

Aksjomaty geometrii euklidesowej wg Davida Hilberta, 1899 r.
(nieco zmodyfikowane)

Pojęcia pierwotne:

1. punkt,
2. prosta,
3. relacja należenia (dla par punkt–prosta), oznaczana symbolem \in ,
4. relacja porządku dla punktów z dowolnej prostej p , oznaczana symbolem $<_p$,
5. miara odcinków, oznaczana symbolem m ,
6. miara kątów, oznaczana symbolem μ .

Inne pojęcia pojawiające się w treści aksjomatów są zdefiniowane za pomocą pojęć pierwotnych. Oto ich definicje:

- o dla różnych punktów A, B należących do prostej p *odcinkiem* AB nazywamy zbiór złożony z punktów A i B oraz z wszystkich punktów C takich, że $A <_p C <_p B$ lub $B <_p C <_p A$;
- o *półprostą* o początku A nazywamy każdy zbiór postaci $\{A\} \cup \{X \in p : A <_p X\}$ lub postaci $\{A\} \cup \{X \in p : X <_p A\}$, gdzie p jest dowolną prostą zawierającą punkt A ;
- o *kąt* to dwie półproste o wspólnym początku nie leżące na jednej prostej;
- o *półpłaszczyzną ograniczoną prostą* p jest każdy zbiór postaci $\{Y : Y \in p\} \cup \{C\} \cup \{X : CX \cap p = \emptyset\}$, gdzie C jest dowolnym punktem nienależącym do p .

Aksjomaty incydencji (czyli dotyczące relacji należenia)

- I1. Dla dowolnych różnych punktów A i B istnieje dokładnie jedna prosta p przechodząca przez te punkty.
- I2. Na każdej prostej leżą przynajmniej 2 punkty.
- I3. Istnieją 3 punkty nie leżące na jednej prostej.

Aksjomaty porządku

- P1. Dla punktów z dowolnej prostej p relacja $<_p$ jest relacją liniowego porządku, tzn.:
 - (a) jeśli $A <_p B$ to $A \neq B$;
 - (b) jeśli $A \in p$, $B \in p$ oraz $A \neq B$ to zachodzi dokładnie jedna z relacji $A <_p B$, $B <_p A$;
 - (c) jeśli $A <_p B$ i $B <_p C$ to $A <_p C$.
- P2. (aksjomat Moritza Pascha) Dla dowolnych niewspółliniowych punktów A, B, C oraz dowolnej prostej p nie przechodzącej przez żaden z punktów A, B, C jeśli p przecina odcinek AB to przecina też dokładnie jeden spośród odcinków BC i AC .

Aksjomaty miary odcinków

- M1. Dla każdego odcinka AB miara $m(AB)$ jest liczbą dodatnią.
- M2. Dla każdej półprostej r o początku w A i dla dowolnej liczby dodatniej d istnieje punkt $B \in r$ taki, że $m(AB) = d$.
- M3. Jeśli $A <_p B <_p C$ to $m(AB) + m(BC) = m(AC)$.

Aksjomaty miary kątów

- K1. Dla każdego kąta rs (utworzonego z półprostych r i s o wspólnym początku) miara $\mu(rs)$ jest liczbą z otwartego przedziału $(0, \pi)$.
- K2. Dla dowolnej prostej p , dowolnej półpłaszczyzny Ω ograniczonej przez p , dowolnej półprostej r zawartej w p i dowolnej liczby $\alpha \in (0, \pi)$ istnieje półprosta s zawarta w Ω tworząca wraz z r kąt rs taki, że $\mu(rs) = \alpha$.
- K3. Niech A, B, C i A', B', C' będą dwoma trójkami niewspółliniowych punktów. Jeśli $m(AB) = m(A'B')$, $m(AC) = m(A'C')$ i $\mu(BAC) = \mu(B'A'C')$ to $\mu(ABC) = \mu(A'B'C')$.

Aksjomat równoległości

- R. Jeśli punkt A nie leży na prostej p , to istnieje dokładnie jedna prosta przechodząca przez A i nie przecinająca p .