ZASTOSOWANIA POTOKÓW PÓL WEKTOROWYCH

(1) [Tranzytywność dyfeomorfizmów na punktach spójnej rozmaitości]

M spójna, $p, q \in M$. Wówczas istnieje dyfeomorfizm $f: M \to M$ taki, że $f(p) = q$.

Dowód: p można połączyć z q kawałkami gładką krzywą γ.
Dokładniej, istnieje $\gamma : [a,b] \to M$ oraz $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ t.że

- $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ jest gładkim włożeniem

  $\left(\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} \text{ różnowartościowa}, \left(\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}\right)'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a_i, a_{i+1}]\right)$
- $\gamma(a) = p$, $\gamma(b) = q$.

Dla każdego $i \in \{0, \dots, n-1\}$ skonstruujemy dyfeomorfizm $f_i : M \to M$ taki, że $f_i(\gamma(a_i)) = \gamma(a_{i+1})$.
Wówczas $f = f_{n-1} \circ \dots \circ f_1 \circ f_0$ będzie dyfeomorfizmem jak trzeba.

Dla $i \in \{0, 1, \dots n-1\}$ rozważmy pole wektorowe X_i

o nośniku zwartym, t.że $X_i\left(\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}(t)\right) = \frac{d}{dt} \gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}(t)$

dla $t \in [a_i, a_{i+1}]$

Takie pole nietrudno skonstruować za pomocą rozkładu jedności, i jest ono zupełne.
Krzywa $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ jest krzywą całkową tego pola

Zatem potok $\varphi_t^{X_i}$ tego pola spełnia warunek

$\varphi^{X_i}_{a_{i+1} - a_i}(\gamma(a_i)) = \gamma(a_{i+1})$. Bierzemy więc $f_i := \varphi^{X_i}_{a_{i+1} - a_i}$. $\square$

Ad (8)

Szkic konstrukcji: (oznaczmy $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]} = \gamma$)

- w mapie (U,φ) lokalnie $\varphi\circ\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

Ponieważ $\gamma'(t) \neq 0$

dla ustalonego t_0 możemy przyjąć, że $\gamma_1'(t_0) \neq 0$

Z tw. o funkcji odwrotnej, γ_1 jest gładko odwracalne wokół t_0

Nakładając lokalnie na $\varphi\circ\gamma(t)$ wokół t_0

dyfeomorfizm $(x_1, \dots, x_n) \to (\gamma_1^{-1}(x_1), x_2, \dots, x_n)$

w tak zmodyfikowanej mapie ψ mamy

$$\psi\gamma(t) = (t, \gamma_2(t), \dots, \gamma_n(t))$$

W mapie możemy zdefiniować lokalnie pole X jako

$$X(x_1, \dots, x_n) = [1, \gamma_2'(x_1), \dots, \gamma_n'(x_1)]$$

i wtedy zachodzi $(\psi\gamma)'(t) = X(\psi\gamma(t))$.

□

Pokrywamy obraz γ (zwarty!) skończoną rodziną otwartych zbiorów $U \subset M$ na których określone są lokalne pole X_U jak wyżej, i takich że domknięcia $cl(U)$ są zwarte.

Na $V = M \setminus im(\gamma)$ określamy pole $X_V \equiv 0$.

Rozważmy rozkład jedności $\{f_\lambda\}$ wpisany w pokrycie M za pomocą zbiorów U oraz zbioru V (w ten sposób że $supp(f_\lambda) \subset U_\lambda$) oraz definiujemy

$$X = \sum_\lambda f_\lambda \cdot X_{U_\lambda}.$$

Mamy $supp\, X \subset \bigcup cl(U)$ - zwarty. □

(2) Wyprostowanie pola wektorowego. 9

LEMAT. Niech $X \in \mathcal{T}^\infty(TM)$, $p \in M$, $X(p) \neq 0$. Wówczas istnieje mapa $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ na otoczeniu punktu p taka, że pole X w tej mapie wyraża się wzorem $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$.

UWAGA: Wyrażenie pola $X \in \mathcal{T}^\infty(TM)$ w mapie $\varphi: U \to \mathbb{R}^n$ to zapisanie pola $d\varphi(X) = d\varphi|_{\varphi^{-1}(u)}(X(\varphi^{-1}(u)))$ dla $u \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ w postaci

$$\sum_{i=1}^{n} X_i(u) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(u).$$

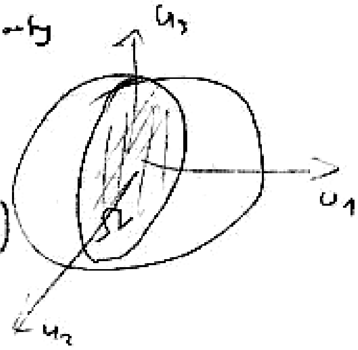
dowód: ponieważ problem jest lokalny wokół p, więc rozważając go w dowolnej mapie wokół p możemy od razu przyjąć, że X jest polem wektorowym na $U \subset \mathbb{R}^n$, $X = \sum X_i(u) \frac{\partial}{\partial x_i}(u)$, przy czym założymy że punktowi $p \in M$ odpowiada punkt $u_0 \in U$, $u_0 = (0, \dots, 0)$.

Przyjmijmy że $X_1(u_0) \neq 0$ (bo $X(u_0) \neq 0$).

Niech φ_t^X oznacza lokalny potok wokół u_0, tzn. — $U_0 \subset U$ małe otoczenie u_0

$$\varphi_t^X(u) = \Phi(t,u), \text{ gdzie } \Phi: (-\varepsilon, \varepsilon) \times U_0 \to U,\ \Phi(0,u) = u,\ \frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,u) = X(\Phi(t,u))$$

Niech $\Omega = \{(u_2, \dots, u_n) : (0, u_2, \dots, u_n) \in U_0\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, otwarty



Rozważmy $F: \Omega \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ określone przez

$$F(t, (u_2, \dots, u_n)) = \varphi_t^X(0, u_2, \dots, u_n) = \Phi(t, (0, u_2, \dots, u_n))$$

Jakobian
$$DF(0, \dots, 0) = \begin{pmatrix} X_1(u_0) & 0 & \cdots & 0 \\ X_2(u_0) & 1 & & 0 \\ & 0 & & \vdots \\ & \vdots & & 0 \\ X_n(u_0) & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det[DF(0,0,\dots,0)] = X_1(u_0) \neq 0$$

Zatem na otoczeniu $(0,0,\dots,0)$ F jest dyfeomorfizmem.

Potraktujmy F^{-1} jako nową mapę wokół $u_0 = (0, \dots, 0)$

Twierdzę że $dF^{-1}(X) = \frac{\partial}{\partial t}$, a dokładniej

$$\left(dF|_{(t,u_2,u_n)}\right)^{-1}\left(X\left(F(t,u_2,\dots,u_n)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial t}(t,u_2,\dots,u_n)$$

Tak jest, ponieważ

$$\left(dF|_{(t,u_2,\dots,u_n)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}(t,u_2,u_n)\right) = \frac{d}{dt}F(t,u_2,\dots,u_n) = \frac{d}{dt}\varphi_t^X(0,u_2,\dots,u_n) = X\left(\varphi_t^X(0,u_2,\dots,u_n)\right) =$$

$$= X\left(F(t,u_2,\dots,u_n)\right). \quad \square$$

3) Zastosowanie: otoczenie kołnierzowe brzegu zwartej rozmaitości.

M - zwarta, $\partial M \neq \phi$, [otoczenie kołnierzowe to otwarte otoczenie U brzegu ∂M w M wraz z dyfeomorfizmem $F: [0,1) \times \partial M \to U$ takim, że $F(0,x) = x$]

X pole wektorowe na M, na ∂M skierowane do wewnątrz M

[oznacza to, że w mapach $\varphi: U_p \to \mathbb{R}^n_+$ wokół punktów $p \in \partial M$, gdzie $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1 \geq 0\}$, X ma postać
$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} X_i(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{gdzie } X_1(0, x_2, \ldots, x_n) > 0$$
]

- $\forall p \in \partial M$ istnieje (lokalna) krzywa całkowa $\gamma: [0, \varepsilon) \to M$ pola X o początku w p (tzn. $\gamma(0) = p$).

  Ponadto, każdy $p \in \partial M$ ma otoczenie U_p t.że istnieje $\varepsilon > 0$ oraz gładkie $\Phi_p: [0, \varepsilon) \times U_p \to M$ t.że $t \mapsto \Phi_p(t, p)$ jest krzywą całkową pola X o początku w p, $\forall p \in U_p$.

- Ze zwartości M, lokalne jednostronne rozwiązania można dowolnie przedłużyć, otrzymując gładkie
$$\Phi: [0, \infty) \times M \to M$$
  t.że $t \to \Phi(t, X)$ są krzywymi całkowymi pola X

- Określmy $F: [0, \infty) \times \partial M \to M$, $F(t,p) = \Phi(t,p)$

- F ma rząd maksymalny we wszystkich punktach $(0, p)$ bo macierz Jakobianu w mapie ma postać
$$DF_{(0,p)} = \begin{pmatrix} X_1(p) & 0 & \\ \vdots & 1 & 0 \\ X_n(p) & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det DF_{(0,p)} = X_1(p) > 0$$

• Zatem $\exists \varepsilon > 0$: $\quad$ obcięcie $F : [0, \varepsilon) \times \partial M \to M$

jest gładkie i ma w każdym punkcie rząd n

Jeśli pokażemy, że $F|_{[0,\varepsilon)\times\partial M}$ jest różnowartościowe,

to będzie dyfeomorfizmem na otwarte otoczenie ∂M,

które będzie szukanym otoczeniem kołnierzowym.

• RÓŻNOWARTOŚCIOWOŚĆ :

Niech $F(p_1, t_1) = F(p_2, t_2)$ i załóżmy, że $t_1 \geqslant t_2$

* wówczas, z jednoznaczności krzywych całkowych,

$F(p_1, t_1 - t_2) = F(p_2, 0) = p_2$

* gdyby $t_1 > t_2$

to mamy krzywą całkową $\gamma : [0, t_1 - t_2] \to M$

Zadaną przez $\gamma(t) = F(p_1, t)$

przy czym $\gamma(t_1 - t_2) = p_2$;

to jest niemożliwe, bo z punktu $p_2 \in \partial M$ nie da się

poprowadzić krzywej całkowej „wstecz".

* zatem $t_1 = t_2$, $F(p_1, t_1 - t_2) = F(p_1, 0) = p_1$,

czyli $p_2 = p_1$. $\square$

INTERPRETACJA PÓL WEKTOROWYCH JAKO DERYWACJI

Def. Derywacja (lub różniczkowanie) w punkcie $p \in M$ to operator $L_p : \{$funkcje gładkie określone na otoczeniach otwartych $p\} \longrightarrow \mathbb{R}$

(1) liniowy, tzn. $L_p(f+g) = L_p(f) + L_p(g)$ oraz $L_p(c \cdot f) = c \cdot L_p(f)$

(2) spełniający regułę Leibnitza

$$L_p(f \cdot g) = f(p) \cdot L_p(g) + g(p) \cdot L_p(f).$$

UWAGA: Należy rozumieć, że $f+g$, $f \cdot g$ są określone na przecięciu dziedzin f, g.

UWAGA. Ponieważ wszystko dzieje się w pobliżu p, możemy (wyrażając wszystko w ustalonej mapie wokół p) założyć że $M = \mathbb{R}^n$ oraz $p = (0, \dots, 0)$.

PRZYKŁAD

Niech $X \in T_pM$. Wówczas pochodna w kierunku X jest przykładem derywacji w punkcie p. $\left(L_p(f) := X \cdot f\right)$.

Ogólne własności derywacji L_p

WŁ 1. Niech 1_V oznacza funkcję stałą równą 1 na otoczeniu V punktu p.

Wówczas $L_p(1_V) = L_p(1_V \cdot 1_V) = 1_V L_p(1_V) + 1_V L_p(1_V) = 2 L_p(1_V)$.

Zatem $L_p(1_V) = 0$.

Jeśli c_V oznacza funkcję stałą równą C na otoczeniu p, to dzięki liniowości L_p mamy $L_p(c_V) = c \cdot L_p(1_V) = c \cdot 0 = 0$.

Zatem każda derywacja L_p przyjmuje wartość 0 na funkcjach stałych.

WŁ 2. $f : U \to \mathbb{R}$, $p \in U$, $p \in V \subset U$, to $L_p(f) = L_p(f|_V)$. $[f|_V = f + 0_V]$

WN. Jeśli f, g pokrywają się na otoczeniu p to $L_p(f) = L_p(g)$.

LEMAT. Dowolna gładka funkcja f określona na kuli wokół $p = (0, \dots, 0)$ w $\mathbb{R}^n$ przedstawia się w postaci $f(x_1, \dots, x_n) = f(x) = f(0) + \sum_i x_i \cdot h_i(x)$, gdzie h_i są gładkimi funkcjami takimi, że $h_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)$ dla $i = 1, \dots, n$.

dowód: Dla ustalonego $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)\,dt = \sum_{i=1}^n \int_0^1 x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt =$$

$$= \sum_{i=1}^n x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt.$$ Zatem kładąc $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)\,dt$ dostajemy co trzeba. $\square$

TWIERDZENIE. Każda derywacja L_p w punkcie p jest pochodną kierunkową w kierunku pewnego wektora $X \in T_pM$. Wektor o tej własności jest jedyny.

dowód:
Rozważmy wektor X zadany wzorem

$$X = \sum_{i=1}^{n} L_p(x_i)\cdot \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \quad \left(x_i \text{ jest funkcją wokół } p=(0,\dots,0)\right)$$

Pokażemy, że dla dowolnej funkcji gładkiej f zachodzi $Xf = L_p f$.

Niech $f(x) = f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h_i(x)$, $h_i(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(0)$.

Wówczas
$$L_p f = L_p\Big(f(0) + \sum_{i=1}^{n} x_i\cdot h_i\Big) = L_p(f(0)) + \sum_{i=1}^{n} L_p(x_i\cdot h_i) =$$
$$= 0 + \sum_{i=1}^{n}\Big[h_i(0)\, L_p(x_i) + \underbrace{x_i(0)}_{0}\, L_p(h_i)\Big] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(0)\cdot L_p(x_i) = Xf. \ \square$$

Jedyność wynika z łatwej obserwacji, że różne wektory $X \in T_pM$ wyznaczają różne derywacje. □

WNIOSEK: wektory styczne w p $\xleftrightarrow{1-1}$ derywacje w p. Alternatywny sposób określenia T_pM.

Def. Derywacją na M nazywamy operację

$L: C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ liniową i spełniającą regułę Leibniza

$$L(f\cdot g) = L(f)\cdot g + L(g)\cdot f.$$

Niezależność od wyboru takiego „rozszerzenia" $\hat{f}$ wynika z dodatkowej kartki $\boxed{2'}$

PRZYKŁAD. Gładkie pole wektorowe X na M określa derywację poprzez $L(f) = Xf$, lub dokładniej $L(f)(p) = X(p)f$.

TWIERDZENIE. Każda derywacja na M jest określona przez gładkie pole wektorowe X na M, i to w sposób jednoznaczny.

dowód: derywacja na M wyznacza derywacje w każdym punkcie $p \in M$ poprzez $L_p(f) = L(\hat{f})(p)$, gdzie $\hat{f}$ jest rozszerzeniem f do całego M (po uprzednim zmniejszeniu dziedziny f jeśli trzeba).

Z poprzedniego twierdzenia dostajemy w każdym punkcie $p \in M$ wektor $X(p) \in T_pM$. Pozostaje pokazać, że tak określone pole wektorowe X na M jest gładkie. Gdyby nie było, to któraś współrzędna w lokalnej mapie nie byłaby gładką funkcją; dałoby się zrobić gładką funkcję f na M, dla której Xf nie byłaby gładka. □

WNIOSEK. Gładkie pole wektorowe na M $\xleftrightarrow{1-1}$ derywacje na M.

2'

LEMAT 1. $L(0_M) = 0_M$

D-d: $0_M + 0_M = 0_M \Rightarrow L(0_M) = 2 \cdot L(0_M)$. $\square$

LEMAT 2. $Z_f = \{x \in M : f(x) = 0\}$, L derywacja na M.
$\forall p \in \operatorname{int}(Z_f)\ L(f)(p) = 0$.

D-d: Niech $g \in C^\infty(M)$, $g(p) \neq 0$, $\operatorname{supp}(g) \subset \operatorname{int} Z_f$.

Wówczas $f \cdot g \equiv 0$. Stąd

$$0 \equiv L(f \cdot g) = L(f) \cdot g + L(g) \cdot f$$

$$0 = L(f)(p) \cdot g(p) + L(g)(p) \cdot \underbrace{f(p)}_{=0} = L(f)(p) \cdot \underbrace{g(p)}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow L(f)(p) = 0$. $\square$

WNIOSEK. $f, g \in C^\infty(M)$, $f = g$ na otoczeniu $p \in M$, L derywacja na M.
Wówczas $L(f)(p) = L(g)(p)$.

D-d: Z lematu 2,

$$0 = L(f-g)(p) \underset{\text{liniowość}}{=} L(f)(p) - L(g)(p). \ \square$$