność współczynników oznacza: $a_1 = ta_2$, $b_1 = t\,b_2$, $c_1 = tc_2$ dla pewnej rzeczywistej wartości $t \neq 0$.

DOWÓD: Dane są dwie proste l i p o równaniach $a_1x+b_1y+c_1 = 0$ i $a_2x+b_2y+c_2 = 0$ odpowiednio o współczynnikach spełniających warunek $a_1 = ta_2$, $b_1 = tb_2$, $c_1 = tc_2$ gdzie t rzeczywista stała różna od zera. Po podstawieniu za a_1, b_1, c_1 wyżej wymienionych wartości do równania prostej l otrzymujemy:
$a_1x+b_1y+c_1 = ta_2x + tb_2y + tc_2 = t(a_2x + b_2y + c_2) = 0$
Ponieważ $t \neq 0$ zatem $a_2x + b_2y + c_2 = 0$.
Wyszliśmy z równania prostej l i po przekształceniach otrzymaliśmy równanie prostej p, zatem proste p i l są tą sama prostą. ■

Relacja należenia – Leżenie punktu na prostej oznacza po prostu należenie w sensie dosłownym. Dodatkowym sposobem interpretacji należenia jest spełnienie przez punkt (x_1, y_1) równania prostej $ax + by + c = 0$.

Relacja porządku – Relację porządku $\langle_p$ na prostej p określamy w następujący sposób: $(x_1, y_1) \langle_p (x_2, y_2)$ gdy $x_1 < x_2$ lub $(x_1 = x_2$ i $y_1 < y_2)$.

Miara odcinka – Dane są dwa punkty $P=(x_1, y_1)$, $Q=(x_2, y_2)$.
Miarę odcinka PQ określa wzór:

$$m(PQ) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

Kąt – to dwie półproste o wspólnym początku, nie leżące na jednej prostej. Niech *P=*(x_1, y_1) będzie wierzchołkiem kąta, natomiast *Q=*(x_2, y_2), *R=*(x_3, y_3) będą punktami na ramionach kąta.

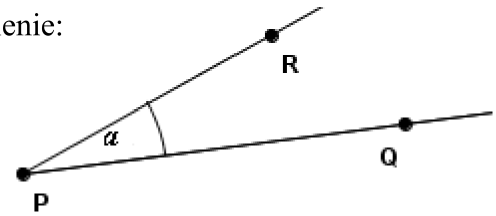
Miara kąta – Miarę kąta wyznaczonego przez dwie półproste określamy jako:

(Wzór 5.1) $\mu\ (\alpha) = arccos\left(\dfrac{\langle PQ \circ PR\rangle}{m(PQ)\cdot m(PR)}\right)$

gdzie $\langle PQ \circ PR\rangle = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1) + (y_2 - y_1)(y_3 - y_1)$.

Miara kąta μ o wierzchołku w punkcie *P* nie zależy od wyboru punktów *Q* i *R* na półprostych będących ramionami kąta.

Uzasadnienie:

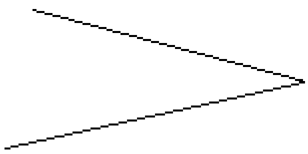


Prosta o równaniu $Ax + By + C = 0$ zawiera punkty $P = (x_1, y_1)$, $R = (x_1 + tB, y_1 - tA)$ *gdzie* $t \in R$. Natomiast punkty P i Q leżące na prostej $A`x + B`y + C` = 0$ mają współrzędne równe odpowiednio $(x_1, y_1)$ *i* $(x_1 + sB`, y_1 - sA`)$ gdzie $s \in R$.
Po podstawieniu współrzędnych punktów *P, R, Q* do *wzoru 5.1* otrzymujemy:

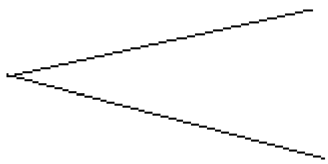
$$\mu\ (\alpha) = \arccos\frac{(x_1 + tB - x_1)(x_1 + sB` - x_1) + (y_1 - tA - y_1)(y_1 - sA` - y_1)}{\sqrt{(tA)^2 + (tB)^2}\sqrt{(sA`)^2 + (sB`)^2}} = \arccos\frac{tsBB` + tsAA`}{|t||s|\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A`^2 + B`^2}}$$

$$\mu\ (\alpha) = \arccos\frac{ts(BB` + AA`)}{|ts|\sqrt{A^2 + B^2}\sqrt{A`^2 + B`^2}}.$$

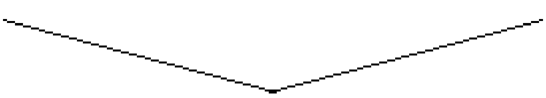
Do rozważenia mamy cztery przypadki w zależności od znaku parametrów *t* i *s,* które określają z jakimi półprostymi mamy do czynienia. Dla *t* i *s* tego samego znaku czyli dla półprostych typu:

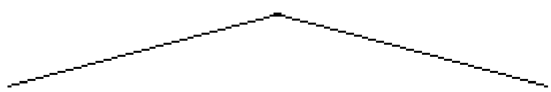


lub



Współczynniki *t* i *s,* które określają konkretne punkty na półprostych we wzorze zredukują się zatem miara kąta nie zależy od wyboru punktów na prostych tworzących kąt. Podobnie dla półprostych typu:





lub

Wtedy współczynniki t i s są różnego znaku, a znak wyrażenia $\frac{ts(BB`+AA`)}{|ts|\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A`^2+B`^2}}$ po opuszczeniu wartości bezwzględnych nie zmieni się, a współczynniki zredukują się. Zatem $\mu\ (\alpha) = \arccos\frac{-(BB`+AA`)}{\sqrt{A^2+B^2}\sqrt{A`^2+B`^2}}$.

SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW GEOMETRII EUKLIDESOWEJ

Model arytmetyczny według Hilberta spełnia wszystkie aksjomaty geometrii euklidesowej. Uzasadnienia tych aksjomatów, które przytoczymy poniżej dają dostateczny obraz charakteru całego dowodu niesprzeczności, dlatego też w dowodzie pominiemy uzasadnienie tych aksjomatów, w których przeprowadzenie rozumowania wiąże się z żmudnymi i obszernymi rozważaniami.

Aksjomaty incydencji

I1- Istnieje dokładnie jedna prosta p przechodząca przez dwa różne punkty $P=(x_1, y_1)$ i $Q=(x_2, y_2)$.

Dowód istnienia

Zauważmy, że gdy $x_1 = x_2 = a$ to punkty P i Q leżą na prostej o równaniu $x = a$.

Natomiast prosta p wyraża się równaniem $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) \quad gdy\ x_1 \neq x_2$.

Dowód jedyności

Załóżmy, że istnieją dwie różne proste p *i* $p`$ przechodzące przez punkty P, Q

$$p:\quad Ax + By + C = 0$$
$$p`:\quad A`x + B`y + C` = 0$$

Oznacza to, że układ równań

$$\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A`x + B`y + C` = 0 \end{cases}$$

ma dwa różne rozwiązania $P=(x_1, y_1)$ i $Q=(x_2, y_2)$.

Ponieważ jest więcej niż jedno rozwiązanie, to wyznacznik główny $\begin{vmatrix} A & B \\ A` & B` \end{vmatrix} = 0$.

Stąd wynika, że $A`$ *i* $B`$ są proporcjonalne do A i B odpowiednio, czyli $A` = tA$, $B` = tB$ dla pewnego $t \in R$. Punkt $P=(x_1, y_1)$ leży na prostej p i $p`$ zatem spełnione są równości:

$$C = -Ax_1 - By_1 \text{ oraz } C` = -A`x_1 - B`y_1.$$

Podstawiamy za współczynniki $A`$, $B`$ obliczone wartości:

$$C` = - tAx_1 – tBy_1 = t(-Ax_1 - By_1) = tC.$$

Otrzymaliśmy, że współczynniki $A`$, $B`$, $C`$ są proporcjonalne do A, B, C, czyli reprezentują tę samą prostą. Zatem pokazaliśmy, że nie ma dwóch różnych prostych przechodzących przez zadane punkty. Gdyby istniały trzy lub więcej różnych prostych przechodzących przez P i Q, wówczas byłyby parami różne, co jak wyżej wykazaliśmy jest niemożliwe. Dowodzi to istnienia tylko jednej prostej zawierającej dwa różne punkty.

I2 – Każde równanie $Ax + By + C = 0$ ma przynajmniej dwie różne pary rozwiązań.
Dla prostych postaci $x = a$ są to na przykład punkty $(a, 0)$ i $(a, 1)$.
Dla prostych postaci $y = ax + b$ szukane punkty to np. $(0, b)$ i $(1, a+b)$.

I3 – Rozważmy trzy różne punkty $(0, 1)$, $(1, 0)$ oraz $(0, 0)$. Punkty $(0 ,0)$ i $(0, 1)$ leżą na prostej o równaniu $x=0$ natomiast punkt $(1, 0)$ nie spełnia równania prostej zatem leży poza nią.

Aksjomaty porządku

P1 – Własności opisane w pierwszym aksjomacie porządku zachodzą, ponieważ zachodzą dla liczb rzeczywistych ze zwykłą nierównością.

a) Dane są dwa różne punkty $P=(x_1, y_1)$ i $R=(x_2, y_2)$. $P \langle_p R$ to znaczy, że $x_1 < x_2$ lub $(x_1 = x_2$ i $y_1 < y_2)$. Zatem $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$.

b) Dla różnych punktów $P=(x_1, y_1)$ i $R=(x_2, y_2)$ spełniony jest jeden z warunków:
   1. $x_1 \neq x_2$ wtedy jeśli $x_1 < x_2$ to $P \langle_p R$ lub jeśli $x_2 < x_1$ to $R \langle_p P$
   2. $x_1 = x_2$ i $y_1 \neq y_2$ wtedy jeśli $y_1 < y_2$ to $P \langle_p R$ lub jeśli $y_2 < y_1$ to $R \langle_p P$

   Innych relacji porządku nie ma. Zatem w każdym z przypadków albo $P \langle_p R$ albo $R \langle_p P$. Jednocześnie nie może zachodzić $y_1 < y_2$ i $y_2 < y_1$ dla $y_1 \neq y_2$.

c) Dla różnych punktów $P=(x_1, y_1)$, $R=(x_2, y_2)$ i $Q=(x_3, y_3)$ jeśli $P \langle_p R$ i $R \langle_p Q$ to $P \langle_p Q$.

   Dla prostej $y = ax + b$ $P \langle_p R$ oznacza, że $x_1 < x_2$ natomiast $R \langle_p Q$ oznacza, że $x_2 < x_3$ zatem $x_1 < x_2 < x_3$ co daje, że $x_1 < x_3$ czyli $P \langle_p Q$.
   Dla prostej postaci $x = a$ $P \langle_p R$ oznacza, że $y_1 < y_2$, a $R \langle_p Q$ mamy, że $y_2 < y_3$
   Ostatecznie otrzymujemy: $y_1 < y_2 < y_3$ stąd $y_1 < y_3$ czyli $P \langle_p Q$.

P2 – Uzasadnienie, że ten aksjomat jest w modelu spełniony pomijamy.

Aksjomaty miary odcinków

M1 – Miarę odcinka o początku w punkcie P i końcu w punkcie Q określa wzór:

$$m(PQ) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} \quad .$$

Dla różnych par (x_1, y_1), (x_2, y_2) podana wielkość jest dodatnia.

M2 – Rozważmy prostą p o równaniu $Ax + By + C = 0$ oraz punkt $P = (x_0, y_0)$. Pokażemy, że dla dowolnego $d \in R$ istnieje punkt Q na prostej p, taki że $m(PQ) = d$. Punkt Q reprezentowany jest przez parę $(x_0 + tB, y_0 - tA)$, gdzie t uzależnione jest od długości odcinka PQ. Rozwiązujemy równanie: $m(PQ) = d$.

$$m(PQ) = \sqrt{(x_0 + tB - x_0)^2 + (y_0 - tA - y_0)^2} = \sqrt{(tB)^2 + (tA)^2} = |t|\sqrt{A^2 + B^2} = d$$

Zatem $$t = \pm \frac{d}{\sqrt{A^2 + B^2}} .$$

Czyli istnieją dwa rozwiązania, dla których odcinek o początku w P zawarty w prostej p, przyjmuje długość d,

$$Q_1 = \left(x_0 + \frac{dB}{\sqrt{A^2 + B^2}}, y_0 - \frac{dA}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right)$$

lub

$$Q_2 = \left(x_0 - \frac{dB}{\sqrt{A^2 + B^2}}, y_0 + \frac{dA}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right).$$

M3 – Dane są trzy punkty $P \langle_p Q \langle_p R$. Na podstawie Faktu 5.1 przyjmujemy, że

- dla $B = 0$ punkty są postaci:

$P = \left(\frac{-C}{A}, y_0 \right)$, Q $= \left(\frac{-C}{A}, y_0 + t \right)$, R $= \left(\frac{-C}{A}, y_0 + s \right)$ gdzie $0 < t < s$.

Wtedy $m(PR) = s$, $m(PQ) = t$, $m(QR) = s - t$,

zatem $m(PQ) + m(QR) = t + s - t = s = m(PR)$.

- dla $B \neq 0$

P $= (x_0, y_0)$, Q $= \left(x_0 + t, y_0 - \frac{A}{B}t \right)$, R $= \left(x_0 + s, y_0 - \frac{A}{B}s \right)$ gdzie $0 < t < s$.

Zatem $m(PR) = s\sqrt{1+\left(\frac{A}{B}\right)^2}$ $m(PQ) = t\sqrt{1+\left(\frac{A}{B}\right)^2}$ $m(QR) = (s-t)\sqrt{1+\left(\frac{A}{B}\right)^2}$.

Otrzymane wielkości spełniają $m(PQ) + m(QR) = m(PR)$ co kończy dowod. ■

Aksjomaty miary kątów

K1 – Wartości funkcji *arccos* są z przedziału $(0, \pi)$.
K2 – K3 - Uzasadnienie pomijamy.

Aksjomat równoległości

Dany jest punkt $M = (x_0, y_0)$ oraz prosta $p: Ax + By + C = 0$ nie zawierająca punktu M.
Szukamy prostej $m:\ A`x + B`y + C` = 0,$ takiej że :

1) $M \in m$ czyli $Ax_0 + B y_0 + C = 0$

2) p *i* m nie przecinają się, czyli układ $\begin{cases} Ax + By + C = 0 \\ A`x + B`y + C` = 0 \end{cases}$ nie ma rozwiązań.

Układ jest sprzeczny, gdy zachodzi jeden z warunków:

a) $\begin{vmatrix} A & B \\ A` & B` \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} A & C \\ A` & C` \end{vmatrix} \neq 0$

b) $\begin{vmatrix} A & B \\ A` & B` \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} C & B \\ C` & B` \end{vmatrix} \neq 0$

Otrzymujemy, że $A` = tA,\ B` = tB$ oraz $C` \neq tC$ *gdzie* $t \in R$.
Podstawiając podane wartości $A`$ i $B`$ do równania prostej m: $A`x + B`y + C` = 0$ mamy, że

$$tAx + tBy + C` = 0$$

stąd

$$C` = - t(Ax + By)$$

ponieważ punkt M należy do prostej m, zatem

$$C` = - t(Ax_0 + By_0)$$

Należy sprawdzić, że $C` \neq tC$, czyli $C \neq - (Ax_0 + By_0)$.
Punkt $M = (x_0, y_0)$ nie należy do prostej p czyli $Ax_0 + By_0 + C \neq 0$
zatem rzeczywiście $C \neq - (Ax_0 + By_0)$.
Pokazaliśmy, że istnieje prosta m , zawierająca punkt M i rozłączna z prostą p.
Należy jeszcze wykazać, że taka prosta jest jedyna.
Załóżmy, że istnieją dwie różne proste m i l, przechodzące przez punkt $M = (x_0, y_0)$ oraz rozłączne z prostą p.
Wówczas:

$m: A`x + B`y + C` = 0$ *i* $(x_0, y_0) \in m$
$l: A``x + B``y + C`` = 0$ *i* $(x_0, y_0) \in l.$

Zatem

$$\begin{cases} A`x + B`y + C` = 0 \\ A``x + B``y + C`` = 0 \end{cases}$$

ma przynajmniej jedno rozwiązanie (x_0, y_0). Z drugiej strony, ponieważ zakładamy, że proste m *i l* są różne, to (x_0, y_0) jest jedynym rozwiązaniem tego układu.
Zachodzi więc następujący warunek:

$$\begin{vmatrix} A` & B` \\ A`` & B`` \end{vmatrix} \neq 0 \text{ czyli } A'B'' \neq A''B'$$

Jednak z wcześniejszych obliczeń otrzymaliśmy, że $A` = tA$ *oraz* $B` = tB$ *dla* $t \in R$.
Analogicznie obliczamy, że dla pewnej stałej $s \in R$ $A`` = sA$ *oraz* $B`` = sB$.
Ostatecznie uzyskujemy sprzeczność, ponieważ dokonując podstawienia do $A'B'' \neq A''B'$ wartości wyżej wymienionych otrzymujemy, że $tAsB \neq sAtB$.

Podane rozważanie dowodzi jedyności prostej *m* zawierającej punkt *M* i rozłącznej z prostą *p*.

ROZDZIAŁ 6

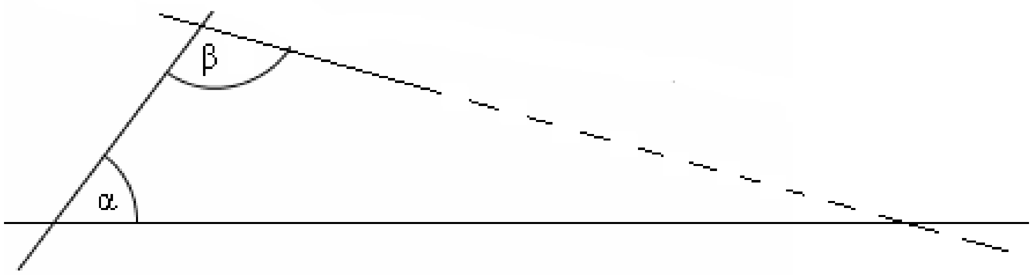
Dzieje aksjomatu równoległości
Początki nowej geometrii – geometrii nieeuklidesowej

6.1. V POSTULAT EUKLIDESA

„Elementy” napisane przez Euklidesa to najdonioślejsze dzieło świata. Pierwszy dedukcyjny wykład geometrii w historii matematyki. Wszystkie twierdzenia w nim zawarte zostały wyprowadzone zgodnie z regułami logiki na podstawie przyjętych pojęć pierwotnych i aksjomatów.

Aksjomaty podane przez Euklidesa przez dwa tysiąclecia stanowiły podstawę budowy geometrii. Sama zaś geometria była najpewniejszą wiedzą jaką zdobył człowiek, była najsolidniej zbudowaną gałęzią matematyki, na której wyrosło wiele innych. Jednak pewne treści zawarte w „Elementach” budziły wśród niektórych matematyków wątpliwości i na przestrzeni wielu lat były przedmiotem wnikliwych badań. Szczególnie żywe zainteresowanie budziło zagadnienie, czy do zbudowania geometrii euklidesowej potrzebny jest V postulat Euklidesa zwany aksjomatem równoległości.

V postulat Euklidesa



Jeśli dwie proste tworzą z trzecią prosta po ustalonej stronie kąty wewnętrzne α i β o sumie mniejszej niż dwa kąty proste, to te dwie proste przecinają się po tej samej stronie trzeciej prostej.

Dziś aksjomat równoległości znany jest w postaci zaproponowanej przez Johna Playfaira w 1785roku:

Jeśli punkt A nie leży na prostej p, to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca p.

Ciekawą cechą tego aksjomatu jest to, że mówi o całej rozciągłości linii prostej. Wszystkie pozostałe aksjomaty geometrii euklidesowej dotyczą skończonych części linii prostych i figur płaskich o skończonych rozmiarach. Fakt, że aksjomat równoległości nie jest sprawdzalny przez doświadczenie nasuwało pytanie o jego

niezależność od pozostałych aksjomatów. Podejrzewano, że można go wyprowadzić z pozostałych aksjomatów, ponieważ nie miał on narzucającej się oczywistości, którą powinien mieć każdy aksjomat geometrii.
Przez przeszło dwa tysiące lat wielu wybitnych matematyków próbowało udowodnić, że V postulat jest logiczną konsekwencją pozostałych aksjomatów i stwierdzeń z nich wynikających, a więc bez szkody dla teorii może być pominięty. W wyniku tego procesu powstała obszerna i interesująca literatura często pełna błędów logicznych, ale również ciekawych pomysłów i rozwiązań. Wnioski do jakich doszli niektórzy uczeni zaskoczyły nawet ich samych i doprowadziły do powstania nowych geometrii.

6.2. BADANIA DOTYCZĄCE V POSTULATU

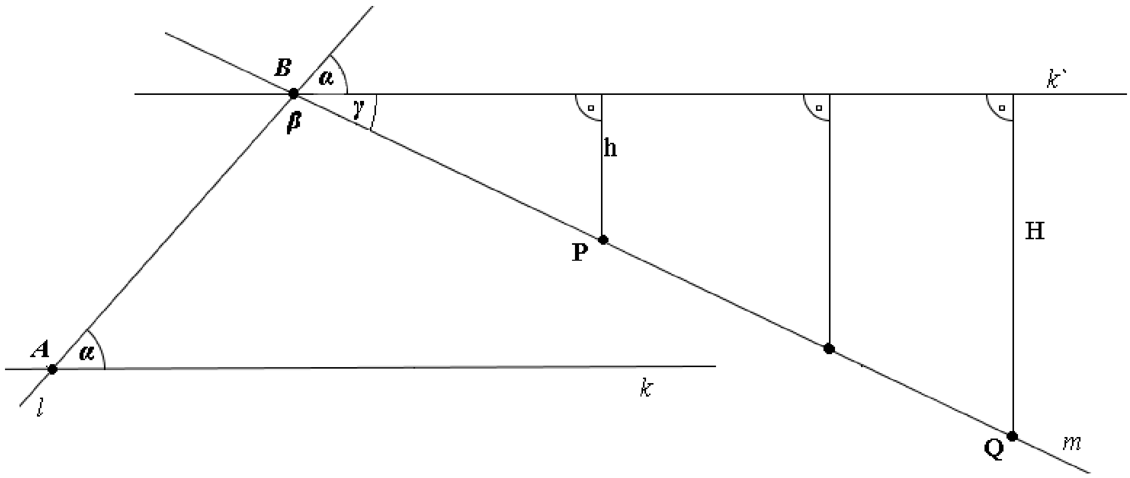
Próby dowodu V postulatu za pomocą pozostałych aksjomatów podjęli:

- w starożytności Greccy uczeni :
  sam Euklides (3 wiek p.n.e)
  Proklos (410 - 4 85 n.e)
  Heron z Aleksandrii (1 wiek p.n.e)
- w średniowieczu Arabowie:
  Nasir Din at Tusi (XIIw.)
  Omar Chajjam (1038 - 1123)
- w XVII wieku i później Europejczycy
  Girolamo Saccheri (1667-1733)
  Johann Lambert (1678-1777)
  Andrien Legendre (1752-1833)
  Nikołaj Łobaczewski (1792-1856)

Proklos był jednym z wielu, który próbował wyprowadzić aksjomat równoległości z pozostałych aksjomatów. Napisał „Komentarz do I księgi Elementów Euklidesa”. W swojej pracy poddał analizie dzieło Euklidesa i stwierdził, że liczba słów potrzebna na wysłowienie V-go postulatu jest prawie tak duża, jak liczba słów potrzebna do wysłowienia pierwszych czterech. Przeczy to zasadzie, że aksjomaty mają wyrażać proste i zwięzłe prawdy. Na tej podstawie wywnioskował, że Euklides chciał początkowo wyrzucić piąty aksjomat z listy swoich aksjomatów, udowadniając go za pomocą pierwszych czterech. Argument ten potwierdza faktem, że pierwszych 28 twierdzeń „Elementów” autor udowadnia bez użycia V postulatu. Takie rozumowanie zachęciło Proklosa do podjęcia próby przeprowadzenia dowodu V postulatu.

6.2.1.Dowód Proklosa

Niech proste k i m przecięte prostą l spełniają założenia V postulatu, czyli niech suma kątów α i β będzie mniejsza od dwóch kątów prostych. Prosta $k`$ (jak na rysunku) dla której odpowiednia suma kątów jest równa dwóm kątom prostym, nie przecina prostej $k$. Jest tak, ponieważ figura złożona z prostych $k$, $k`$ ma środek symetrii (środek odcinka AB).Gdyby więc k i $k`$ miały punkt wspólny, to miałyby drugi (symetryczny obraz pierwszego), a to jest niemożliwe. Następnie rzutujemy prostokątnie punkty prostej *m* na prostą *k`* - uzyskujemy w ten sposób trójkąty prostokątne, przy czym wraz z oddalaniem się rzutowanego punktu rośnie nieograniczenie przyprostokątna leżąca naprzeciw kąta γ. Dla pewnego punktu *Q* osiąga ona długość *H* większą od odległości prostych *k* i *k`*. Leży zatem po przeciwnej stronie prostej *k*, niż punkt *B*. Wobec tego prosta *m* gdzieś miedzy *B* i *Q* przecina *k*, co należało pokazać.



Dowód ten zawiera jednak błąd, który jest w użyciu sformułowania „odległość prostej *k'* od punktów prostej *k*". Stwierdzenie, że dystans pomiędzy *k* i *k`* jest ograniczony rzeczywiście jest prawdziwe na płaszczyźnie euklidesowej jednak jest ono konsekwencją piątego postulatu, i nie można go dowieść z pozostałych czterech aksjomatów. Zatem Proklos stwierdził jedynie, że istnienie maksimum odległości między punktami prostej *k'* od prostej *k* jest równoważne aksjomatowi równoległości.

6.2.2. Dowód Legendre'a

PROBLEM: Ile wynosi suma kątów w trójkącie?

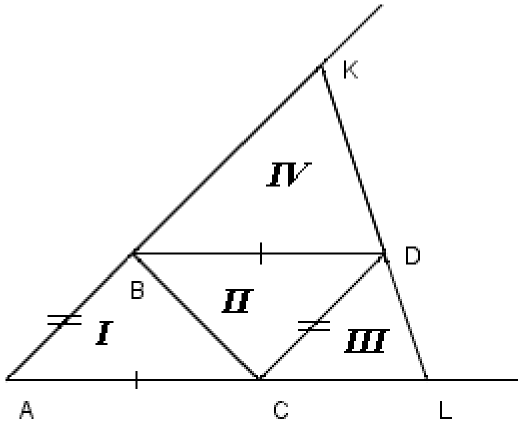
Nazwijmy różnicę pomiędzy π a sumą kątów trójkąta ***defektem trójkąta***.
Wprowadźmy oznaczenia: $D(\Delta)$ – defekt trójkąta, $S(\Delta)$ – suma kątów w trójkącie, zatem $D(\Delta) = \pi - S(\Delta)$.

Legendre starał się wykazać, że zarówno przypuszczenie, że suma kątów trójkąta jest większa od 180^0 jak przypuszczenie, że jest mniejsza od 180^0, prowadzi do sprzeczności. Rozumowania, które przeprowadził doprowadziły go do ciekawych wniosków i stwierdzeń.

- Legendre udowodnił bez użycia V postulatu, że suma kątów w trójkącie $S(\Delta)$ jest nie większa niż 180^0.
- Pokazał, że z faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi 180^0 , czyli defekt trójkąta równy jest zero, wynika aksjomat równoległości.
- Próbował wykazać, bez użycia V postulatu, że suma kątów w każdym

trójkącie wynosi *180^0,* co jak dziś wiemy nie jest możliwe.

Dowód nie wprost Legendre`a, że suma kątów w trójkącie wynosi 180^0.



Przyjmijmy, że suma kątów trójkąta *ABC* równa się $180^0 - \alpha$. Niech kąt *A* będzie ostry. Zbudujmy, przy odcinku *BC* trójkąt *BCD* przystający do trójkąta *ABC* w ten sposób, aby odcinki jednakowo zakreślone na rysunku były równe. Następnie poprowadźmy przez punkt *D* prosta przecinającą ramiona kąta *A i* oznaczmy punkty przecięcia ramion przez *K* i *L*. Otrzymaliśmy cztery trójkąty *I*, *II, III, IV.* Suma kątów każdego z trójkątów *I* i *II* równa się $180^0 - \alpha$, zaś suma kątów każdego z trójkątów *III* i *IV* jest równa co najwyżej 180^0. Dodajmy kąty wszystkich czterech trójkątów.
Otrzymamy sumę równą co najwyżej

$$(180^0 - \alpha) + (180^0 - \alpha) + 180^0 + 180^0 \leq 720^0 - 2\alpha.$$

Suma ta skład się z kątów *A, K, L* oraz trzech kątów półpełnych przy wierzchołkach *B, C, D,* jest więc równa

$$\angle A + \angle K + \angle L + 3 \cdot 180^0.$$

Uzyskujemy nierówność

$$\angle A + \angle K + \angle L + 3 \cdot 180^0 \leq 720^0 - 2\alpha.$$

A więc suma kątów trójkąta *AKL* jest co najwyżej równa $180^0 - 2\alpha$.
Postępując z trójkątem *AKL* tak samo, jak przed chwilą z trójkątem *ABC*, uzyskamy trójkąt AK_1L_1 o sumie kątów co najwyżej $180^0 - 4\alpha$. Powtarzając te czynności wiele razy w pewnym momencie otrzymalibyśmy trójkąt o ujemnej sumie kątów, bo któraś z liczb 2α, 4α, 8α, 16α, 32α ,… przekroczy 180^0.
Doszliśmy zatem do sprzeczności. Oznacza to, że suma kątów żadnego trójkąta nie może być mniejsza od 180^0. Wiemy też, że suma kątów w trójkącie nie może być większa od 180^0 zatem wynosi 180^0. Natomiast faktu, że suma kątów w trójkącie wynosi 180^0 wynika aksjomat równoległości. Przeprowadzony dowód pokazuje więc, że V postulat jest stwierdzeniem wyprowadzonym z czterech aksjomatów Euklidesa.

BŁĄD W DOWODZIE:

W dowodzie Legendre opiera się na twierdzeniu „przez każdy punkt wewnętrzny kąta przechodzi prosta, która przecina oba ramiona kąta". Stwierdzenie to wydawało się Legendre'owi tak oczywiste, że nawet nie zadał sobie trudu by wcześniej go dowieść.

Okazuje się jednak, że tego „oczywistego” faktu nie sposób wyprowadzić bez użycia aksjomatu równoległości. Zatem autor nie doszedł do sprzeczności, czyli nie podał dowodu zależności V postulatu od pozostałych aksjomatów.

6.2.3. Stwierdzenia z których wynika V postulat.

Niepowodzenia w dowodzie aksjomatu równoległości miały zazwyczaj tę samą przyczynę. Powstawał dowód uważany przez autora za poprawny, w który po pewnym czasie okazywało się, że korzysta się ze stwierdzenia, którego niezależność od V postulatu jest wątpliwa. Pisano więc, że jeśli ta „wątpliwa” przesłanka jest konsekwencją pierwszych czterech aksjomatów, to V postulat też. Okazywało się jednak, że wszystkie te przesłanki były konsekwencją aksjomatu równoległości, i w rezultacie, każdy przeprowadzony dowód dostarczał jedynie kolejne zdanie, do coraz to dłuższej listy zdań równoważnych V postulatowi. Dowód Proklosa rozpoczął tę listę zdaniem ”odległość punktów prostej rozłącznej od innej prostej jest ograniczona”, natomiast Legendre dopisał kolejne „suma kątów w trójkącie wynosi π”.

.Każde z następujących zdań jest równoważne aksjomatowi równoległości:

- W każdym trójkącie suma rozwartości kątów jest równa π.
- Istnieje trójkąt, w którym suma rozwartości kątów jest równa π.
- Istnieje prostokąt.
- Przez każdy punkt wewnątrz obszaru kąta wypukłego przechodzi prosta przecinająca oba ramiona.
- Odległość pomiędzy nie przecinającymi się prostym jest stała.
- Istnieją trójkąty podobne, ale nie przystające.
- Wszystkie proste prostopadłe do jednego ramienia kąta ostrego przecinają drugie ramię.

UWAGA 6.1. Układ aksjomatów, w którym V postulat zastąpimy którymkolwiek z powyższych stwierdzeń będzie układem równoważnym z wyjściowym układem aksjomatów geometrii euklidesowej.

6.3. PRÓBY BUDOWANIA TEORII GEOMETRII BEZ V POSTULATU - GEOMETRIA ABSOLUTNA

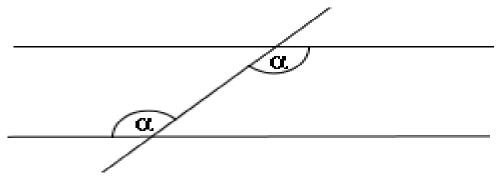
Ciągłe niepowodzenia w dowodzie V postulatu, które jedynie dostarczały kolejnych zdań mu równoważnych, stały się przyczyną, że część badaczy zrezygnowała z próby dowodu na rzecz rozwijania teorii bez aksjomatu równoległości. Dział geometrii oparty na wszystkich aksjomatach geometrii euklidesowej poza aksjomatem równoległości, nazywamy używając współczesnej terminologii *geometrią absolutną*. Zatem w skład geometrii absolutnej wchodzą następujące aksjomaty:

$$\left.\begin{array}{c} \textit{aksjomaty incydencji}\\ \textit{aksjomaty porzadku}\\ \textit{aksjomaty miary odcinka}\\ \textit{oksjomaty miary kata} \end{array}\right\} \textit{geometria absolutna}$$

Geometria absolutna uzupełniona o aksjomat równoległości tworzy znaną nam geometrię euklidesową.

geometria absolutna + aksjomat równoległości = geometria euklidesowa

Wielu matematyków podejmowało trud tworzenia geometrii bez *V* postulatu, w późniejszym czasie nazwanej geometrią absolutną. Sam Euklides twierdzenia *I* księgi „Elementów" ułożył w takim porządku, aby jak najbardziej odwlec stosowanie *V* postulatu, mimo że wiedział, że wcześniejsze powołanie się na aksjomat równoległości uprościłoby niektóre dowody. Przyświecała mu myśl metodyczna, by ugruntować tę część wiedzy, która powstała bez odwoływania się do *V* postulatu. Początkowe ustępy książki traktują o przystawaniu trójkątów, o trójkącie równoramiennym, o prowadzeniu prostopadłych, o tym, że kąt zewnętrzny trójkąta jest większy od każdego z kątów wewnętrznych doń przyległych, oraz o niektórych własnościach trójkątów, jak np. że suma dwóch boków trójkąta jest większa od trzeciego. W kolejnym ustępie, w dalszym ciągu nie odwołując się do aksjomatu równoległości, pokazuje jak budować proste, które nie mają punktów wspólnych, czyli proste równoległe. V postulat Euklides wykorzystuje dopiero w uzasadnieniu twierdzenia: Jeżeli dwie proste są równoległe, to prosta, która je przecina, tworzy z nimi kąty naprzemianległe wewnętrzne równe (patrz rysunek).



Legendre rozwijając geometrię absolutną idzie dalej niż Euklides i pokazuje, że suma kątów w trójkącie wynosi co najwyżej π. Zatem w geometrii absolutnej defekt trójkąta jest wielkością większą lub równą zeru. Niestety geometria absolutna jest tylko niewielka częścią geometrii euklidesowej. Na jej gruncie nigdy nie udało się udowodnić wielu twierdzeń, takich jak:

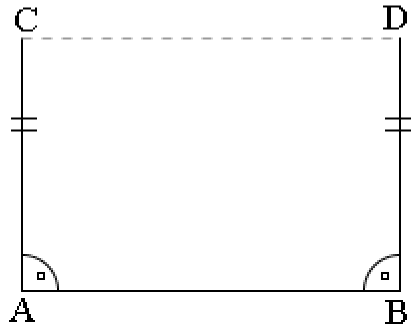
- na trójkącie można opisać okrąg;
- każde dwie nie przecinające się proste mają wspólną prostopadłą;
- twierdzenie o kątach wpisanych i środkowych;
- twierdzenie Pitagorasa.

Dopiero w późniejszym okresie okazało się, że wymienionych twierdzeń nie można udowodnić bez użycia V postulatu, czyli są to twierdzenia geometrii euklidesowej nie należące do geometrii absolutnej.

Również dużo później pokazano, że porównywanie defektu trójkąta wskazuje z jaką geometrią mamy do czynienia. Jeżeli *$D(\Delta)=0$* to zachodzą stwierdzenia geometrii absolutnej i aksjomat równoległości, czyli prawdziwe są twierdzenia geometrii euklidesowej. Natomiast jeśli defekt trójkąta $D(\Delta)>0$ to *V* postulat nie jest spełniony, i prawdziwe są jedynie stwierdzenia geometrii absolutnej.

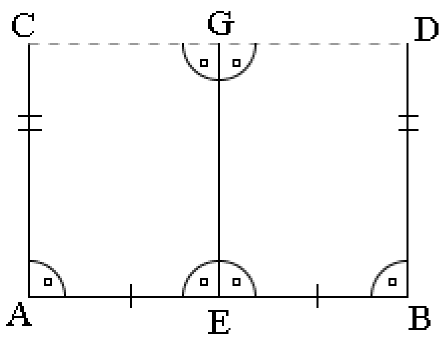
6.5. PRÓBY DOWODZENIA V POSTULATU METODĄ NIE WPROST

Matematyk włoski G. Saccheri i matematyk szwajcarski J. H. Lambert konsekwentnie rozwijali dział geometrii, który obywa się bez postulatu równoległości, nazwany *geometrią absolutną*. Próbowali udowodnić aksjomat równoległości zaprzeczając jednemu ze stwierdzeń, z których ten aksjomat wynika. Ewentualne dojście do sprzeczności byłoby dowodem świadczącym, że aksjomat równoległości jest twierdzeniem geometrii absolutnej, gdyż jego zaprzeczenie jest z geometrią absolutną sprzeczne. Saccheri w tym celu posłużył się czworokątami.



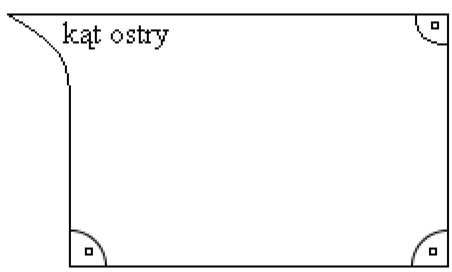
W IX wieku matematycy arabscy przeprowadzili dowód, że *V* postulat wynika z istnienia prostokąta, natomiast dowód istnienia prostokąta, oczywiście bez użycia V postulatu, nie został przeprowadzony. Saccheri uznał to za lukę i postanowił zaprzeczając istnieniu prostokąta dojść do sprzeczności i tym samym być pierwszym, który udowodni aksjomat równoległości. W 1733 roku zostało wydane jego dzieło „Euklides ze wszelkiej zmazy oczyszczony”, w którym przeprowadził błędny dowód *V* postulatu.

Rozpatrzył czworokąt *ABCD*, w którym $\angle A = \angle B = 90^0$ oraz $AC = BD$



Następnie połowi odcinek *AB* punktem *E* i wystawił prostopadłą do *AB* przedłużając ją do przecięcia się w punkcie *G* z odcinkiem *CD*. Tak otrzymał przystające czworokąty *AEGC* i *BEGD*.
Dla dowodu istnienia prostokąta autor musiał dowieść, że $\angle C = \angle D$ jest prosty.
Saccheri zaprzecza istnieniu prostokąta. Przyjął, że kąt *C* jest ostry i z tego założenia, uzyskał 32 twierdzenia nowej geometrii i ogłosił znalezienie sprzeczności. Miało to być stwierdzenie, że istnieją proste asymptotyczne tj. zbliżające się do siebie nieograniczenie, ale nie przecinające się. Według Saccheriego przeczyło to samej istocie linii prostej. Dlatego też ogłosił znalezienie sprzeczności. Jednak Saccheri uzyskał sprzeczność z intuicją, a nie sprzeczność natury logicznej, której szukamy dowodząc niewprost.

Lambert obrał podobną drogę co Saccheri. Jako zaprzeczenia V postulatu użył tak zwaną „hipotezę kąta ostrego” mówiącą, że czworokąt mający trzy kąty proste ma czwarty kąt ostry. Rozważał więc czworokąt, który jest połową



czworokąta Saccheriego. Jednak Lambert nie dążył do znalezienia sprzeczności w rozważanej teorii, jego celem było znalezienie możliwie wielu stwierdzeń wynikających z przyjętych założeń. Cel ten osiągnął, to znaczy wyprowadził wiele dziwnych stwierdzeń i nigdy nie uzyskał sprzeczności logicznej.
Saccheriemu jak i Lambertowi nie udało się dowieść zależności aksjomatu równoległości od pozostałych aksjomatów układu. Nie mniej jednak badając konsekwencje logiczne zaprzeczenia postulatu równoległości obydwaj ci matematycy nieświadomie wkroczyli na drogę, która doprowadziła do odkrycia nowej geometrii tak zwanej *geometrii nieeuklidesowej*.

6.6. V POSTULAT A DOŚWIADCZENIE

Dotychczasowe rozważania czy aksjomat równoległości jest zbędny w budowie geometrii, czy też może być wyprowadzony z innych aksjomatów, były natury logicznej. Odnosiły się do logicznej struktury geometrii. Oczywiście żaden z matematyków nie wątpił w prawdziwości V postulatu, o czym świadczy fakt, że przez jego zaprzeczenie spodziewali się dojść do sprzeczności. Dopiero w XIX wieku niemiecki matematyk Gauss zadał pytanie o prawdziwość aksjomatu równoległości. Chciał sprawdzić, czy punkty i proste, z którymi ma do czynienia miernictwo spełniają V postulat. W tym celu postanowił posłużyć się stwierdzeniem o sumie kątów w trójkącie. Stwierdził, że należy zmierzyć sumę kątów możliwie wielkiego trójkąta i jeżeli okaże się, że ta suma wynosi 180^0, to tym samym pokażemy prawdziwość V postulatu Euklidesa w przestrzeni, w której żyjemy.
Trójkąt wytyczony przez Gaussa miał boki kilkudziesięciokilometrowej długości, a wierzchołkami były szczyty górskie. Autor przedsięwzięcia świadomie wybrał trójkąt o możliwie długich bokach, spodziewając się, że im większy trójkąt tym większy defekt można potencjalnie uzyskać, co wynikało z rozważań Legendre'a. Bardzo precyzyjnie zmierzył kąty i okazało się, że niestety odstępstwo sumy miary kątów od 180^0 leży w granicach nieuniknionych błędów pomiarowych i nie zostało rozstrzygnięte ile wynosi suma kątów w trójkącie. Niepowodzenie przedsięwzięcia Gaussa było do przewidzenia, ponieważ zachodzi następujące stwierdzenie:

Defekt trójkąta równa się sumie defektów trójkątów, z których się składa.

Jeżeli założymy, że defekt trójkąta o wierzchołkach wyznaczonych przez Słońce, Ziemię i Mars wynosi 1^0 to przy podziale na mniejsze trójkąty, takie jak badał Gauss, otrzymamy defekty mikroskopijnej wielkości, których nie sposób wyznaczyć żadnymi przyrządami. W praktyce oznacza to, że trójkąty dostępne na ziemi mają defekty równe zeru, tym samym obowiązuje V postulat Euklidesa ze wszystkimi swymi konsekwencjami. Natomiast defekty mniej mikroskopijne mogą występować w trójkątach, z którymi ma do czynienia astronomia. Największe trójkąty, które możemy badać mają boki długości około $80 \cdot 10^{12}$ kilometrów i służą do wyznaczania paralaks gwiazd stałych. Niestety trójkąty większe od paralaktycznych nie są dostępne badaniu przez znane nam środki i przyrządy, dlatego zagadnienie czy defekty ogromnych trójkątów są różne od zera, czy też nie, nie zostało rozstrzygnięte bezpośrednimi pomiarami. Należy się więc liczyć z możliwością tego, że suma kątów trójkąta równa się z ogromną dokładnością 180^0 w stosunkach ziemskich, a nawet w stosunkach układu słonecznego, ale może być mniejsza od 180^0 w trójkątach o rozmiarach „kosmicznych".

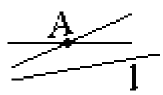
Jeżeli zatem nie jest wykluczone istnienie trójkątów o defekcie większym od zera powstaje pytanie jakie mają własności. Jaką postać przybierają twierdzenia dotyczące trójkątów Euklidesowych, gdy rozważamy trójkąty o sumie kątów mniejszej niż 180^0. Jak obliczać pola takich trójkątów? I wiele innych pytań.

6.7. POCZATKI GEOMETRII NIEEUKLIDESOWEJ

Właśnie poprzez zauważenie, że mogą istnieć trójkąty inne od euklidesowych, czyli o niezerowym defekcie, Gauss jako pierwszy odkrył istnienie nowej geometrii, w której aksjomat równoległości nie jest prawdziwy. Niestety swoich osiągnięć nigdy nie opublikował. Obawiał się krytyki, jaką mogły wywołać idee tak bardzo odbiegające od ogólnie przyjętych. Przypuszczenia i obawy Gaussa okazały się nie bezpodstawne kiedy to dwójka matematyków Łobaczewski i Bolyai niezależnie od siebie opublikowała prace postulujące istnienie geometrii nieeuklidesowej. Mikołaj Łobaczewski sądził na początku, że aksjomat równoległości wynika z pozostałych aksjomatów i zaczął budować geometrię która w miejsce tego aksjomatu przyjmowała przeciwny. W ten sposób, jak wielu innych matematyków, chciał dojść do sprzeczności, czyli udowodnić aksjomat równoległości. Jednak Łobaczewski podobnie jak Lambert nie natknął się na sprzeczność, ale tym różni się od wcześniejszych uczonych, że opublikował odkrycie nowej geometrii. Środowisko naukowe przyjęło prace Łobaczewskiego za dziwactwa i patologie naukowe. Jednak zarówno Łobaczewski jak i Boylai byli pewni poprawności logicznej nowej geometrii, którą świat docenił dopiero po śmierci ich twórców. Ponieważ praca Łobaczewskiego ukazała się kilka lat wcześniej nową geometrię nazwano geometrią Łobaczewskiego.

Geometria nieeuklidesowa różni się od geometrii euklidesowej tylko tym, że odrzuca V postulat, a przyjmuje jego zaprzeczenie. Obejmuje więc wszystkie stwierdzenia geometrii absolutnej, które brzmią w niej tak samo jak w geometrii euklidesowej. Ponadto zwiera wiele ciekawych i odmiennych stwierdzeń, które wynikają z zaprzeczenia aksjomatu równoległości. Są to znane już nam stwierdzenia, że suma kątów trójkącie jest mniejsza od 180^0 lub, że nie istnieje prostokąt, (ponieważ z faktu istnienia prostokąta wynika V postulat).

Podsumowując dotychchczasową wiedzę o geometrii otrzymujemy:

 **GEOMETRIA EUKLIDESOWA**	**Aksjomaty geometrii absolutniej +** **„Przez punkt nie leżący na prostej można poprowadzić tylko jedną prostą do niej równoległą”**		
GEOMETRIE NIEEUKLIDESOWE	**geometria Łobaczewskiego**	**Aksjomaty geometrii absolutniej +** **„Przez punkt nie leżący na prostej l można poprowadzić co najmniej dwie różne proste rozłączne do niej”.**	

By udowodnić, że geometrie nie zawierają sprzeczności wystarczy wskazać model spełniający wszystkie jej aksjomaty. Model arytmetyczny Hilberta wskazuje, że geometria euklidesowa jest niesprzeczna. W następnych rozdziałach skryptu omówimy model spełniający aksjomaty geometrii Łobaczewskiego, natomiast w kolejnym podrozdziale zacytujemy bajkę o geometrii nieeuklidesowej napisaną przez Wojciecha Bieńko w książce dla najmłodszych matematyków pod tytułem „Zygzakiem przez matematykę”. Książka ta napisana została z myślą o uczniach gimnazjum, zatem śmiem twierdzić, że tym bardziej treści w niej zawarte będą dostępne czytelnikowi tego skryptu. Przedstawiona bajka w bardzo przystępny i zabawny sposób wprowadza czytelnika w nowy i mało znany świat geometrii nieeuklidesowej.

BAJKA NA DOBRY POCZĄTEK[1]

Wstęp do bajki

W Elementach Euklides zawarł coś bardzo ważnego, co natchnęło późniejszych matematyków do stworzenia nowych geometrii, innych od geometrii euklidesowej czyli od tej, o której uczysz się w szkole. Wiesz na pewno ze szkoły co to jest punkt, prosta i płaszczyzna. Pamiętasz co to znaczy, że proste są równoległe? Są to takie linie proste leżące w jednej płaszczyźnie, które nie przecinają się, więc nie mają punktów wspólnych. Z Elementów Euklidesa wynika że:

Przez punkt nie leżący na danej prostej
przechodzi tylko jedna prosta do niej równoległa.

Jak zapytałabym czy to zdanie (aksjomat) jest prawdziwe powiesz zapewne, że tak, bo przecież linia prosta nigdzie się nie zgina i w takim razie nie może przeciąć drugiej linii prostej. Zgadzam się z Tobą zupełnie, ale zadam Ci jeszcze jedno pytanie: Co to jest linia prosta?

Euklides w swojej książce powiedział, że linia prosta to jedno z pojęć pierwotnych więc nie podaje się jej definicji. Właśnie! W tym sęk! Linia prosta może być byle czym, aby tylko spełniała aksjomaty wymienione przez Euklidesa. I tu nasuwa się wątpliwość. Czy nie udałoby się czasami znaleźć takiego tworu geometrycznego, który miałby wszystkie te własności linii prostej, które opisane są w aksjomatach?
Innymi słowy: czy Grześ Kowalski - blondyn jest tylko jeden? Czy gdy mówimy Grześ Kowalski, blondyn, określamy w ten sposób jednego człowieka, czy kilku? Może się okazać, że istnieje dwudziestu Grzesiów Kowalskich, blondynów. Tak samo jest z linią prostą. To co wiemy o linii prostej może nie wyznaczać jednego jedynego tworu geometrycznego, ale kilka.

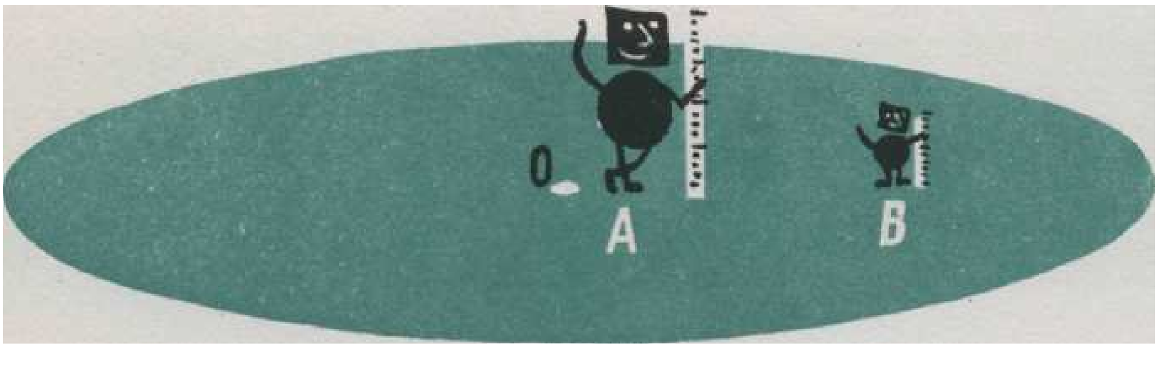
Tak samo pomyśleli wielcy matematycy. Postanowili sprawdzić czy uda się pewien eksperyment. Spróbowali w miejsce pojęć pierwotnych czyli: punktu, prostej, płaszczyzny „podstawić" inne twory geometryczne, tak by miały one te same własności co „zwykłe" punkty, proste i płaszczyzny. Taka zmiana się udała i powstała nowa geometria, jednak aksjomat o prostych równoległych w tej geometrii już nie jest spełniony. A to oznacza, że geometria Euklidesa nie jest jedyną geometrią, może być kilka prawdziwych geometrii.

Udało się zbudować taką geometrię, w której do jednej prostej, przez dany punkt, można poprowadzić tyle równoległych, ile się tylko chce. Zaraz ci to pokażę. To nie jest trudne, ale bardzo ciekawe, potrzeba tylko trochę wyobraźni, a tej z pewnością ci nie brak.

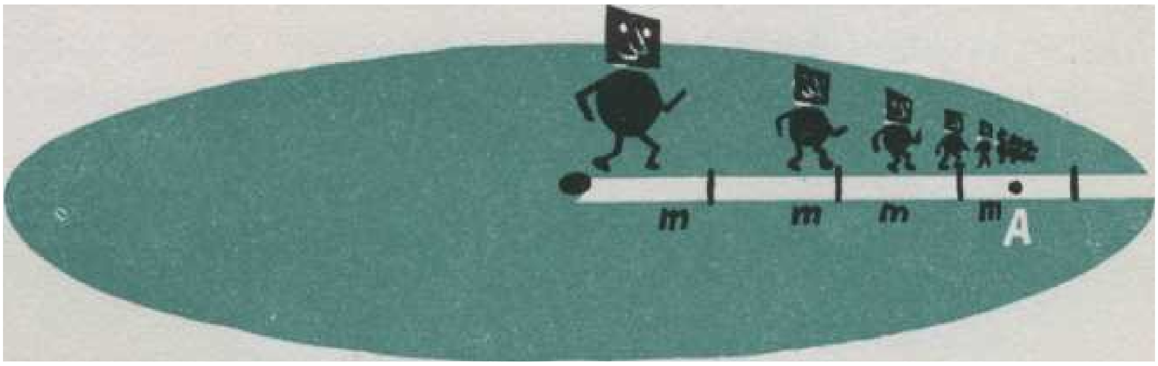
[1] Poniższy fragment w całości skopiowany z książki: W. Bieńko, „Zygzakiem przez matematykę".

PORA NA BAJKĘ

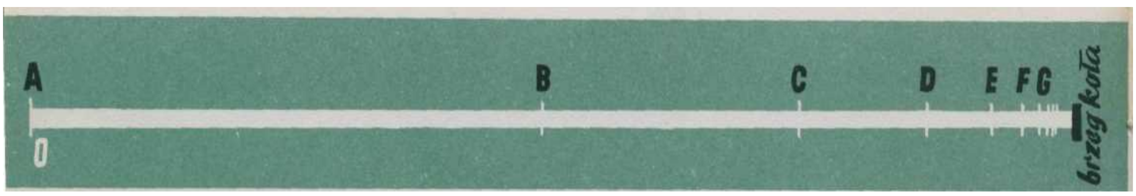
To zielone koło, to jest świat. Wyobraź sobie, że w tym kole żyją, pracują i zajmują się nauką istoty rozumne, może podobne do ludzi. Wyobraź sobie dalej, że nad środkiem koła, nad punktem O świeci takie ich słońce i tu jest najcieplej. Im dalej od środka, im bliżej brzegu koła, tym zimniej. Wreszcie na samym brzegu, na okręgu, jest tak straszliwy mróz, że nie sposób go sobie wyobrazić. Na tym okręgu, narysowanym czarną grubą linią, żadna z tych istot żyć nie może, tu już nie ma ich świata. Te istoty, które żyją na tym kole, nazwijmy sobie dla ułatwienia geometrakami, gdyż zajmują się one z upodobaniem geometrią.



Wiesz na pewno, że wszystkie ciała pod wpływem zimna kurczą się. Wyobraź więc sobie, że i nasze geometraki też się kurczą. Im bliżej brzegu koła, tym geometrak staje się mniejszy. Im bliżej środka, tym większy, w samym środku koła geometraki są największe. Czy geometraki wiedzą, że oddalając się od środka koła zmniejszają się? Oczywiście, że nie wiedzą. Jak bowiem mogliby to sprawdzić? No, powiesz, że wystarczy wziąć ze sobą linijkę i zmierzyć się w środku koła a następnie przy brzegu. Ale przecież linijka też się skurczy i jeśli geometrak zmierzy się w punkcie *A* i stwierdzi, że jest wysoki na dwa metry, a następnie przejdzie do punktu *B* i zmierzy się tam, to stwierdzi, że również ma dwa metry wysokości, bo wraz z nim skróciła się też jego linijka. Powiesz może, że co to za świat, z którego geometraki mogą uciec, który dla nich jest skończony — wystarczy, żeby przekroczyć okrąg. Otóż nieprawda. Ten świat dla nich jest nieskończony i geometraki nie mogą nawet dojść do granicy, nie mogą znaleźć się na okręgu. Dlaczego? Wyobraź sobie, że jeden z nich wybrał się na wędrówkę i chce dotrzeć do granic świata. Wyrusza, powiedzmy, ze środka koła i idzie w kierunku okręgu. Im dalej nasz wędrowiec oddala się od punktu O, tym bardziej się zmniejsza, tym krótsze się stają jego nogi, a więc i krótszy krok. Im dalej od środka, tym więcej czasu potrzebuje na przebycie odcinka *m*. Dla nas te wszystkie odcinki *m* są jednakowe, ale dla geometraka są one coraz dłuższe, bo on sam i jego linijka są coraz mniejsze.



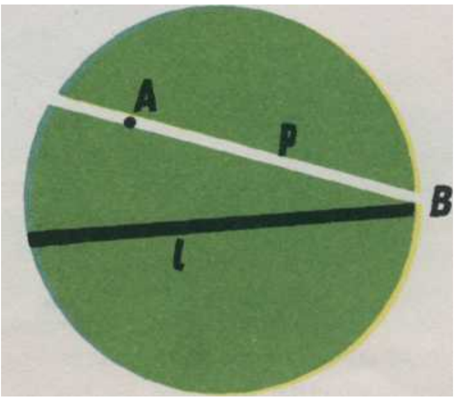
Przypuśćmy, że geometrak doszedł już do punktu *A*, ale jest tu już strasznie malutki, idzie dalej, ale mróz jest coraz większy, krok naszego piechura jest już maciupeńki, prawie równy zeru. Geometrak porusza się już bardzo wolno, choć zdaje mu się, że idzie wciąż jednakowo szybko; im bliżej brzegu, tym jest mniejszy i tym wolniej idzie. Żeby pokazać to jeszcze dokładniej, wyobraź sobie, że geometrak mierzy swoją drogę taśmą mierniczą o długości kilometra i że po każdym kilometrze wszystko się kurczy o połowę.

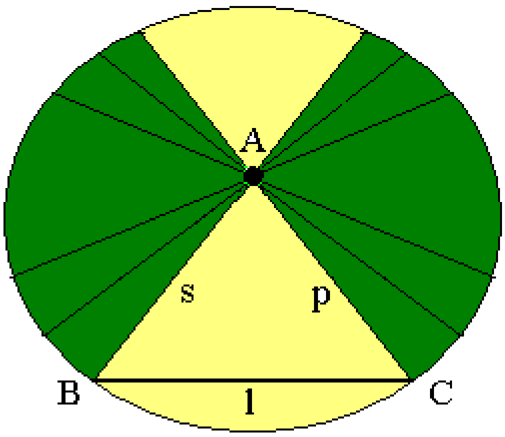


Masz tu wyniki jego pomiarów. Najpierw odmierzył odcinek *AB* i znalazł się w punkcie *B*. Ale tu wszystko skurczyło się już dwa razy i geometrak odmierzył odcinek *BC* równy połowie *AB*. Znalazł się w punkcie *C*, ale tu znów wszystko skurczyło się dwukrotnie i odmierzył wtedy docinek *CD* równy połowie *BC*. Znalazł się w punkcie *D*, ale tu znów wszystko skurczyło się o połowę i odmierzył odcinek *DE* równy połowie *CD*. Znalazł się w punkcie *E*, ale tu oczywiście znów wszystko skurczyło się dwa razy... I tak dalej, i tak dalej. Zatem nasz geometrak nigdy nie dojdzie do brzegu, do okręgu, bo wraz ze zbliżaniem się do granicy wszystko się zmniejsza. Nasz wędrowiec nie wie oczywiście o tym wszystkim, gdyż nie ma żadnej metody, aby to stwierdzić, sądzi więc, że skoro nigdy nie może dojść do granicy, to znaczy, że jego świat nie ma granic, a więc jest nieskończony.

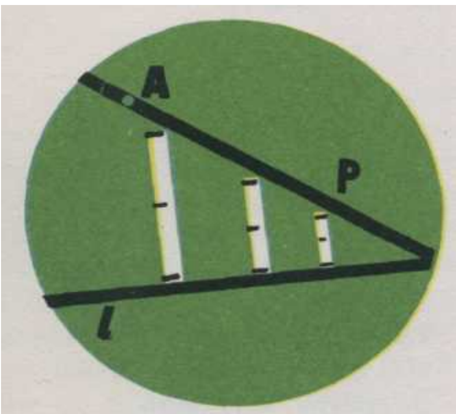
Tak więc geometraki sądzą, że żyją w nieskończonym świecie. Czarna linia okręgu już dla nich nie istnieje, nie należy ona do ich świata, ponieważ nie mogą nigdy jej dotknąć i nie wiedzą nawet o jej istnieniu. Przypuśćmy teraz, że geometraki dowiedziały się o tym, że przez punkt nie leżący na prostej można poprowadzić tylko jedną linię prostą do niej równoległą. Co na to powiedzą? Czy zgodzą się z tym? Nie! Geometraki nigdy się z tym nie zgodzą — ponieważ ich geometria jest inna. Dlaczego?

Popatrz. Tu jest świat geometraków i linia prosta *l*, oraz punkt *A* na niej nie leżący. Geometraki wytyczają linię prostą *p,* przechodzącą przez punkt *A*, i twierdzą, że linia *p* jest równoległa do linii *1*. Oczywiście mają rację, gdyż linie *p* i *l* nie przecinają się. Powiesz, że przecież widać, że linie *p* i *l* przecinają się w punkcie *B* leżącym na okręgu. Tak my sądzimy. Ale geometraki ? Dla nich punkt *B* nie istnieje, nie należy do ich świata, jest dla nich nieosiągalny, więc mają oni prawo twierdzić, że linie *p* i *l* nie przecinają się.





Ale oto inny geometrak wytycza nową linię prostą *s*. Ta prosta jest równoległa do *l* i przechodzi przez punkt *A*. Linie *s* i *l* nie mają punktów wspólnych, bo w świecie geometraków nie przecinają się. Żaden z nich, idąc ku punktowi *C,* nigdy nie doszedłby do punktu przecięcia, więc mają oni wszelkie prawo twierdzić, że proste *l* i *s* nie mają punktów wspólnych. Mamy więc już dwie proste przechodzące przez dany punkt i równoległe do trzeciej prostej. Ale to nie wszystko. Widać przecież, że każda prosta leżąca w obszarze ciemniejszym i przechodząca przez punkt *A*, będzie także równoległa do prostej *1*. Tak więc geometraki mogą wypowiedzieć twierdzenie: Przez punkt nie leżący na prostej przechodzi dowolnie wiele prostych równoległych do tej prostej.



Geometraki mogą twierdzić, że prosta p jest w każdym punkcie jednakowo oddalona od prostej *l*, ponieważ wraz z oddalaniem się od punktu A linijka będzie się stale skracała i może pokazywać wciąż tę samą odległość. A więc geometraki mają zupełnie inną geometrię. Można dowieść, że w takiej geometrii nie natkną się na sprzeczność. Dowodzi to, że możliwa jest inna geometria, taka na przykład jaką mają geometraki, taka, że do dowolnej prostej, przez punkt poza nią można przeprowadzić nieskończenie wiele prostych równoległych.

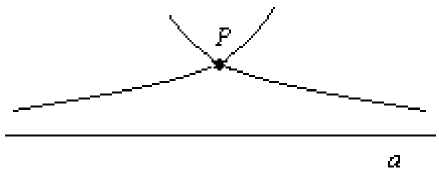
ROZDZIAŁ 7

Proste w geometrii Bolyai - Łobaczewskiego

Jedną z geometrii nieeuklidesowych jest geometria Bolyai–Łobaczewskiego będąca rozszerzeniem geometrii absolutnej o aksjomat Łobaczewskiego, który to jest zaprzeczeniem aksjomatu równoległości. Niniejszy rozdział poświęcimy charakterystyce prostych w geometrii Łobaczewskiego, nazywanej zamiennie geometrią hiperboliczną. Podamy definicję prostych równoległych oraz udowodnimy elementarne własności tych prostych. Rozumowania, które przeprowadzimy w dużej części będą opierały się na stwierdzeniach geometrii absolutnej, które w geometrii hiperbolicznej brzmią tak samo jak w geometrii euklidesowej. Ponadto w większości dowodów będziemy korzystać ze stwierdzenia geometrii absolutnej o istnieniu rzutu prostokątnego dowolnego punktu na prostą. Wprowadzimy również definicje nowych obiektów występujących w geometrii nieeuklidesowej oraz skorzystamy z pomocniczych twierdzeń, które przytoczymy bez dowodu. Wnioski do jakich dojdziemy i twierdzenia jakie udowodnimy, zapewne zaskoczą nas tak samo jak odkrywców geometrii nieeuklidesowej.

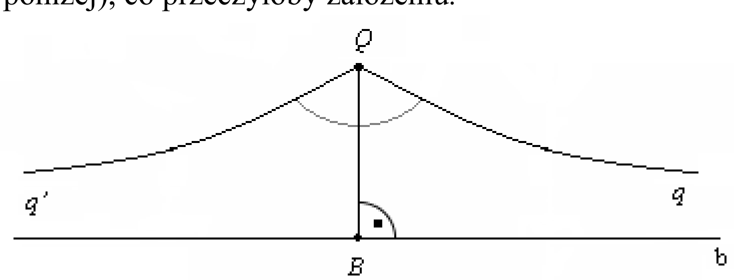
Aksjomat Łobaczewskiego

Istnieje prosta a i punkt P nie leżący na prostej a, przez który przechodzą co najmniej dwie proste rozłączne z prostą a.

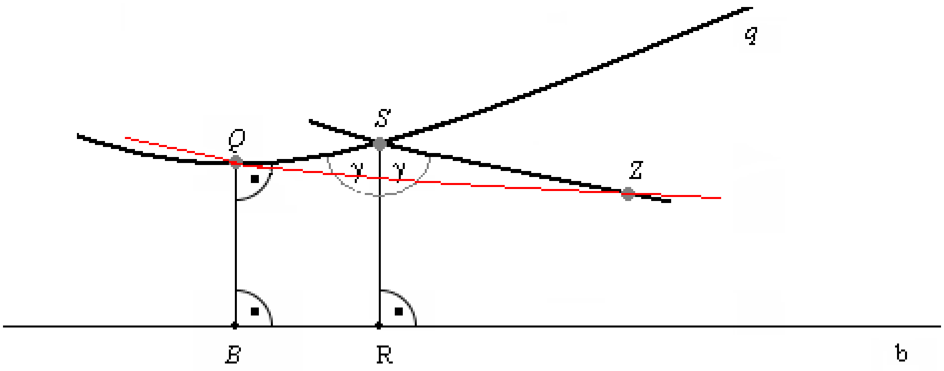


WŁASNOŚĆ 7.1. Jeżeli zachodzi aksjomat Łobaczewskiego dla punktu P i prostej a, to zachodzi dla każdej prostej b i każdego punktu Q nie należącego do prostej b.

DOWÓD:
Załóżmy niewprost, że aksjomat Łobaczewskiego nie zachodzi dla pewnego punktu Q i prostej b rozłącznej z punktem Q. Oznacza to, że przez punkt Q przechodzi dokładnie jedna prosta q rozłączna z prostą b. Rzutujemy prostokątnie punkt Q na prostą b (jak na rysunku obok). Kąt pomiędzy prostą q i odcinkiem QB jest kątem prostym, ponieważ gdyby miał mniejszą miarę to wówczas po odbiciu prostej q względem odcinka QB otrzymalibyśmy drugą prostą q' rozłączną z prostą b, przechodzącą przez punkt Q (jak na rysunku poniżej), co przeczyłoby założeniu.

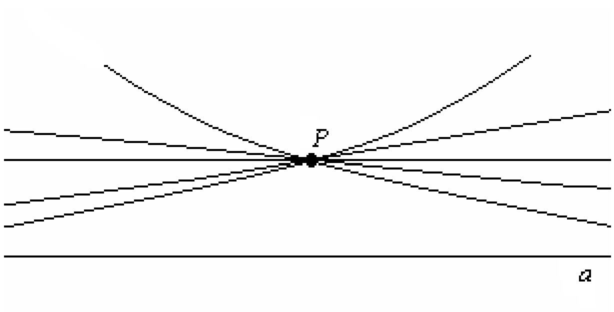


Zatem rozważana sytuacja przedstawia się jak na rysunku:

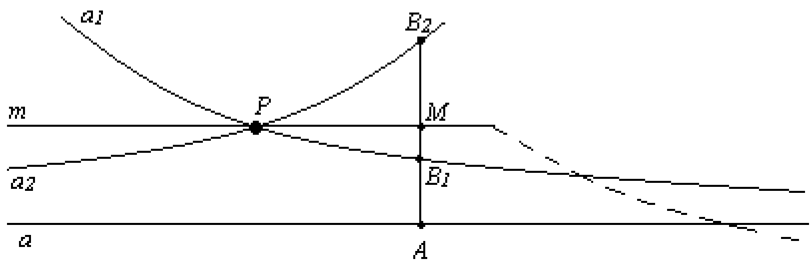


Przez punkt Q przechodzi dokładnie jedna prosta rozłączna z prostą b. Bierzemy z prostej q punkt S, różny od punktu Q, i rzutujemy go prostopadle na prostą b. Przez punkt S przechodzi przynajmniej jedna prosta rozłączna z prostą b. Jest to prosta q, nachylona do prostej b pod kątem γ nie większym niż 90^0, co wynika z geometrii absolutnej. Jednak wtedy odbijając prostą q wzdłuż odcinka RS otrzymujemy drugą prostą rozłączną z b, nachyloną pod tym samym kątem do odcinka RS co prosta q. Zauważmy, że na tej prostej możemy tak dobrać punkt Z, że prosta QZ jest rozłączna z prostą b. Wskazaliśmy zatem różną prostą od prostej q zawierającą Q i jednocześnie rozłączną z prostą b. Daje to sprzeczność z założeniem, że dla jednego punktu i prostej z nim rozłącznej nie zachodzi aksjomat Łobaczewskiego. Otrzymana sprzeczność dowodzi własności 7.1.■

TWIERDZENIE 7.1. *Dla każdej prostej a i dla każdego punktu P spoza prostej, przez punkt P przechodzi nieskończenie wiele prostych rozłącznych z prostą a.*



DOWÓD: Niech a_1 i a_2 proste rozłączne z prostą a przechodzące przez punkt P. Prosta a_1 dzieli płaszczyznę na dwie części. Wybieramy punkt B_2 z prostej a_2, który leży po przeciwnej stronie prostej a_1, niż prosta a. Ponadto na prostej a wybieramy punkt A. Ponieważ punkty A i B_2 leżą po przeciwnej stronie prostej a_1, zatem odcinek AB_2 przecina prostą a_1 w punkcie B_1. Z odcinka B_1B_2 wybieramy dowolny punkt M i prowadzimy prostą m przechodzącą przez punkty P i M.

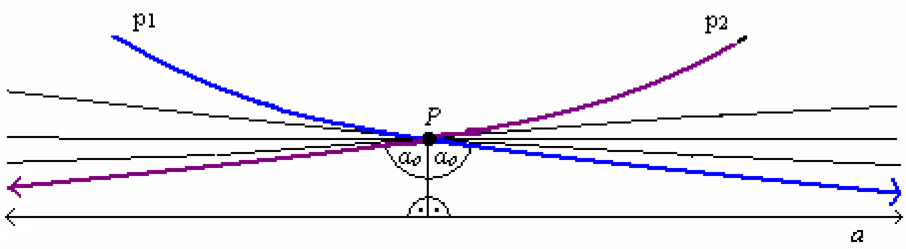


Naszym celem jest wykazanie, że prosta m jest rozłączna z prostą a.
Załóżmy niewprost, że prosta m przecina prostą a. Wówczas musi też przeciąć prostą a_1 w punkcie P_1. Otrzymaliśmy, że prosta m ma dwa punkty wspólne: P i P_1. W myśl aksjomatu, że przez dwa różne punkty przechodzi dokładnie jedna prosta otrzymujemy, że m i a opisują tę samą prostą. Jest to niemożliwe, ponieważ $M \in m$ i $M \notin a$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że prosta m jest rozłączna z prostą a. Ponieważ na odcinku B_1B_2 jest nieskończenie wiele punktów to istnieje nieskończenie wiele prostych, przechodzących przez punkt P i odcinek B_1B_2, rozłącznych z prostą a. ■

Przez każdy punkt poza prostą a przechodzi nieskończenie wiele prostych rozłącznych z prostą a. Wyróżniamy dwie grupy prostych rozłącznych:
proste równoległe (patrz definicja poniżej);
proste rozbieżne, czyli rozłączne i nierównoległe z zadaną prostą.

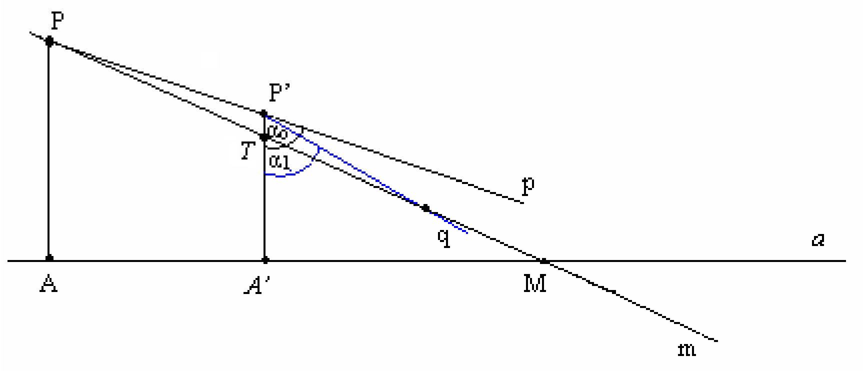
PROSTA RÓWNOLEGŁA

Dla każdej prostej a i każdego punktu $P \notin a$, przez punkt P przechodzi nieskończenie wiele prostych rozłącznych z a. Wśród nich wyróżniamy dwie proste p_1 i p_2, które jako pierwsze spośród wszystkich prostych nie przecinają prostej a. Proste te są opuszczone z punktu P pod kątem α_o, którego miara jest kresem dolnym miar kątów pod jakimi wypuszczone są z punktu P inne proste rozłączne z prostą a, i nazywamy je ***prostymi równoległymi*** do prostej a. Przez każdy punkt $P \notin a$ przechodzą dokładnie dwie proste równoległe do prostej a, skierowane w przeciwną stronę, nachylone do prostej a pod tym samym kątem, którego miara nie przekracza 90^0. Kierunek prostych równoległych określa grot. Poglądowo o prostych równoległych w tę samą stronę w geometrii Łobaczewskiego możemy myśleć, że są to proste, które w nieskończoności mają punkt wspólny.

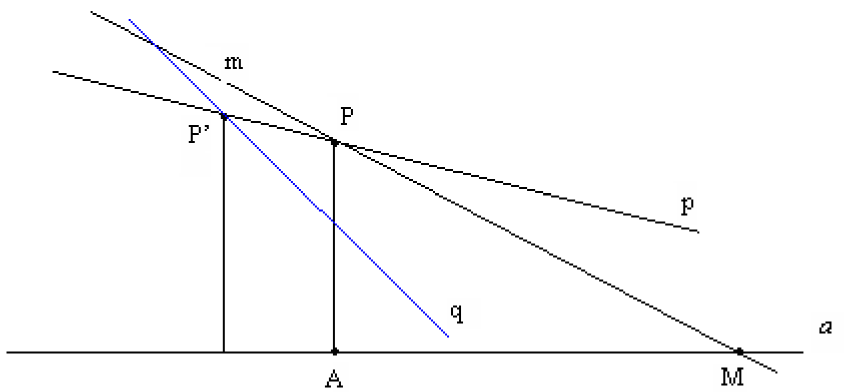


TWIERDZENIE 7.2. *Jeżeli prosta p jest równoległa do prostej a z punktu P to jest równoległa z każdego innego punktu swojej prostej.*

DOWÓD:
Weźmy punkt *P'* z prostej *p* w kierunku, w którym prosta *p* jest równoległa. Pokażemy, że prosta *p* jest prosta równoległą do prostej *a* z punktu *P'*, to znaczy, że każda inna prosta opuszczona z punktu *P'* pod kątem $0<\alpha_1<\alpha_o$ przecina prostą *a*.



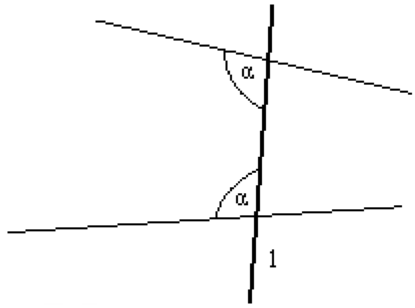
Z definicji równoległości prosta *m* przechodząca przez punkt *P* przecina prostą *a*. Prosta *q* przecina jeden z boków utworzonego trójkąta *A'TM* więc z aksjomatu Pascha przecina drugi jego bok, czyli prostą *a*.
Dla punktu *P'* z prostej *p* położonego na lewo od punktu *P* analogiczne rozumowanie, jednak aksjomat Pascha stosujemy do trójkąta *APM*.



■

DEFINICJA 7.1. Sieczna jednakowego nachylenia.

Jeżeli mamy dwie proste przecięte trzecią, taką że kąty przyległe po jednej stronie są równe to taką trzecią prostą nazywamy sieczną jednakowego nachylenia.
Przyjmujemy bez dowodu następujący lemat:



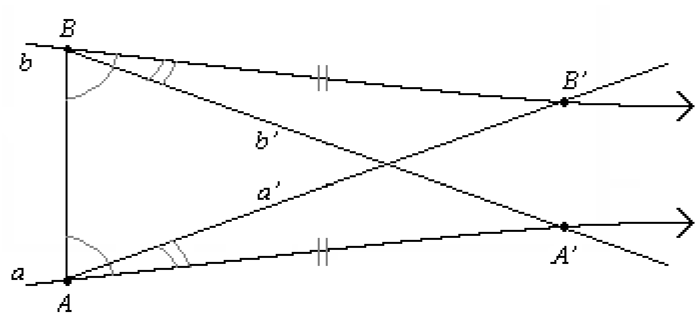
1 - sieczna jednakowego nachylenia

LEMAT 7.1 Dla każdych dwóch prostych istnieje sieczna jednakowego nachylenia.

TWIERDZENIE 7.3. ***Symetryczność równoległości***

Jeśli jedna z dwóch prostych jest równoległa do drugiej w pewną stronę, to druga jest równoległa do pierwszej w tę samą stronę.

DOWÓD: Dane są dwie proste *a* i *b*, takie że prosta *a* jest równoległa do prostej *b* w jedną stronę. Mamy pokazać, że prosta *b* jest równoległa do prostej *a* w tę samą stronę, czyli jeżeli z punktu *B* wypuścimy prostą *b'* pod ostrzejszym kątem to przetnie ona prostą *a*.

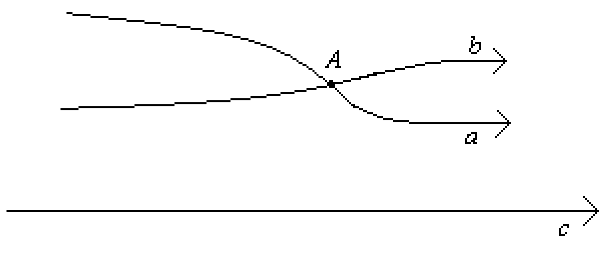


Wiemy, że dla każdych dwóch prostych istnieje sieczna jednakowego nachylenia. Bierzemy zatem sieczną jednakowego nachylenia, dla prostych *a* i *b*, która przecina rozważane proste w punktach *A* i *B* odpowiednio. Z punktu *B* wypuszczamy prostą *b'* pod ostrzejszym katem niż prosta *b*. Następnie z punktu *A* prowadzimy prostą *a'* nachyloną do prostej *a* pod tym samym kątem co nachylona jest prosta *b*' do prostej *b*. Z założenia prosta *a* jest równoległa do prostej *b*, zatem *a'* przecina *b* w punkcie *B'*. Następnie na prostej *a* odcinam odcinek długości *BB'* i otrzymuję, że trójkąt *ABB'* jest przystający do trójkąta *ABA'*, ponieważ rozważane trójkąty mają wspólny bok *AB*, odcinki *AA'* i *BB'* są równej długości o kąty przy wierzchołkach *A* i *B* są równej miary. Oznacza to, że odcinek *BA*' leży na prostej *b'*, czyli prosta *b'* przecina prostą *a* w punkcie *A'*. Pokazaliśmy więc, że każda prosta nachylona pod ostrzejszym kątem, niż prosta *a* do prostej *b*, przechodząca przez punkt *B* przecina prostą *a,* zatem pierwszą prostą nie przecinającą prostej a jest prosta *b*, co daje, że *b* jest równoległa do *a*. ■

TWIERDZENIE 7.4. ***Przechodniość równoległości.***

Jeżeli dwie proste a i b są równoległe do trzeciej prostej c w tę samą stronę, to są równoległe do siebie w tę samą stronę.

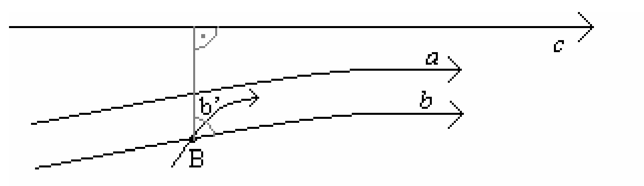
DOWÓD: Niech prosta *a* jest równoległa do prostej *c* oraz niech prosta *b* jest równoległa do prostej *c*. Pokażemy, że wtedy *a* jest równoległa do *b*. Dowód przeprowadzimy w dwóch etapach. Najpierw sprawdzimy, że proste *a* i *b* są prostymi rozłącznymi, *a* następnie wykażemy, że są równoległe do siebie w tę samą stronę.



Przypuśćmy, że proste *a* i *b* przecinają się w punkcie *A*. Oznacza to, że przez punkt *A* w tę samą ustaloną stronę przechodzą dwie proste równoległe do *c*. Prowadzi to do sprzeczności, ponieważ w geometrii Łobaczewskiego przez dany punkt przechodzi tylko jedna prosta równoległa do zadanej prostej w tę samą stronę. Zatem założenie prowadzi do sprzeczności, czyli proste *a* i *b* są rozłączne.
Musimy jeszcze sprawdzić, że proste *a* i *b* są prostymi równoległymi w tę samą określoną stronę. Rozważmy dwa przypadki, w zależności od położenia prostych *a* i *b* względem prostej *c*.

1) Proste *a* i *b* leżą po tej samej stronie prostej *c*.

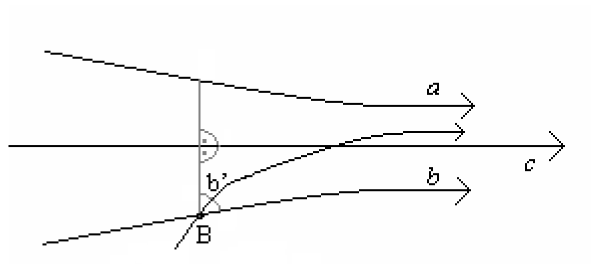
Załóżmy, że proste *a* i *b* są prostymi rozbieżnymi. Oznacza to, że z punktu *B* mogę wypuścić prostą *b'* pod ostrzejszym kątem niż prosta *b*, która nie przecina prostej *a* i jest do niej równoległa. Prosta *b'* jest rozłączna z prostą *c*, ponieważ leży po tej samej stronie prostej *a* co prosta *b*.



Prosta *b* jest równoległa do prostej *c*, czyli *b* jest prostą graniczną, pierwszą która nie przecina prostej *c*, a my wskazaliśmy inną prostą, która wystawiona pod ostrzejszym kątem nie przecina prostej *c*, czyli jest do niej równoległa. Zatem założenie, że prosta *a* nie jest równoległa do prostej *b* prowadzi do sprzeczności, co dowodzi, równoległości *a* do *b*.

2) Proste *a* i *b* leżą po przeciwnej stronie prostej *c*.

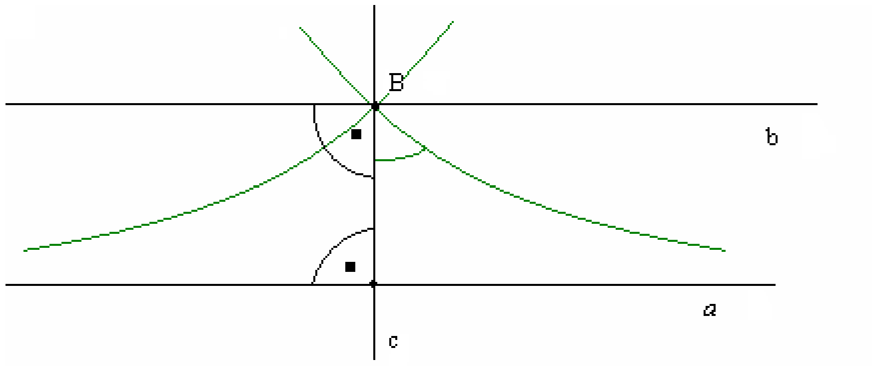
Podobnie jak w pierwszym przypadku załóżmy, że proste *a* i *b* nie są równoległe.



Zatem z punktu *B* wypuszczamy pod mniejszym kątem prostą *b*', która jest równoległa do prostej *a*. Skoro *b* || *c* to prosta *b'* przecina prostą *c*. Prosta *b'* jest bardziej nachylona w stronę prostej *a* niż prosta *c*. Wiemy jednak, że *c* || *a,* zatem prosta *b'* nie może być prostą rozłączną z *a* wystawioną pod mniejszym kątem niż prosta *c*. Znów otrzymaliśmy sprzeczność z założeniem, zatem prosta *a* jest równoległa do prostej *b*.
W ten sposób rozpatrzyliśmy oba z możliwych przypadków, które dowodzą Twierdzenia 7.4.■

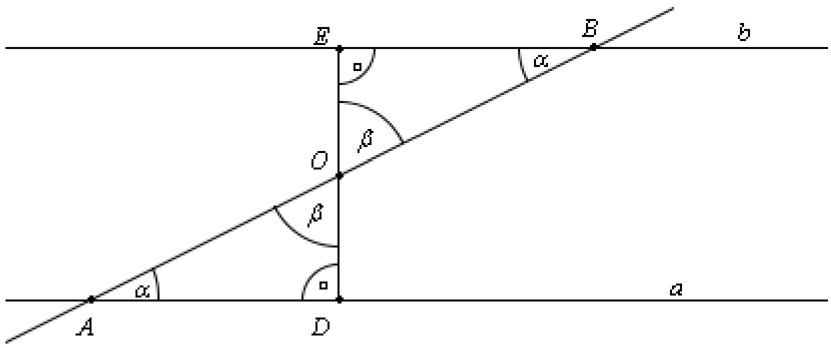
TWIERDZENIE 7.5. *Dwie proste a i b prostopadłe do trzeciej prostej c są rozbieżne.*

DOWÓD: Przez punkt *B* przechodzą co najmniej dwie proste rozłączne z prostą *a*. Czyli przez punkt *B* przechodzi z każdej ze stron, pod mniejszym kątem niż prosta *b*, prosta rozłączna z *a*. Więc prosta *b* nie jest prosta graniczną, czyli nie jest równoległa do prostej *a*.



■

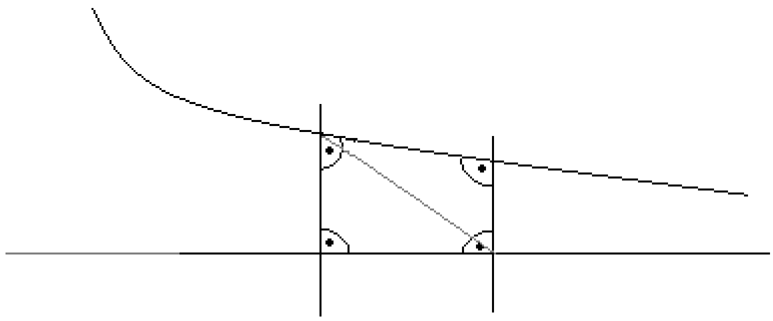
TWIERDZENIE 7.6. *Jeśli dwie proste przecięte trzecią tworzą kąty wewnętrzne naprzemianległe równe, to są rozbieżne.*



DOWÓD:
Niech *O* będzie środkiem odcinka *AB*. Poprowadźmy z punktu *O* odcinki prostopadłe do prostej *a* i *b*. Zauważamy, że trójkąty *OAD* i *OEB* są przystające, ponieważ mają te same kąty. Zatem łamana *EOD* jest prostą, która jest prostopadła do *a* i do *b*. Otrzymujemy więc dwie proste prostopadłe do trzeciej, które na mocy *Twierdzenia 7.5* są rozbieżne.■

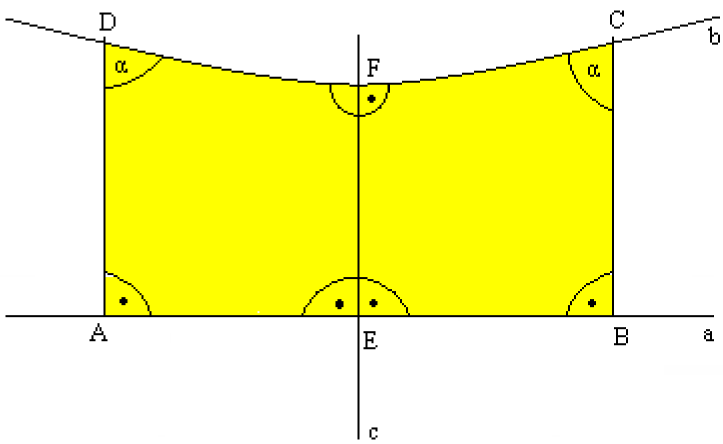
TWIERDZENIE 7.7. *Każde dwie proste rozbieżne mają tylko jedną wspólną prostą prostopadłą.*

DOWÓD:
Dowód istnienia prostej prostopadłej pomijamy, udowodnimy natomiast, że prostych prostopadłych jest nie więcej niż jedna.



Dowód jedyności: załóżmy, że istnieją dwie proste prostopadłe do danych prostych rozbieżnych wówczas otrzymalibyśmy czworokąt o czterech kątach prostych. Rozważmy w tym czworokącie dwa trójkąty, na które dzieli nam przekątna czworokąta. Suma kątów czworokąta to suma kątów w tych trójkątów. Czyli musiałby istnieć trójkąt, którego suma katów jest większa lub równa od π. Otrzymujemy sprzeczność, bo w geometrii Łobaczewskiego taki trójkąt nie istnieje. ■

W geometrii hiperbolicznej suma kątów w czworokącie jest mniejsza od 360^0. Nie istnieje prostokąt, wyróżniamy natomiast czworokąty o dwóch lub trzech kątach prostych. Rozpatrzmy czworokąt *ABCD* jak na rysunku:



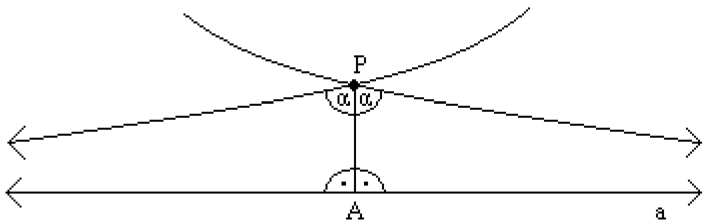
W czworokącie boki *AD* i *BC* są równej długości, natomiast proste *a* i *b* są rozbieżne. Jedyną prosta prostopadłą do dwóch rozbieżnych prostych *a* i *b* jest prosta *c*, która jednocześnie jest osią symetrii badanego czworokąta. Widzimy więc, że przykładem czworokąta o dwóch kątach prostych jest *ABCD* (dla $0<\alpha<90^0$) natomiast przykładem czworokąta o trzech kątach prostych jest czworokąt *EBCF*.

Czworokąt *ABCD* nosi nazwę „*czworokąta Sacchariego*” i jest jedną z figur, w której ustalając konkretną miarę kąta α z łatwością ustalimy z jaką geometrią mamy do czynienia, to znaczy czy jesteśmy w świecie geometrii euklidesowej, czy też geometrii Łobaczewskiego. Jeżeli kąt α ma miarę 90^0 to jak wcześniej pokazaliśmy obowiązuje aksjomat równoległości, jeżeli zaś kąt α jest ostry to spełniony jest aksjomat Łobaczewskiego.

Podsumowują dotychczasowe rozważania o położeniu dwóch prostych możemy w skrócie powiedzieć, że dwie proste spełniają jeden z wymienionych warunków:

- przecinają się,
- są równoległe,
- są prostopadłe do tej samej prostej.

KĄT RÓWNOLEGŁOŚCI

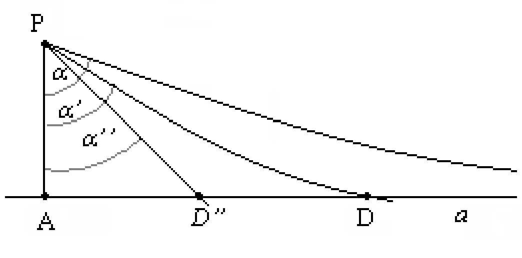


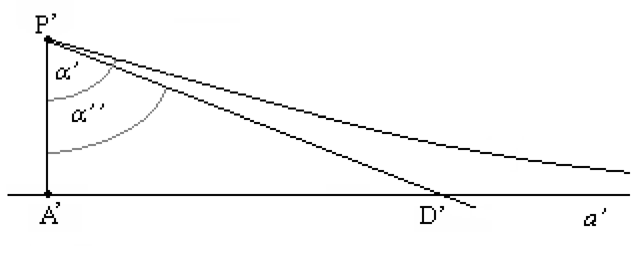
α – kąt równoległości punktu *P* względem prostej *a*

Dana jest prosta *a* rozłączna z punktem *P*. Przez punkt *P* przechodzą dwie proste równoległe do prostej *a*. Opuśćmy z punktu *P* prostą prostopadłą do prostej *a.* Kąt pomiędzy prostą prostopadłą, a prostą równoległą do *a* nazywamy *kątem równoległości* albo *kątem Łobaczewskiego*.

FAKT 7.1. *Kąt równoległości nie zależy od położenia punktu P ale jedynie od długości odcinka AP.*

DOWÓD: Pokażemy, że dla dowolnego punktu *P'*, takiego że *A'P' = AP* miara kąta równoległości nie zmienia się. W dowodzie skorzystamy z cechy przystawania trójkątów (kąt, bok, kąt) - twierdzenia geometrii absolutnej.



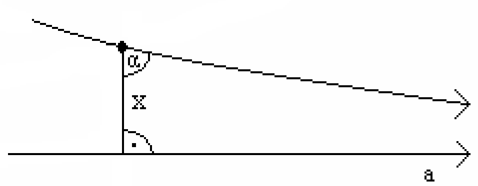


Dla punktu P kąt równoległości wynosi α. Bierzemy punkt P' rozłączny z prostą a' taki, że $AP = A'P'$ oraz załóżmy, że dla tej pary kąt równoległości α' ma mniejszą miarę od kąta α. Poprowadźmy z punktu P prostą nachyloną do AP pod kątem α'. Poprowadzona prosta przecina prostą a w punkcie D, ponieważ $\alpha' < \alpha$. Następnie na prostej a' odkładmy odcinek $A'D'$, taki że $m(AD) < m(A'D')$. W kolejnym kroku prowadzimy prostą PD'' nachyloną do odcinka AP pod kątem α'' i porównujemy trójkąty APD'' oraz $A'P'D'$. Trójkąty mają jeden bok tej samej długości $AP=A'P'$ oraz odpowiednie dwa kąty tej samej miary. Na podstawie cechy przystawania trójkątów kąt, bok, kąt mamy, że trójkąty APD oraz $A'P'D'$ są przystające. Jednak odcinki $A'D'$ i AD'' są różnej długości, ponieważ $m(A'D') > m(AD) > m(AD'')$ co prowadzi do sprzeczności. Oznacza to, że kąt równoległości zależy jedynie od długości odcinka *AP*.■

Pokazaliśmy, że kąt równoległości zależy tylko od długości odcinka *AP*. Oznaczając przez x długość tego odcinka możemy zdefiniować funkcję określającą miarę kąta równoległości w zależności od długości odcinka x.

FUNKCJA RÓWNOLEGŁOŚCI *Π(x)*

Funkcja równoległości $\Pi(x)$ określa miarę kąta równoległości α w zależności od odległości do zadanej prostej a punktu, przez który przechodzi prosta równoległa.



Funkcję równoległości określamy w następujący sposób:

- wystawiamy odcinek długości x prostopadły do danej prostej a,
- z końca odcinka prowadzimy prostą równoległą, czyli najbliższą nie przecinającą prostej a,
- utworzony kąt pomiędzy poprowadzoną prostą, a odcinkiem to właśnie kąt równoległości odpowiadający odcinkowi długości x.

Dla małych długości x kąt równoległości zbiega do $\frac{\pi}{2}$, natomiast gdy x rośnie do nieskończoności funkcja $\Pi(x)$ zbiega do 0. Istnieje też funkcja odwrotna do $\Pi(x)$, która określa odległość od wierzchołka punktu na ramieniu kata ostrego α do prostej prostopadłej do jednego ramienia kąta α, i równoległej do drugiego ramienia kąta α.

TWIERDZENIE 7.8. *Funkcja $\Pi(x)$ ma następujące własności:*

a) $\Pi: R_+ \rightarrow (0, \frac{\pi}{2})$,

b) *przyjmuje każdą wartość z przedziału* $(0, \frac{\pi}{2})$,

c) *jest malejąca,*

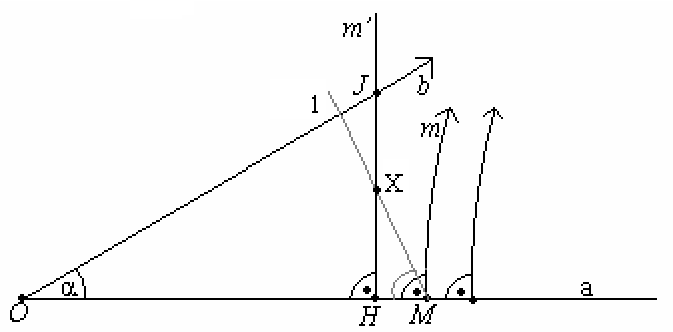
d) *jest ciągła.*

DOWÓD:

Wynika wprost z definicji funkcji Π.

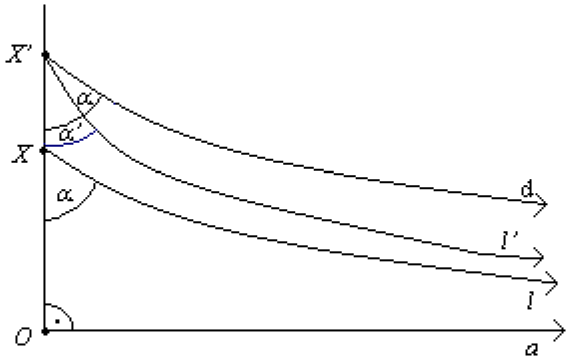
Dla dowolnego kąta α z przedziału $(0, \frac{\pi}{2})$ należy tak dobrać punkt na prostej prostopadłej, by $\Pi(x) = \alpha$.

Rozważmy kąt α pomiędzy prostymi *a* i *b* jak na rysunku poniżej. Poprowadźmy prostą *m* prostopadłą do prostej *a*, przez punkt *M*, taki że jest ona kresem dolnym punktów z których wypuszczone proste prostopadłe są rozłączne z prostą *b*. (Uzasadnienie istnienia punktu M pomijamy). Zatem dla punktu *M,* zachodzi warunek $m \cap b = \emptyset$. Należy sprawdzić, że dana prosta *m* jest prostą równoległą, by wyeliminować przypadek, że jest prostą rozbieżną z *b*.



Pokażemy, że dowolna prosta *l* wypuszczona pod ostrzejszym kątem z punktu *M* przecina drugie ramię kąta. Na prostej *l* wypuszczonej z punktu *M* wybieramy punkt *X*, a następnie prowadzimy przez punkt *X* prostą prostopadłą *m'* do ramienia *a*. Prosta *m'* przecina drugie ramię kata, ponieważ przechodzi przez punkt *H*, który leży bliżej punktu *O* niż punkt *M*. Prosta *l* przecina bok *HJ* trójkąta *OHJ* utworzonego z ramion kąta α i prostej prostopadłej *m'*, takiej że $m' \cap b \neq \emptyset$. Zatem z aksjomatu Pascha przecina też drugi bok trójkąta zawarty w prostej *b*, czyli nie jest równoległa do prostej *b*. Co daje, że pierwszą prostą, która nie przecina prostej *b* jest prosta *m*. Znaleźliśmy więc odcinek *OM* długości *x* taki, że $\Pi(x) = \alpha$, co kończy dowód.

c) Funkcja *Π(x)* jest malejąca. Wykażemy, że dla $x < x'$ zachodzi $\Pi(x') < \Pi(x)$, gdzie *x* oznacza długość odcinka *OX*, *x'* długość odcinka *OX'*.
Weźmy prostą równoległą *l* w odległości *x=OX* od prostej *a*. Z punktu *X'* poprowadźmy prostą *d* pod tym samym kątem α co prosta *l*.
Ponieważ proste *l* i *d* są przecięte prostą prostopadłą do *a* pod tym samym kątem zatem są one rozbieżne.



Oznacza to, że znajdziemy prostą bardziej nachyloną do *a*, która jest prostą równoległą, czyli *l'* jest prostą równoległą do *l* i *a*, natomiast kąt równoległości $\alpha' < \alpha$.

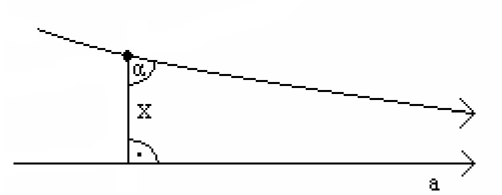
d) Funkcja jest ciągła, ponieważ jest monotoniczna i przyjmuje wartości pośrednie.■

Łobaczewski wyprowadził analityczny wzór na funkcję *Π(x)* oraz na funkcję odwrotną do *Π(x)*. Istnieje wiele różnych dowodów analitycznego wzoru na *Π(x)*, jednak wykorzystują one zagadnienia, których nie poznamy na tym wykładzie dlatego też ograniczymy się do przedstawienia wzoru. Przyjmujemy, że

$$\Pi(x) = 2\operatorname{arcctg}(e^x).$$

W geometrii Łobaczewskiego możliwe jest wyprowadzenie absolutnej jednostki długości (patrz definicja poniżej) w terminach czysto geometrycznych. Nie jest to możliwe w geometrii euklidesowej.

DEFINICJA 7.2. Absolutna jednostka długości, to taka wartość *x*, dla której wartość funkcji równoległości wynosi $\frac{\pi}{4}$.



Istnienie związków pomiędzy kątem, a jednostką mówi nam, że w geometrii hiperbolicznej nie ma figur podobnych, są jedynie figury przystające.
Korzystając z tych własności można pokazać, że na to aby na przykład trójkąty były przystające wystarczy, że mają równe kąty, co w geometrii euklidesowej oznacza jedynie tyle, że trójkąty są podobne.

DODATEK - LINIE NIEZMIENNICZE

W tej części rozdziału przedstawimy definicję dwóch obiektów charakterystycznych w geometrii nieeuklidesowej. Są to *ekwidystanty* i *horycykle.* Ścisłe przedstawienie własności horycykli i ekwidystant wymaga znajomości wielu twierdzeń geometrii hiperbolicznej oraz żmudnych dowodów, a to nie jest naszym celem. Dlatego też ograniczymy się do poglądowego przedstawienia podstawowych własności omawianych obiektów.

Omawiając geometrię absolutną nie sposób pominąć definicji ruchu. Do ruchu w geometrii absolutnej zaliczamy: obrót wokół ustalonego punktu i przesunięcie czyli translację.

DEFINICJA 7.2. ***Ruch***

Przekształcenie, które przeprowadza zbiór punktów Ω na zbiór punktów Ω' i dla każdej pary $A, B \in \Omega$ przechodzącej odpowiednio na $A', B' \in \Omega'$ spełnia warunek $AB \equiv A'B'$.

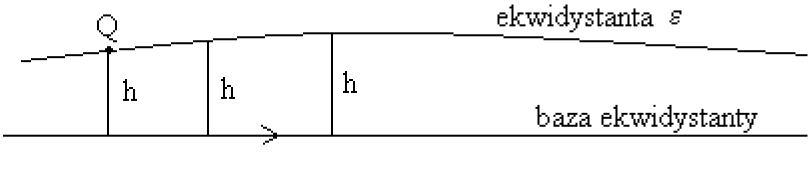
Podstawowe własności ruchu:

- *punkty współliniowe przechodzą na współliniowe;*
- *kąt i jego obraz są przystające.*

W geometrii euklidesowej łatwo możemy wskazać linie niezmiennicze przy podstawowych ruchach, czyli takie, które mogą „poruszać się po sobie". Linią niezmienniczą przy obrocie jest okrąg o środku w punkcie obrotu, natomiast przy przesunięciu o zadany wektor linią niezmienniczą jest każda prosta równoległa do prostej wzdłuż której przesuwamy. Geometria hiperboliczna pod tym względem jest bogatsza, poza okręgiem i prostą jako linię niezmienniczą wyróżniamy jeszcze: przy translacji ***ekwidystantę*** oraz przy obrocie ***horycykl***.

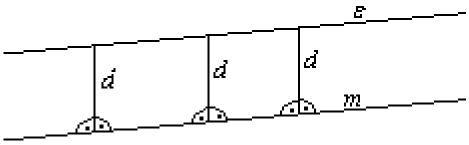
DEFINICJA 7.3. ***Ekwidystanta***

Linia złożona z punktów równooddalonych od prostej m, leżących po tej samej stronie prostej powstała za pomocą ciągłego przesunięcia zadanego punktu Q wzdłuż m nazywana jest ekwidystantą ε. Prosta, wzdłuż której przesuwamy zadany punkt Q nazywa się bazą ekwidystanty natomiast odległość punktów linii od bazy wysokością ekwidystanty.



W geometrii euklidesowej ekwidystantą jest prosta równoległa do prostej bazowej położona w odległości $d>0$ od bazy.

Zatem linii ekwidystantnych w geometrii Euklidesa jest nieskończenie wiele i ponieważ są to proste równoległe do bazy, to są przystające.



Inaczej jest na płaszczyźnie Łobaczewskieo. Ekwidystanty o tej samej wysokości są przystające, jednak przy różnych wysokościach otrzymujemy różne linie ekwidystantne. Poza tym linie ekwidystantne prostej bazowej nie są prostymi zarówno w rozumieniu euklidesowym jak i nieeuklidesowym.

TWIERDZENIE 7.9. *Własności ekwidystanty*

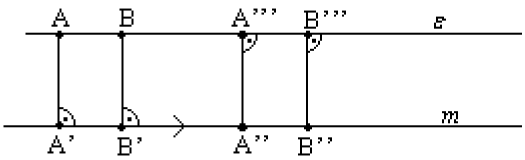
a) *Ekwidystanta ε jest niezmiennicza względem przesunięcia wzdłuż swojej bazy m.*

b) *Każda prosta ma z ekwidystantą ε co najwyżej dwa punkty wspólne.*

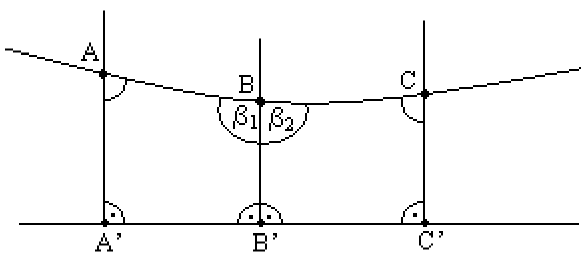
c) *Ekwidystanta ε jest wypukła względem bazy m.*

DOWÓD:

a) Pokażemy, że dla dowolnej pary punktów z ekwidystanty przy przesunięciu odległość między nimi zostanie zachowana. Bierzemy dwa punkty *A* i *B* na ekwidystancie, a następnie rzutujemy je na bazę *m* otrzymując *A', B'* odpowiednio. Wykonując przesunięcie wzdłuż bazy *m* punkty *A', B'* przechodzą na *A''* i *B''*, które to rzutujemy na ekwidystantę. Otrzymujemy w ten sposób odcinek *A'''B'''* o tej samej długości co odcinek *AB*.



b) Przypuśćmy, że istnieje prosta, która ma z ekwidystantą trzy punkty wspólne *A, B, C.* Rzutując te punkty na bazę *m* ekwidystanty otrzymujemy punkty *A', B'* i *C'*. Zauważmy, że czworokąty *ABA'B'* oraz *BCC'B'* są czworokątami Saccheriego, czyli kąty β_1, β_2 są ostre. Ale $\beta_1 + \beta_2 = \pi$ co daje sprzeczność.



c) Wypukłość wynika wprost z rozumowania przeprowadzonego w podpunkcie *b*. Gdyby linia ekwidystanta nie była wypukła to miałaby przynajmniej trzy punktu wspólne z prostą, co jest niemożliwe.

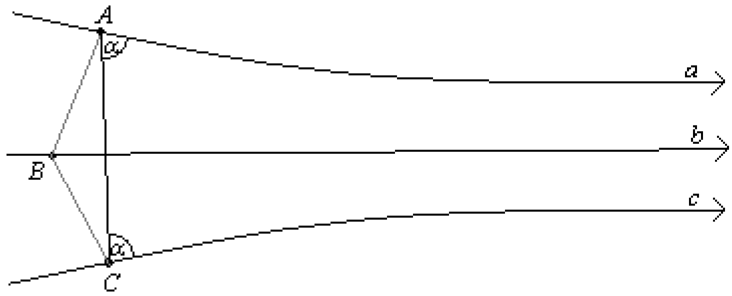
HORYCYKL

Horycykl jest linią niezmienniczą, która przechodzi na siebie gdy obracamy ją wokół punktu w nieskończoności. Zanim jednak podamy jej szczegółową definicję musimy wskazać kilka własności siecznej jednakowego nachylenia, z których to korzystamy w definicji.

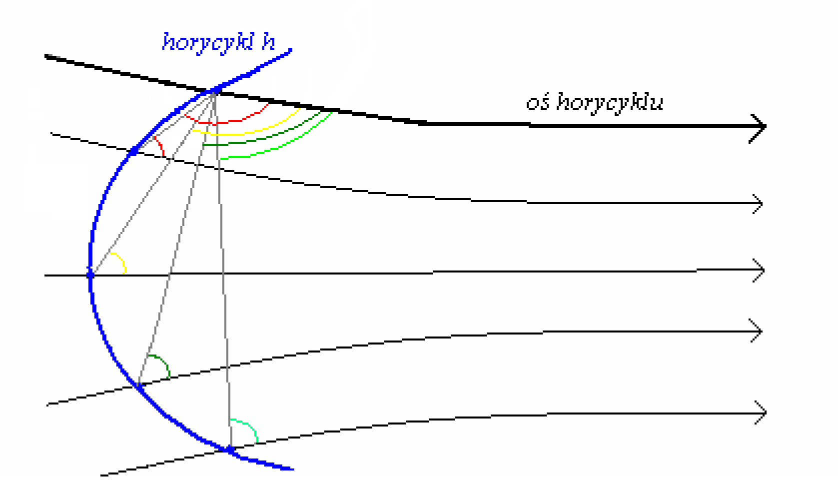
WŁASNOŚCI SIECZNEJ JEDNAKOWEGO NACHYLENIA

Przyjmujemy bez dowodu następujące własności:

1) Dla każdych dwóch prostych równoległych w jedną stronę przez każdy punkt przechodzi dokładnie jedna sieczna jednakowego nachylenia do drugiej.
2) Dla trzech prostych równoległych w tę samą stronę, jeżeli *AB* jest sieczną jednakowego nachylenia do *a* i *b* oraz *BC* jest sieczną jednakowego nachylenia do *c* i *b* to wówczas *AC* jest sieczną jednakowego do *a* i *c*.



DEFINICJA 7.4. ***Horycykl***
Dane są proste równoległe w tę samą stronę, czyli proste schodzące się w punkcie w nieskończoności. Jedna z prostych jest osią horycyklu, na której wybieramy dowolny punkt. Do horycyklu zaliczamy wszystkie punkty należące do innych prostych z pęku prostych równoległych, które tworzą sieczną jednakowego nachylenia z wybranym punktem z osi. Horycykl przypomina trochę okrąg, można też zdefiniować go jako miejsce geometryczne punktów powstających z pewnego ustalonego punktu przez obrót wokół punktu w nieskończoności.



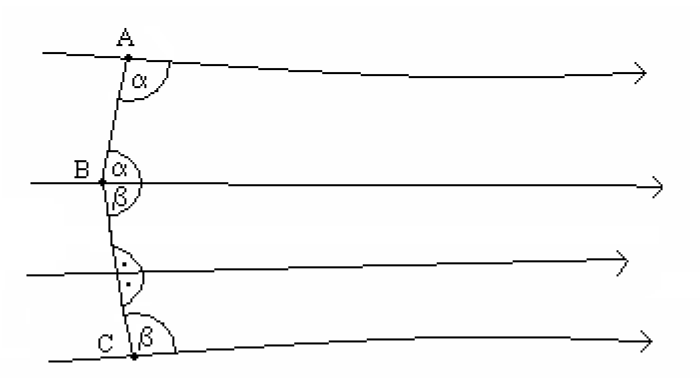
Horycykl podobnie jak okrąg i ekwidystanta może "poruszać się po sobie". Ruchem, przy którym horycykl ślizga się po sobie, podobnie jak okrąg przy obrotach dookoła jego środka, jest obrót dookoła środka horycyklu, czyli punktu w nieskończoności do którego zbiegają proste równoległe.

WŁASNOŚCI HORYCYKLU

a) Horycykl *h* jest wyznaczony przez prostą nazywaną osią horycyklu i punkt.
Punkty horycuklu są równouprawnione, to znaczy każdy punkt może tworzyć horycykl, a każda prosta z pęku prostych równoległych jest jego osią.

b) Każda prosta równoległa do osi horycyklu w przyjętym kierunku przecina horycykl w jednym punkcie i jest jego osią.
(wynika to z jednoznaczności siecznej jednakowego nachylenia)

c) Każda prosta ma z horycyklem *h* co najwyżej dwa punkty wspólne.
Jeżeli prosta miałaby z horycyklem trzy punkty wspólne *A, B i C* wtedy $\beta + \alpha = 180^0$ i zachodzi sprzeczność, ponieważ kąty β i α są mniejsze od 90^0.



d) Horycykl *h* jest krzywą wypukłą względem punktu w nieskończoności.

e) Wszystkie horycykle są przystające.
Horycykle współśrodkowe są w przeciwieństwie do okręgów współśrodkowych przystające. Dzieje się tak, dlatego że pęk prostych równoległych skierowanych w tę samą stronę można nałożyć na inny dowolny pęk prostych równoległych w zadaną stronę. Czyli rozpatrując wielkość i kształt, a nie położenie horycyklu na płaszczyźnie okazuje się, że istnieje tylko jeden horycykl. W geometrii euklidesowej własność taką ma prosta, istnieje tylko jedna prosta, inne są do niej przystające. Zatem możemy analogicznie do liniału w geometrii euklidesowej, skonstruować liniał horycyklowy i posługiwać się nim w konstrukcjach.

Różnorodność form geometrycznych w geometrii hiperbolicznej, bo obok okręgu i prostej pojawiły się dodatkowo ekwidystanty i horycykle, czyni ją bogatszą od geometrii euklidesowej i stwarza możliwości rozwoju nowych nie znanych nam w dotychczasowej geometrii zagadnień.

ROZDZIAŁ 8

Niesprzeczność geometrii Łobaczewskiego

Twórcy geometrii nieeuklidesowej Bolyai i Łobaczewski zostali docenieni po śmierci, a prawdziwe uznanie nadeszło dopiero w drugiej połowie XIX wieku gdy wykazano, że geometria hiperboliczna jest niesprzeczna. Modeli spełniających aksjomaty geometrii nieeuklidesowej świadczących o niesprzeczności jest wiele. W wykładzie ograniczymy się do przestawienia jednego modelu, a będzie nim model półpłaszczyznowy Poincarego. Model Poincarego jest modelem geometrii nieeuklidesowej, który został zbudowany w geometrii euklidesowej. Oznacza to, że model Poincarego zbudowany jest z pojęć geometrii euklidesowej i jednocześnie spełnia wszystkie aksjomaty geometrii Łobaczewskiego.

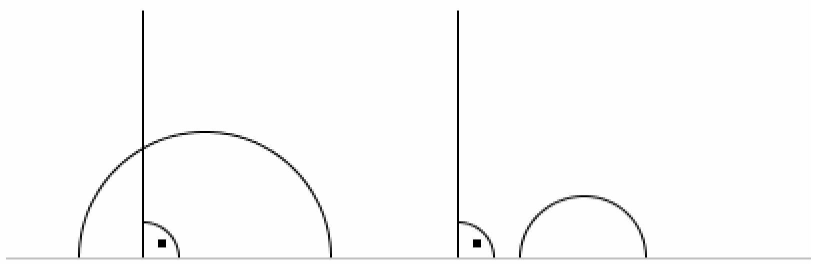
Pojęcia pierwotne w półpłaszczyznowym modelu Poincarego

Podamy interpretację pojęć pierwotnych oraz uzupełnimy ten opis komentarzami niezbędnymi w dalszym posługiwaniu się wymienionymi pojęciami w modelu.
Idea powstania modelu jest następująca. Bierzemy płaszczyznę euklidesową oraz prostą x, która dzieli płaszczyznę na dwa obszary. Wybieramy jeden z nich bez prostej x i nazywamy go płaszczyzną hiperboliczną.

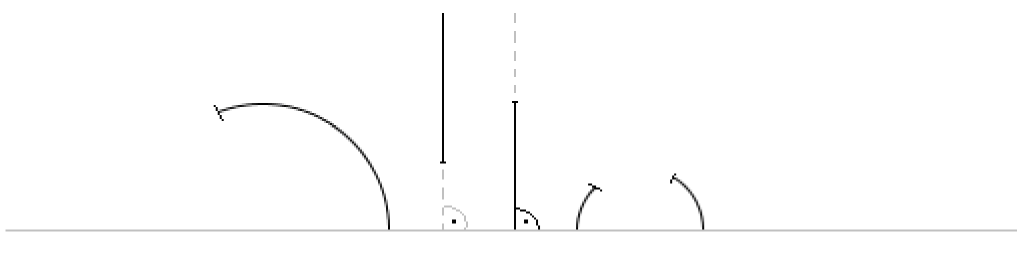
Punkt – punkty są punktami z płaszczyzny euklidesowej, czyli punktami w rozumieniu euklidesowym. Zbiorem wszystkich punktów w modelu jest płaszczyzna hiperboliczna H bez brzegu postaci $\{(x, y) \in R^2 : y > 0\}$.

Proste – wyróżniamy dwa rodzaje prostych:

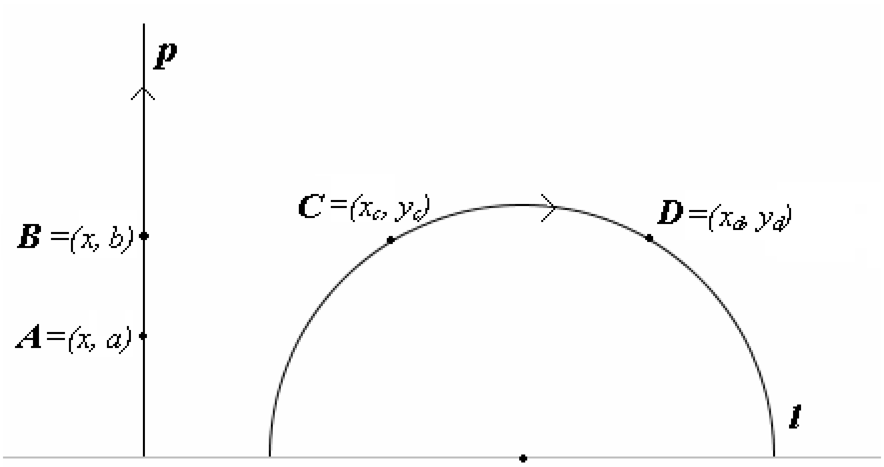
1. półproste euklidesowe prostopadłe bo brzegu, czyli do ograniczającej prostej,
2. półokręgi zawarte w płaszczyźnie hiperbolicznej o środkach na brzegu.



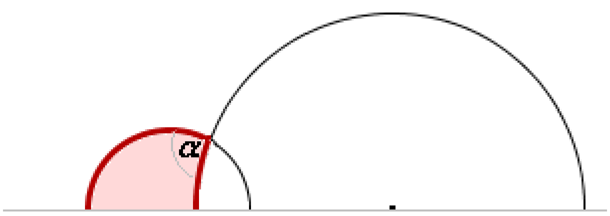
Półproste w modelu wyglądają jak na rysunku poniżej.

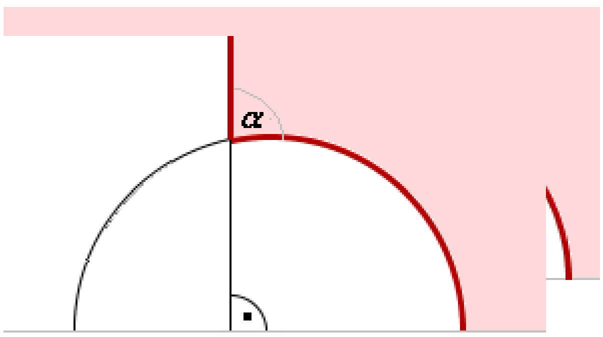


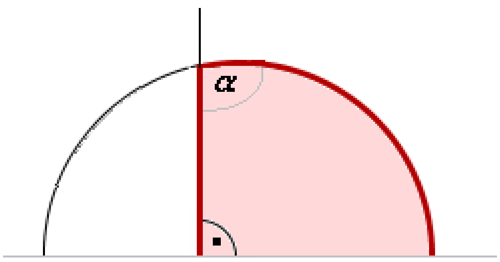
Relacja należenia – interpretowana jest w sposób naturalny i jest taka sama jak w geometrii euklidesowej.
Relacja porządku – na każdej prostej wyróżniamy kierunek (jak na rysunku) i względem niego w naturalny sposób zachodzi relacja porządku. Jeżeli posłużymy się współrzędnymi punktów z arytmetycznego modelu Hilberta to otrzymujemy, że:
$A <_p B \Leftrightarrow a < b$ oraz $C <_l D \Leftrightarrow x_c < x_d$.



Kąty – przykładowe kąty na płaszczyźnie hiperbolicznej przedstawiają poniższe rysunki:

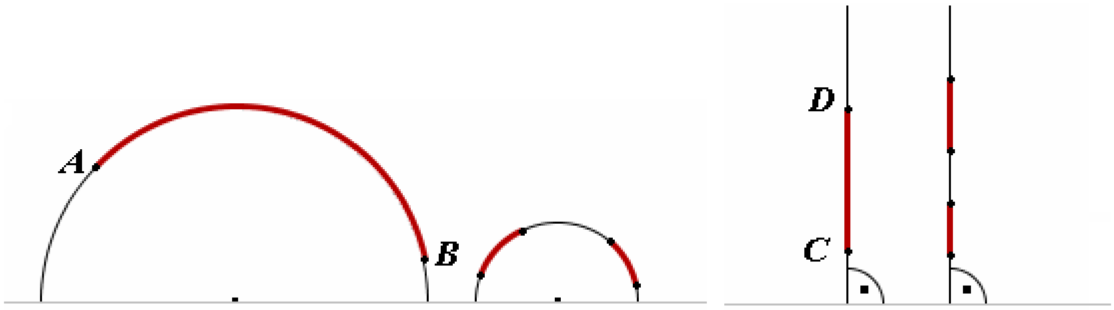






Miary kątów - miary katów na płaszczyźnie hiperbolicznej to euklidesowe miary kątów pomiędzy euklidesowymi stycznymi do półprostych w punkcie przecięcia.

Odcinki – wyróżniamy dwa rodzaje odcinków na płaszczyźnie hiperbolicznej (jak na rysunku): odcinki zawarte w półokręgach oraz odcinki leżące na prostych prostopadłych do brzegu:



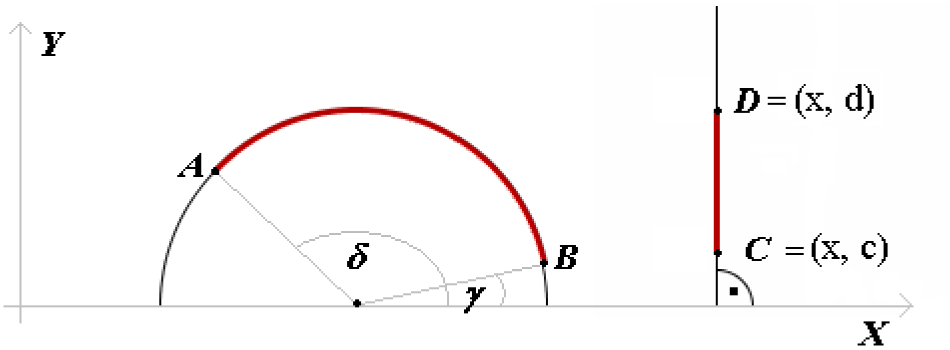
Miary odcinków – długość odcinka o początku w punkcie C i końcu w punkcie D, zawartego w prostej prostopadłej do brzegu, wynosi:

$$m(CD) = \left|\ln\left(\frac{d}{c}\right)\right|,$$

gdzie *(x, c)* i *(x, d)* są euklidesowymi współrzędnymi punktów C i D odpowiednio.

Tak podany wzór określa miarę odcinka CD i nie zależy od kolejności punktów. Wynika to z własności logarytmu:

$$m(CD) = \left|\ln\left(\frac{d}{c}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{c}{d}\right)^{-1}\right| = \left|-\ln\left(\frac{c}{d}\right)\right| = \left|\ln\left(\frac{c}{d}\right)\right|.$$



Długość odcinków zawartych w półokręgach określa się wzorem:

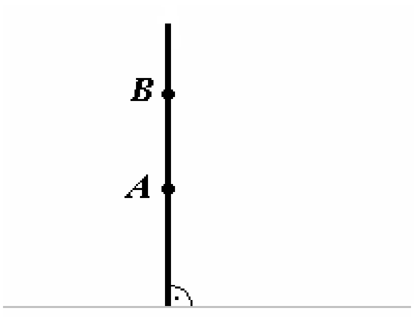
$$m(AB) = \left|\ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}}\right)\right|,$$

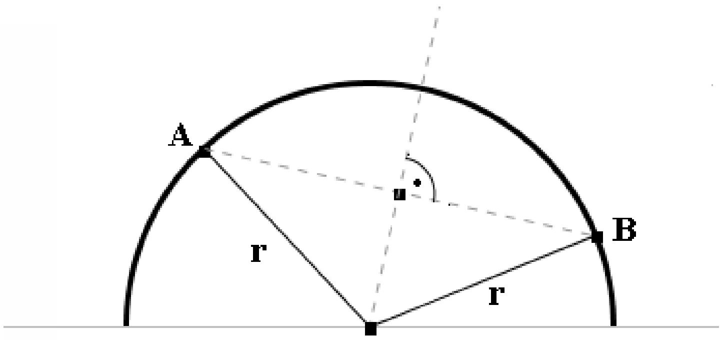
gdzie δ *i* γ są euklidesowymi kątami. Podobnie jak w pierwszym przypadku miara odcinka AB leżącego na prostej l nie zmienia się jeżeli rozważamy odcinek BA, czyli punkty B i A są położone na prostej l w następującej kolejności: $B <_l A$.

SPEŁNIANIE AKSJOMATÓW GEOMETRII NIEEUKLIDESOWEJ

Aksjomaty incydencji

I1 – Dla dowolnych dwóch różnych punktów *A* i *B* istnieje tylko jedna prosta przechodząca przez te punkty. Jeżeli punkty *A* i *B* są położone jak na rysunku1, to jedyna prosta zawierająca te punkty to prosta prostopadła do brzegu.



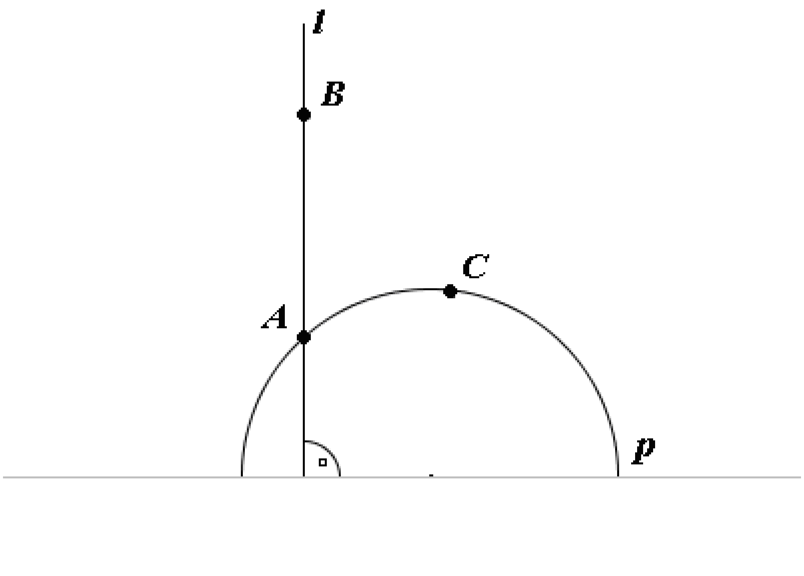


rysunek1 rysunek2

Jeżeli natomiast są w innym położeniu (rysunek2), to prowadzę euklidesową symetralną odcinka *AB*, która jednoznacznie wyznacza środek i długość promienia okręgu. ■

I2 – Na każdej euklidesowej półprostej i półokręgu leżą przynajmniej dwa punkty, zatem rozpatrując te obiekty jako proste w modelu Poincarego również zawierają przynajmniej po dwa punkty. ■

I3 – Rozważmy prostą *l* i prostą *p* oraz punkty *A, B, C* jak na rysunku. Wówczas nie jest możliwe by istniał półokrąg lub półprosta prostopadła do brzegu zawierająca jednocześnie punkty *A, B, C*.



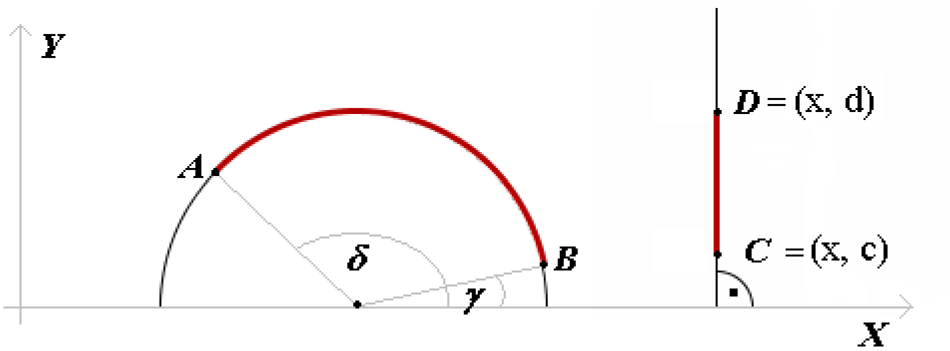
■

Aksjomaty porządku

Ponieważ model Poincarego zanurzony jest w płaszczyźnie euklidesowej zatem porównując euklidesowe współrzędne punktów i określając porządek tak jak w arytmetycznym modelu Hilberta natychmiast otrzymujemy, że pierwszy aksjomat porządku jest spełniony. Uzasadnienie, że aksjomat Pascha jest spełniony pomijamy.

Aksjomaty miary odcinków

M1 – wyróżniamy dwa typy odcinków: *AB* i *CD* jak na rysunku.



- Dla odcinków takich jak odcinek *CD* wystarczy porównać współrzędne punktów *C* i *D*. Miara rozważanego odcinka wynosi z definicji

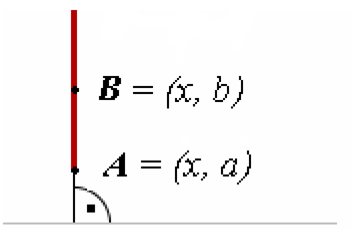
$m(CD) = \left|\ln\left(\frac{d}{c}\right)\right|$. Z faktu, że $d \neq c$ oraz wartości bezwzględnej z logarytmu otrzymujemy, że miara odcinka jest zawsze dodatnia.

- Dla odcinków typu *AB* wystarczy porównać miary kątów δ *i* γ. Rozważane kąty są z przedziału $(0, \pi)$. We wzorze na miarę odcinka rozpatrujemy $\frac{\delta}{2}$ *i* $\frac{\gamma}{2}$ czyli kąty z przedziału $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Ponieważ funkcja tangens przyjmuje wartości dodatnie na przedziale $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ oraz $\frac{\delta}{2} \neq \frac{\gamma}{2}$ to

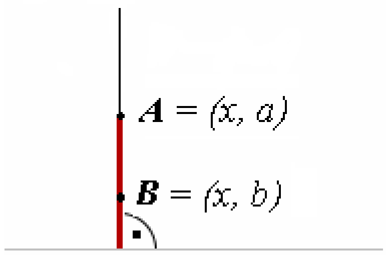
$$m(AB) = \left|\ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}}\right)\right| > 0\,. \qquad \blacksquare$$

M2 – rozważyć należy cztery przypadki półprostych:

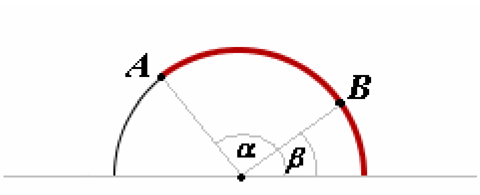
1)



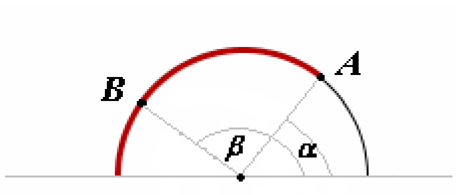
2)



3)



4)



Pokażemy, że w 1) i 3) aksjomat M2 jest spełniony. Uzasadnienie dla pozostałych przypadków jest analogiczne jak przeprowadzone rozumowania w 1) i 3), dlatego je pomijamy.

Przypadek 1: Szukamy punktu *B=(x, b)* gdzie *b>a,* takiego by miara odcinka *AB* wynosiła ustaloną wielkość *d*. Zatem musimy dobrać takie *b*, by zachodziła równość $\ln\left(\frac{b}{a}\right) = d$. Podstawiając $b = a \cdot e^{d}$ do wzoru na długość odcinka *AB* zachodzi równość.

Przypadek 3: Dany jest punkt *A* na zadanej półprostej i wielkość *d*. Należy znaleźć punkt *B* taki by *m(AB) = d*. Zadanie sprowadza się do wyznaczenia miary kąta β, ponieważ wielkość ta jest jedyną niewiadomą we wzorze na długość odcinka *AB*. Zauważamy, że α > β zatem opuszczając wartość bezwzględna we wzorze na długość odcinka musimy zmienić znak na przeciwny. Otrzymujemy:

$$m(AB) = \left|\ln\left(\frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}}\right)\right| = -\ln\left(\frac{tg\frac{\beta}{2}}{tg\frac{\alpha}{2}}\right) = \ln\left(\frac{tg\frac{\alpha}{2}}{tg\frac{\beta}{2}}\right) = d\,.$$

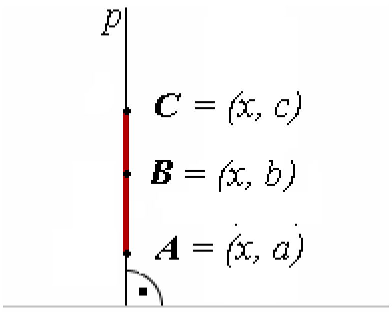
Znamy miarę kąta α, zatem niech $tg\frac{\alpha}{2} = a$.

Otrzymujemy wówczas, że $tg\frac{\beta}{2} = a \cdot e^{-d}$ czyli szukany kąt $\beta = 2arctg\left(a \cdot e^{-d}\right)$. ■

M3 – Rozważymy dwa przypadki:

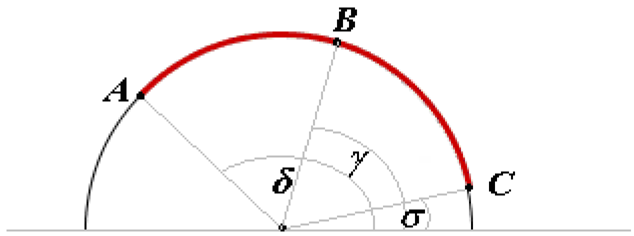
- Dla prostych *p* typu jak na rysunku poniżej otrzymujemy:

$$m(AB) = \ln\left(\frac{b}{a}\right),$$
$$m(BC) = \ln\left(\frac{c}{b}\right),$$
$$m(AC) = \ln\left(\frac{c}{a}\right).$$



Zatem $m(AB) + m(BC) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln\left(\frac{c}{b}\right) = \ln\left(\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\right) = \ln\left(\frac{c}{a}\right) = m(AC)$. ■

- Dla prostych p będących w geometrii euklidesowej półokręgami otrzymujemy:



$$m(AB) = \ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}}\right), \quad m(BC) = \ln\left(\frac{tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\sigma}{2}}\right), \quad m(AC) = \ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\sigma}{2}}\right).$$

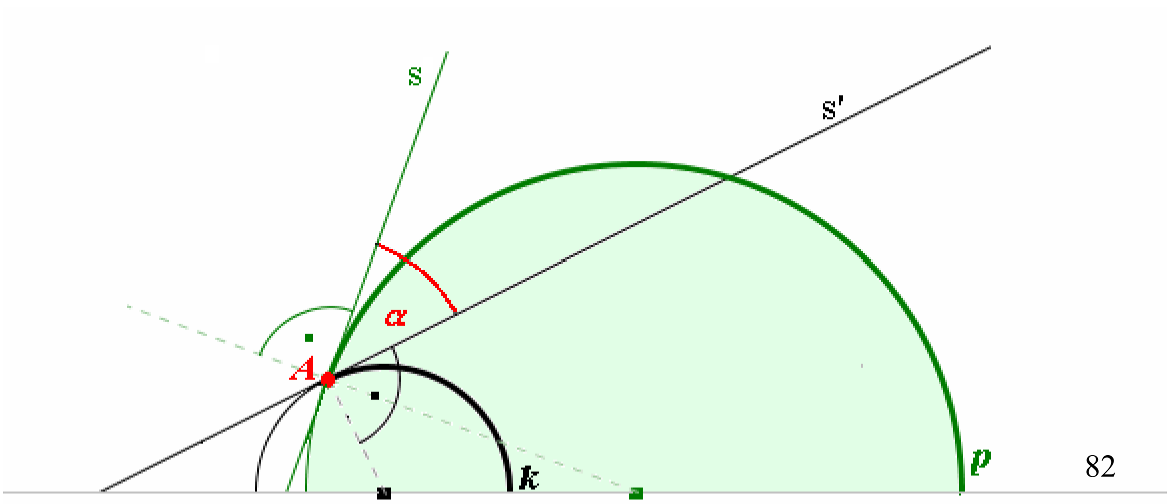
Po podstawieniu otrzymanych wielkości do wyrażenia *m(AB)* + *m(BC)* uzyskujemy szukaną równość:

$$m(AB) + m(BC) = \ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}}\right) + \ln\left(\frac{tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\sigma}{2}}\right) = \ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{tg\frac{\gamma}{2}}{tg\frac{\sigma}{2}}\right) = \ln\left(\frac{tg\frac{\delta}{2}}{tg\frac{\sigma}{2}}\right) = m(AC). \ ■$$

Aksjomaty miary kątów

K1 – kąt pomiędzy półprostymi w rozumieniu hiperbolicznym to kąt pomiędzy stycznymi euklidesowymi do półprostych w punkcie przecięcia. Zatem miara kąta w modelu jest taka sama jak na płaszczyźnie euklidesowej czyli z przedziału (0, π).■

K2 –Wyznaczamy styczną w punkcie *A* do zadanej półprostej *p* (patrz rysunek) o początku w *A*. Następnie konstruujemy euklidesową prostą *s* –styczną do *p* w punkcie *A*. W kolejnym kroku wyznaczamy prostą *s'*, która przechodzi przez punkt *A* i jest nachylona do stycznej *s* pod zadanym kątem α. Prosta *s'* jest zarazem styczną w punkcie *A* do szukanej hiperbolicznej półprostej *k*. Możemy zatem wyznaczyć promień i środek szukanego półokręgu na którym leży półprosta *k*.

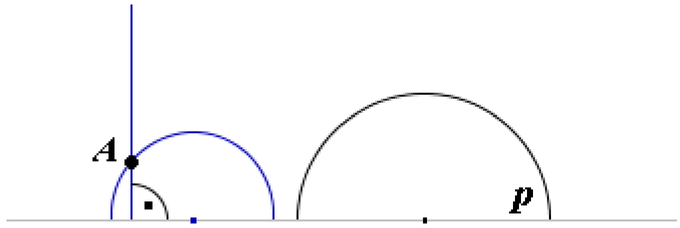


W analogiczny sposób możemy wyznaczyć dowolny kąt dla dowolnie wybranej półprostej w zadanej półpłaszczyźnie. ■

K3 – aksjomat jest spełniony w modelu, jednak jego dowód pomijamy ze względu na to, że uzasadnienie wymaga żmudnych i długich rozumowań, których charakter odbiega od treści wykładu.

Aksjomat Łobaczewskiego

Istnieje para (jak na rysunku poniżej): prosta *p* i punkt *A* nie leżący na prostej *p* przez który przechodzą co najmniej dwie proste rozłączne z zadaną.



■

Model Poincarego pokazuje, że geometria hiperboliczna rozpatrywana jako system dedukcyjny jest niesprzeczna. Jeżeli natrafilibyśmy w modelu Poincarego na sprzeczność oznaczałoby to, że geometria euklidesowa byłaby sprzeczna. Zatem prawdziwe jest następujące stwierdzenie:

Jeśli geometria euklidesowa jest niesprzeczna, to także geometria Łobaczewskiego jest niesprzeczna.

Powstaje pytanie, która z dwóch geometrii hiperboliczna czy euklidesowa ma przewagę przy opisywaniu geometrii świata fizycznego. Wspomnieliśmy w rozdziale piątym, że doświadczalnie nie możemy rozstrzygnąć tej kwestii. Próby Gaussa znalezienia trójkąta o niezerowym defekcie nie powiodły się, ale wykazały, że geometrie euklidesowa i hiperboliczna są zbliżone dla stosunkowo małych figur, na tyle że empirycznie są równoważne. Myślę więc, że najlepszą odpowiedzią na to pytanie są słowa Poincar'ego:

„Jedna geometria nie może być prawdziwsza od drugiej; może być tylko wygodniejsza."[2]

[2] H. Poincare, Science and Hypothesis, New York 1952r.

Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe

Lista 1. Aksjomaty pola wielokątów.

1. Posługując się aksjomatami pola oraz wywiedzionymi z aksjomatów(na wykładzie) własnościami, a także znanymi z geometrii własnościami figur, wyprowadź wzory na pole: (a) równoległoboku, (b) trójkąta, (c) trapezu. W przypadku trudności z przypadkiem ogólnym zacznij od przypadków łatwiejszych: równoległoboku, o bocznych krawędziach nie za bardzo pochylonych, trójkąta prostokątnego, trójkąta i trapezu równoramiennego. W poszczególnych podpunktach tego zadania możesz też skorzystać z podpunktów poprzednich.
2. Zbadaj, które aksjomaty pola są spełnione, a które nie są, przez poszczególne funkcje P_i opisane poniżej:

a) $P_1(W) := 1$ dla każdej figury W;

b) $P_2(W) := \frac{1}{4} \cdot O(W)$, gdzie *(OW)* jest obwodem figury W;

c) niech C będzie ustalonym okręgiem na płaszczyźnie i niech $P_3(W)$ będzie długością tej części okręgu C, która jest zawarta w W;

d) rozważmy na płaszczyźnie *punkty kratowe,* tzn. punkty mające w pewnym ustalonym układzie współrzędnych obie współrzędne całkowite i niech $P_4(W) := w + \frac{1}{2}b - 1$, gdzie w jest ilością punktów kratowych leżących wewnątrz W, zaś b ilością punktów kratowych na brzegu W;

3. Uzasadnij, że zastępując jeden z aksjomatów pola innym aksjomatem jak poniżej otrzymamy równoważny układ aksjomatów:
   a) aksjomat jednostki aksjomatem: pole ustalonego kwadratu o boku 2 wynosi 4;
   b) aksjomat monotoniczności aksjomatem : $P(W) \geq 0$ dla każdego wielokąta W;
   c) aksjomat przystawania słabszym aksjomatem przystawania trójkątów: przystające trójkąty mają równe pola;
   d) aksjomat jednostki aksjomatem: pole ustalonego trójkąta równobocznego o boku 1 wynosi $\frac{\sqrt{3}}{4}$.
4. Uzasadnij, że następujących stwierdzeń nie da się udowodnić bez odwołania się do aksjomatu przystawania (a więc wyłącznie na podstawie trzech pozostałych aksjomatów pola):

a) każdy kwadrat jednostkowy ma pole 1;

b) pole trójkąta powstałego z podziału dowolnego prostokąta przekątną jest równe połowie pola tego prostokąta;

c) istnieją wielokąty o dowolnie dużych polach;

d) równoległoboki o równych podstawach i równych wysokościach mają równe pola;

e) $P(W) \geq 0$ dla dowolnego wielokąta W.

5. Uzasadnij, że stwierdzeń (b), (c), (d), i (e) z zadania 4 nie da się udowodnić bez korzystania z aksjomatu addytywności.
6. Niech P_i będzie zwykłym polem figur wielokątnych. Zbadaj, które aksjomaty pola są spełnione, a które nie są, przez poszczególne funkcje P_0 opisane poniżej:

$P_6(W) := \frac{1}{2} \cdot P_0(W) + \frac{1}{2}$;

$P_7(W) := \min(P_0(W), 1000)$;

c) ustalamy pewną półpłaszczyznę E zawierającą kwadrat jednostkowy K będący wzorcem pola (kwadrat z aksjomatu jednostki) i niech $P_8(W) := P_0(W \cap E)$.

7. Czy zastępując aksjomat sumy aksjomatem „$P(W_1 \cup W_2) \leq P(W_1) + P(W_2)$ dla dowolnych figur wielokątnych W_1 i W_2" otrzymamy równoważny układ aksjomatów?
8. Czy stwierdzenie „wśród prostokątów o ustalonym jednym boku ten, którego drugi bok jest dłuższy nie może mieć mniejszego pola" jest niezależne od układu aksjomatów:

AS, AM, AJ;
AP, AM, AJ.

9. Czy stwierdzenie :pole wielokąta jest równe połowie kwadratu średnicy tego wielokąta" (gdzie średnica to maksymalna odległość między punktami wielokąta) można obalić za pomocą :

aksjomatów pola;
samych tylko aksjomatów AP, AM, AJ.

10. Czy układ składający się z aksjomatów AP, AJ, AS oraz z zaprzeczenia aksjomatu AS jest niesprzeczny?
11. Czy układ składający się z aksjomatów AS, AP, AJ oraz aksjomatu „pola wielokątów podobnych są sobie równe" jest niesprzeczny?
12. Czy te spośród układów aksjomatów z zadań 10 i 11, które są niesprzeczne są również zupełne?

.

Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe

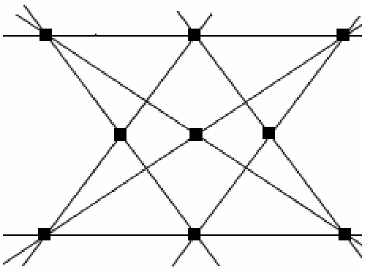
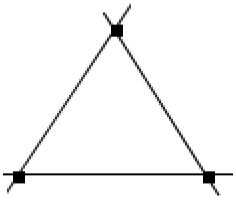
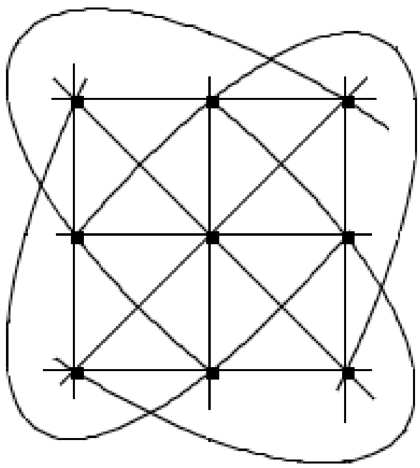
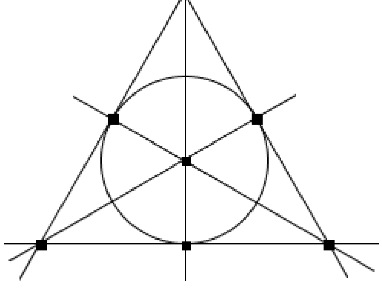
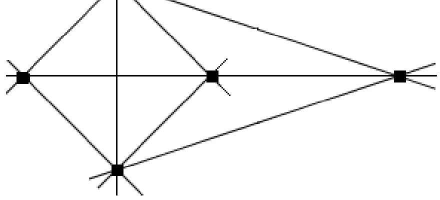
Lista 2. Aksjomaty i modele geometrii euklidesowej płaszczyzny.

1. Dla niżej wymienionych modeli płaszczyzny (i) uzupełnij precyzyjną interpretacją pojęć pierwotnych, (ii) podaj przykłady wszystkich pojęć występujących w aksjomatach a definiowanych za pomocą pojęć pierwotnych, (ii) rozstrzygnij które aksjomaty płaszczyzny euklidesowej nie są spełnione w tych modelach.

A) Punkty to liczby rzeczywiste i jest tylko jedna prosta, przy czym wszystkie punkty do niej należą.
B) Punkty to litery polskiego alfabetu, zaś proste to słowa z ustalonego słownika języka polskiego.
C) Punktami są wszyscy pracownicy w Polsce, prostymi wszystkie firmy, zaś porządek zadany jest przez podległość służbową (nie tylko bezpośrednią).
D) Punktami są punkty z wnętrza pewnego koła, zaś prostymi wnętrza cięciw tego koła; porządek na prostych, miary odcinków i miary katów są takie same jak w zwykłej geometrii.
E) Rolę płaszczyzny pełni trójwymiarowa przestrzeń, zaś pozostałe pojęcia są określone tak jak zwykłej geometrii.
F) Wszystkie pojęcia są jak w zwykłej geometrii płaszczyzny, tylko miary katów są równe połowie zwykłych miar.
G) Wszystkie pojęcia są takie jak w zwykłej geometrii płaszczyzny, tylko miary odcinków są równe zwykłym miarom podniesionym do kwadratu.

Teoria incydencji, to teoria będąca fragmentem geometrii euklidesowej, oparta tylko na aksjomatach incydencji I1-I3 oraz na aksjomacie równoległości R. Pojęciami pierwotnymi w tej teorii są tylko: punkt, prosta, relacja należenia.

2. Na poniższych rysunkach pogrubione kropki reprezentują punkty, zaś linie (zarówno proste jak owalne) reprezentują proste. Relacja należenia odpowiada leżeniu kropki na linii. Są to modele teorii incydencji. Które z tych modeli spełniają wszystkie aksjomaty teorii incydencji?

3. Uzasadnij, że poszczególne aksjomaty teorii incydencji są od siebie niezależne.

4. Czy z aksjomatów teorii incydencji wynika, że:

a) na każdej prostej leżą przynajmniej 3 punkty;
b) płaszczyzna składa się z przynajmniej czterech punktów;
c) na płaszczyźnie znajduje się przynajmniej 6 prostych;
d) przez każdy punkt przechodzą przynajmniej 3 proste;
e) dla każdej prostej istnieją przynajmniej dwie proste, które jej nie przecinają?

5. Czy teoria incydencji jest niesprzeczna? A czy jest zupełna?

6. Proste p_1 i p_2 nazywamy *równoległymi* jeśli jest to ta sama prosta lub jeśli są różne i nie mają punktów wspólnych. Uzasadnij, że:

a) relacja równoległości jest przechodnia;
b) jeśli $p \neq q$ i p przecina q, to każda prosta równoległa do p przecina q w dokładnie jednym punkcie, zaś przez każdy punkt prostej q przechodzi dokładnie jedna prosta równoległa do p;
c) jeśli $p \neq q$ to istnieje prosta r przecinająca każdą z prostych p i q w dokładnie jednym punkcie.

Podstawy geometrii i geometrie nieeuklidesowe

Lista 3. Historia rozwoju geometrii nieeuklidesowej.

Model Poincarego

Wskaż które z poniższych zdań są prawdziwe, odpowiedź uzasadnij:

odkrywcą geometrii nieeuklidesowej był Lambert;

b) David Hilbert jako pierwszy dowiódł, że geometria nieeuklidesowa jest niesprzeczna, o ile niesprzeczna jest geometria euklidesowa;

c) Saccheri był jednym z matematyków próbujących dowodzić V postulatu Euklidesa metodą nie wprost;

d) Łobaczewski przeprowadził dowód geometrii nieeuklidesowej;

e) arytmetyczny model geometrii euklidesowej dowodzi niezależności aksjomatu równoległości od pozostałych aksjomatów;

f) równoległość prostych jest pojęciem pierwotnym geometrii nieeuklidesowej;

g) niektóre twierdzenia geometrii absolutnej nie są prawdziwe w geometrii Łobaczewskiego;

h) w geometrii nieeuklidesowej na każdym trójkącie można opisać okrąg.

2. Czy następujące stwierdzenia są, w obecności pozostałych aksjomatów, równoważne (i) V postulatowi Euklidesa, (ii) aksjomatowi Łobaczewskiego:

suma kątów w dowolnym trójkącie jest nie większa niż 180^0;

b) wszystkie proste prostopadłe poprowadzone z jednego ramienia dowolnego kąta ostrego przecinają też drugie ramię;

każde dwie proste nieprzecinające się mają tylko jedną wspólną prostopadłą.

3. Czy w geometrii nieeuklidesowej defekt trójkąta może być zarówno ujemny jak i dodatni?

4. Wskaż proste asymptotyczne do prostej „pionowej” w modelu Poincarego. Czy są to wyłącznie proste „pionowe”?

Wskaż w modelu półpłaszczyznowym Poincarego:

a) trzy proste, z których każde dwie znajdują się po tej samej stronie trzeciej prostej;
b) kąt rozwarty, którego obszar jest zawarty w obszarze pewnego kata ostrego;
c) kąt ostry oraz prostą hiperboliczną leżącą w jego wnętrzu, taką że nie przecina żadnego z ramion kąta;
d) prostą prostopadłą do jednego ramienia kąta ostrego i nie przecinającą drugiego ramienia.

Uzasadnij, że przez wybrany punkt prostej przechodzi dokładnie jedna prosta prostopadła.

Uzasadnij, że dwie proste asymptotyczne nie mają żadnej wspólnej prostopadłej.

Wskaż w modelu półpłaszczyznowym Poincarego trójkąt taki, że proste zawierające jego wysokości nie przecinają się.

Wskaż na półpłaszczyźnie Poincarego pięciokąt mający pięć kątów prostych.

10. W modelu Poincarego znajdź taki przykład czworokąta o trzech nieeuklidesowych kątach prostych, dla którego potrafisz uzasadnić, że czwarty kąt jest ostry. Podaj to uzasadnienie.

11. Prostopadłe do ramion kąta prostego na płaszczyźnie nieeuklidesowej poprowadzone z punktów odległych od wierzchołka o 2 na jednym i o x na drugim ramieniu są prostymi asymptotycznymi. Oblicz x w przypadku, gdy wierzchołek kąta znajduje się w punkcie (1, 1) w modelu Poincarego.

Bibliografia:

- S. Kulczycki – „Geometria nieeuklidesowa", PWN, Warszawa, 1960
- M. Kordos, L. Włodarski – "O geometrii dla postronnych", PWN, Warszawa,1981r.
- H .S. M. Coeter – „Wstęp do geometrii dawnej i nowej", PWN, Warszawa, 1967r.
- K. Borsuk, W. Szmielew – „Podstawy geometrii", PWN, Warszawa, 1970r.
- R. Courant, H. Robbins, I. Stewart – „Co to jest matematyka", Prószyński i S-ka, Warszawa, 1998r.
- W. Bieńko – „Zygzakiem przez matematykę", PZWS, Warszawa, 1965r.
- M. Kordos – „Wykłady z historii matematyki", WSiP, Warszawa, 1994r.
- „Encyklopedia szkolna, Matematyka", WSiP, Warszawa, 1990r.
- W. Wędrychowski, M. Kordos – „Szkoła geometrii. Odczyty Kaliskie", WSiP, Warszawa, 1993r.