Notatki do wykładu „Rozmaitości różniczkowalne"

Prowadzonego przez prof. dr. hab. Jacka Świątkowskiego

W semestrze letnim roku akademickiego 2014/2015

Skład:
Maciej Kosicki

„Jakieś motto”

Wersja wymagająca uzupełnienia i poprawy błędów

15 czerwca 2015

Wykład 1 - 23.02.2015

Rozmaitość topologiczna

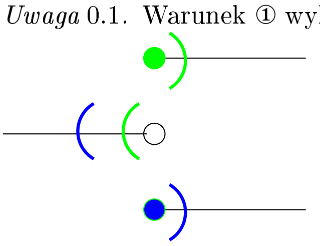
Definicja 1. Przestrzeń topologiczna M jest $n-$wymiarową **rozmaitością topologiczną** jeśli

① jest przestrzenią Hausdorffa

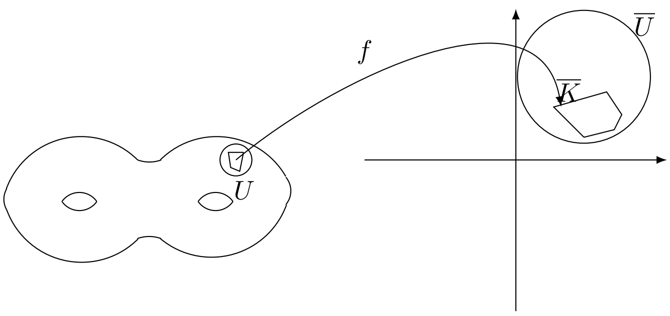
② ma przeliczalną bazę topologii

③ jest lokalnie przestrzenią euklidesową wymiaru n, tzn każdy punkt posiada otoczenie otwarte homeomorficzne z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$.

Uwaga 0.1. Warunek ① wyklucza na przykład



Uwaga 0.2. **Własność która nie zachodzi bez** T_2: dla dowolnego zwartego $\overline{K} \subset \overline{U}$ jego odpowiednik w M, czyli $K = \varphi^{-1}(\overline{K})$ jest domknięty, a nawet zwarty.



Warunek ② wyklucza „rozmaitości zbyt duże”, na przykład nieprzeliczalna suma parami rozłącznych kopii $\mathbb{R}^n$ nie jest rozmaitością. Warunek przeliczalności bazy implikuje:

- każde pokrycie rozmaitości zbiorami otwartymi zawiera przeliczalne podpokrycie(warunek Lindelöfa)
- każda rozmaitość jest wstępującą sumą otwartych podzbiorów, których domknięcia są zwarte

Uwaga 0.3.
Z teorii wymiaru wiadomo, że dla $n \neq m$ otwarty podzbiór w $\mathbb{R}^n$ nie jest homeomorficzny z otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^m$.
Stąd n jest jednoznacznie przypisany rozmaitości, i nazywamy je wymiarem rozmaitości, $n = \dim M$

Definicja 2. **Mapą** na rozmaitości topologicznej M nazywamy parę (U, φ) gdzie U jest otwartym podzbiorem M, a $\varphi : U \to \overline{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ jest homeomorfizmem na otwarty podzbiór $\overline{U}$ w $\mathbb{R}^n$.

- U nazywamy zbiorem mapowym

Fakt 0.4. Rozmaitość jest pokryta zbiorami mapowymi.

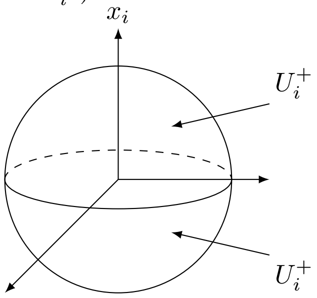
(U, φ) jest mapą wokół $p \in M$ jeśli $p \in U$ oraz $\varphi(p) = 0 \in \mathbb{R}^n$

(U, φ) nazywa się też lokalnymi współrzędnymi na M, lub lokalną parametryzacją(n parametryzacją).

Przykład 1. Sfera $S^n = \{(x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^{n+1} : \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$.

- Warunki ① i ② są dziedziczone z $\mathbb{R}^{n+1}$.

- Lokalna $n-$euklidesowość wyniknie z opisania pewnej rodziny map na S^n, których zbiory mapowe pokryją całe S^n.
  Dla $i = 1, \ldots, n+1$ rozważmy otwarte podzbiory $U_i^+ = \{x \in S^n : \ x_i > 0\}$, $U_i^- = \{x \in S^n : \ x_i < 0\}$. Pokrywają one całe S^n, bo każdy $x \in S^n$ ma którąś współrzędną niezerową.
  Odwzorowanie mapowe $\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \mathbb{R}^n$
  $\varphi_i^{\pm}(x) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \hat{x_i}, x_{i+1}, \ldots, x_{n+1})$ jest ciągłe(obcięcie rzutu $\mathbb{R}^{n+1}$ na $\mathbb{R}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x_i = 0\}$ do $U_i^{\pm}$).



  Obraz $\overline{U_i^{\pm}} = \varphi_i^{\pm}(U_i^{\pm}) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sum x_i^2 < 1\}$ jest otwartą kulą w $\mathbb{R}^n$ o promieniu 1.
  $\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \overline{U_i^{\pm}}$ jest wzajemnie jednoznaczne. Odwzorowanie odwrotne przestawione jest wzorem

$$(\varphi_i^{\pm})^{-1}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{i-1}, \pm\sqrt{1 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2}, x_i, \ldots, x_n)$$

  jest ciągłe. Zatem $\varphi_i^{\pm} : U_i^{\pm} \to \overline{U_i^{\pm}}$ są homeomorfizmami. A więc $\left(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm}\right)$ są mapami pokrywającymi S^n.

Rozmaitość różniczkowalna(gładka)

Definicja 3. Mówiąc różniczkowalna mamy na myśli gładka.
Motywacja. Dla ciągłej funkcji rzeczywistej $f : M \to \mathbb{R}$ na rozmaitości chcemy rozpoznać, czy jest różniczkowalna.
Możemy chcieć to zrobić wyrażając tą funkcję w mapie(w lokalnych współrzędnych)

- funkcja f **wyrażona w mapie** (U, φ) to złożenie $f \circ \varphi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$

„Definicja" $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka jeśli dla każdej mapy (U, φ) na M kiedy $f \circ \varphi^{-1} : \overline{U} \to \mathbb{R}$ jest gładka.
Kłopotem z tą „definicją" jest kwestia zgodności pomiędzy mapami.
Związek pomiędzy wyrażeniami funkcji f w mapach (U, φ) i (U, ψ)
$f \circ \psi^{-1} = \left(f \circ \varphi^{-1}\right) \circ \left(\varphi\psi^{-1}\right)$ gdzie $\varphi\psi^{-1} : \overline{\overline{U}} \to U$ jest homeomorfizmem.
Gdy $f \circ \psi^{-1}$ jest gładkie, to zawsze można dobrać φ tak, by $f \circ \varphi^{-1}$ nie było gładkie.

Definicja 4. Mapy $(U, \varphi), (U, \psi)$ nazywamy **zgodnymi**(gładko zgodnymi) jeśli $\varphi\psi^{-1} : \overline{\overline{U}} \to \overline{U}$ oraz $\psi\varphi^{-1} : \overline{U} \to \overline{\overline{U}}$ są gładkie.

Uwaga 0.5. $\varphi\psi^{-1}$ oraz $\psi\varphi^{-1}$ nazywamy **odwzorowaniami przejścia od jednej mapy do drugiej**

Uwaga 0.6. $\varphi\psi^{-1}$ oraz $\psi\varphi^{-1}$ są gładkie i wzajemnie odwrotne. Takie odwzorowanie(gładkie i gładko odwracalne) nazywa się **dyfeomorfizmem** pomiędzy otwartymi podzbiorami w $\mathbb{R}^n$. Wtedy w każdym punkcie Jakobian jest niezerowy.

Definicja 5. Mapy (U, φ) i (V, ψ) na rozmaitości M nazywamy zgodnymi, gdy są zgodne po obcięciu do $U \cap V$. W szczególności, gdy $U \cap V = \emptyset$ to mapy są automatycznie zgodne.
Odwzorowania przejścia pomiędzy mapami $(U, \varphi), (V, \psi)$ nazywamy odwzorowania przejścia pomiędzy obcięciami φ i ψ do $U \cap V$.
$\psi|_{U \cap V} (\varphi|_{U \cap B})^{-1}$.
Równoważnie (U, φ), (V, ψ) są zgodne gdy oba odwzorowania przejścia pomiędzy nimi są gładkie.

Definicja 6. Gładkim atlasem A na rozmaitości M nazywamy zbiór map $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ takich, że

- $\{U_\alpha\}$ pokrywa całe M

- każde dwie mapy z tego zbioru są zgodne

Przykład 2. Rodzina map $\{(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm}) :\ i = 1, \ldots, n+1\}$ na S^n stanowi atlas gładki.
Zbadajmy zgodność map na przykład $(U_i^+, \varphi_i^+), (U_j^+, \varphi_j^+),\ i < j$.

- $U_i^+ \cap U_j^+ = \{x \in S^n :\ x_i > 0, x_j > 0\}$
- $\varphi_i^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| < 1,\ x_{j-1} > 0\}$
- $\varphi_j^+(U_i^+ \cap U_j^+) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| < 1, x_i > 0\}$

$$\begin{tikzcd}
\{|x| < 1,\ x_i > 0\} \ni (x_1, \ldots, x_n) \arrow[r, "(\varphi_j^+)^{-1}"] \arrow[dr, "\varphi_i^+"'] & (x_1, \ldots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \ldots, x_n) \arrow[d, "\varpi_i^+(\varphi_j^+)^{-1}"] \\
& (x_1, \ldots, x_{i-1}, \hat{x}_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}, \sqrt{1-|x|^2}, x_j, \ldots, x_n)
\end{tikzcd}$$

$\varphi_i^+(\varphi_j^+)^{-1}$ są gładkie.
Podobnie sprawdza się gładkość $\varphi_j^+(\varphi_i^+)^{-1}$ oraz gładkość pozostałych odwzorowań przejścia pomiędzy wybranymi mapami.

Definicja 7. Rozmaitością gładką nazywamy parę (M, A), gdzie M jest rozmaitością topologiczną, zaś A jest atlasem na M.

Definicja 8. (1) Mapa (U, φ) na M jest zgodna z atlasem A na M gdy (U, φ) jest zgodna z każdą mapą z A.

(2) Dwa atlasy A_1, A_2 na M są zgodne, gdy każda mapa z A_1 jest zgodna z atlasem A_2(każda mapa z A_1 jest zgodna z każdą mapą z A_2).
Zgodność atlasów jest symetryczna i przechodnia.

Gdy A_1 jest zgodna z A_2 to rodziny funkcji rzeczywistych gładkich na (M, A_1) oraz na (M, A_2) pokrywają się. Mówimy, że atlasy A_1 i A_2 zadają strukturę tej samej rozmaitości gładkiej na rozmaitości topologicznej M.

Inny występujący w podręcznikach sposób sformalizowania pojęcia rozmaitości gładkiej

Definicja 9. A jest **atlasem maksymalnym**(gładkim), jeśli każda mapa na M zgodna z A należy do A.

Fakt 0.7. Każdy gładki atlas A na M zawiera się w dokładnie jednym atlasie maksymalnym(złożonym z wszystkich map na M zgodnych A).

Definicja 10. (równoważna poprzedniej definicji).
Rozmaitość gładka to para (M, A) jest M jest rozmaitością topologiczną zaś A to gładki atlas maksymalny.

Definicja 11. Funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem gładkiego atlasu A na M jeśli $\forall_{(U,\varphi)\in A}\ f \circ \varphi^{-1} : U \to \mathbb{R}$ jest gładka.

Fakt 0.8.

(1) Jeśli $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem A, zaś (U, φ) jest zgodna z A, to $f \circ \varphi : \overline{U} \to \mathbb{R}$ jest gładka.

(2) jeśli atlasy A_1, A_2 są zgodne, to $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładka względem A_1 iff jest gładka względem A_2 iff jest gładka względem atlasu maksymalnego zawierającego A_1 i A_2.

Warianty pojęcia rozmaitości różniczkowalnej

- mapy $(U, \varphi), (V, \psi)$ mogą być C^k-zgodne jeśli $\varphi\psi^{-1}$ oraz $\psi\varphi^{-1}$ są odwzorowaniami klasy C^k

- C^k-atlas - mapy są C^k-zgodne - określa strukturę C^k-rozmaitości
- C^0-rozmaitość = rozmaitość topologiczna
- $C^\infty-$rozmaitość = rozmaitość gładka
- rozmaitość analityczna - gdy mapy są analitycznie zgodne
- rozmaitości zespolone, konforemne, kawałkami liniowe(PL), inne
- na C^k-rozmaitości nie da się zdefiniować pojęcia funkcji klasy C^m dla $m > k$, tylko co najwyżej klasy C^k

Dychotomia między C^0 i $C^k,\ k > 0$

- Z każdego maksymalnego atlasu $C^1 - rozmaitoci$ można wybrać atlas złożony z map $C^\infty-$zgodnych
- Istnieją C^0-rozmaitości nie dopuszczające żadnej zgodnej struktury gładkiej(Quinn '82, Friedman '82)

Definiowanie rozmaitości gładkiej X za pomocą samego atlasu

Lemat 12. *Niech X będzie zbiorem, $n \in \mathbb{N}$, $\{U_\alpha\}$ kolekcja podzbiorów w X $\forall_\alpha\ \varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ jest różnowartościowe, takie że*

(1) $\forall_\alpha\ \varphi_\alpha(U_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subset \mathbb{R}^n$ jest otwarty

(2) $\forall_{\alpha,\beta}\ \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ oraz $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ otwarte w $\mathbb{R}^n$

(3) gdy $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ to $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} :\ \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest gładkie(a nawet dyfeomorfizmem, bo odwrotne $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}$ też jest gładkie)

(4) przeliczalnie wiele spośród U_α pokrywa X

(5) $\forall_{p,q\in X},\ p \neq q$ istnieją α, β oraz otwarte podzbiory $V_p \subset \overline{U_\alpha},\ V_q \subset \overline{U_\beta}$ takie, że $p \in \varphi_\alpha^{-1}(V_p),\ q \in \varphi_\beta^{-1}(V_q)$ oraz $\varphi_\alpha^{-1}(V_p) \cap \varphi_\beta^{-1}(V_q) = \emptyset$

Wówczas na X istnieje(jedyna) struktura rozmaitości topologicznej dla której zbiory U_α są otwarte. Ponadto rodzina $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ tworzy wtedy gładki atlas na X.
***Szkic dowodu**:*

- *topologia na X: jako bazę bierzemy przeciwobrazy przez φ_α otwartych podzbiorów w $\overline{U_\alpha} = \varphi_\alpha(U_\alpha)$*
- *lokalna $n-$euklidesowość X: jest wtedy oczywista*
- *nietrudo wtedy wybrać mniejszą bazę przeliczalną*
- *Hausdorffość topologi na X wynika z (5)*

Przykład 3. Niech $\mathcal{L}$ będzie zbiorem wszystkich prostych na płaszczyźnie. Nie ma dogodnej topologii na $\mathcal{L}$

- dwa podzbiory U_h - proste niepionowe, U_v - proste niepoziome
- $U_v \ni L = \{y = ax + b\} \xrightarrow{\varphi_v} (a, b) \in \mathbb{R}^2$
- $U_h \ni L = \{x = cy + d\} \xrightarrow{\varphi_h} (c, d) \in \mathbb{R}^2$
- φ_h, φ_v są różnowartościowe
- $\varphi_h(U_h) = \mathbb{R}^2,\ \varphi_v(U_v) = \mathbb{R}^2$
- $U_h \cap U_v = \{$ proste niepionowe i niepoziome$\} = \{[y = ax + b] :\ a \neq 0\}$
- $\varphi_h(U_h \cap U_v) = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 :\ a \neq 0\},\ \varphi_v(U_h \cap U_v) = \{(c, d) \in \mathbb{R}^2 :\ c \neq 0\}$
- prosta $L = \{x = cy + d\} \in U_h \cap U_v$ po przekształceniu na równanie $y = \frac{1}{c} \cdot x - \frac{d}{c}$ $\quad (\frac{1}{c}, -\frac{d}{c}) \xleftarrow{\varphi_h} L \xrightarrow{\varphi_v} (c, d)$
  Zatem $\varphi_h \varphi_v^{-1}(c, d) = (\frac{1}{c}, -\frac{d}{c})$ gładkie.
- $U_v \cup U_h = \mathcal{L}$
- Nietrudno(ale uciążliwie) sprawdza się (5)

Wykład 2 - 02.03.2015

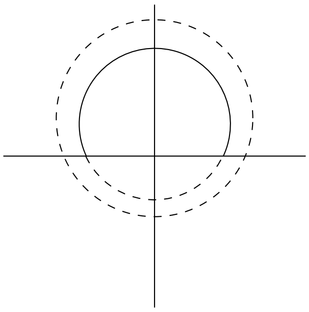
Przykład 4. $\mathcal{L}$ - rozmaitość prostych na płaszczyźnie jest dwuwymiarową rozmaitością gładką(w rzeczywistości $\mathcal{L}$ jest homeomorficzna z wnętrzem wstęgi Möbiusa; nie jest więc homeomorficzna z żadnym podzbiorem $\mathbb{R}^2$

Rozmaitość gładka z brzegiem

- $\mathbb{H}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \ x_n \geq 0\}$ - podprzestrzeń
- $\partial\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{H}^n : \ x_n = 0\}, \ int(\mathbb{H}^n) = \{x \in \mathbb{H}^n : \ x_n > 0\}$
- dla $U \subset \mathbb{H}^n$ otwartego określamy

$$\partial U = U \cap \partial\mathbb{H}^n, \ intU = U \cap int(\mathbb{H}^n)$$

- dla $U \subset \mathbb{H}^n$ otwartego $f : U \to \mathbb{R}$ jest **gładka**, gdy jest obcięciem do U gładkiej funkcji $\tilde{f} : \tilde{U} \to \mathbb{R}, \ \tilde{U} \subset \mathbb{R}^n$ otw $U \subset \tilde{U}, \ f = \tilde{f}\big|_U$.



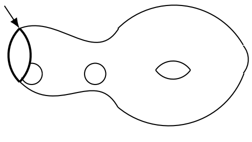
Fakt 0.9. z analizy: aby rozszerzenie $\tilde{f}$ funkcji f istniało potrzeba i wystarcza aby wszystkie pochodne cząstkowe f w $int(U)$ w sposób ciągły rozszerzają się do ∂U.

Definicja 13. M jest gładką **rozmaitością z brzegiem** jeśli posiada atlas $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$, gdzie U_α są otwarte w M, $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{H}^n$ są homeomorfizmami na otwarty obraz $\varphi_\alpha(U_\alpha) = \overline{U_\alpha} \subset \mathbb{H}^n$ takie, że odwzorowania przejścia $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ są gładkie(dokładniej, $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1} : \ \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ jest gładkie, a także gładko odwracalne, czy jest dyfeomorfizmem pomiędzy tymi otwartymi podzbiorami w $\mathbb{H}^n$).

Fakt 0.10. Niech M będzie rozmaitością z brzegiem, $p \in M$. Jeśli w pewnej mapie $(U_\alpha, \varphi_\alpha), \ \varphi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}^n$ to w każdej innej mapie (U_β, φ_β) zawierającej p mamy $\varphi_\beta(p) \in \partial\mathbb{H}^n$.

Definicja 14. ∂M= zbiór punktów $p \in M$ takich, że w każdej mapie ich obraz należy do $\partial\mathbb{H}^n$.
Analogicznie $int(M)$.

Uwaga 0.11. $\partial M, \ int(M)$ - to pojęcia rozmaitościowe, a nie topologiczne.
∂M



Dowód

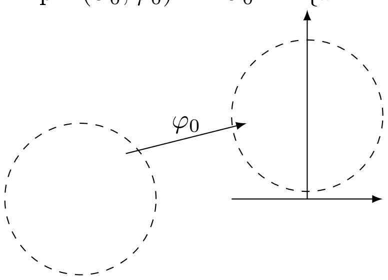
Gdyby w pewnej mapie $(U_\beta, \varphi_\beta), \ \varphi_\beta(p) \in int(\mathbb{H}^n)$ to z twierdzenia o funkcji odwrotnej(o odwzorowaniu otwartym na UWr[1]) obcięcie $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ do $int\big(\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)\big)$ przekształcałoby małe otoczenie otwarte $\varphi_\beta(p)$ dyfeomorficzne na otwarte w $\mathbb{R}^n$ małe otoczenie punktu $\varphi_\alpha(p)$.
Ale obraz tego otoczenia przez $\varphi_\alpha\varphi_\beta^{-1}$ mus być zawarty w $\mathbb{H}^n$, wiec nie może być otwartym w $\mathbb{R}^n$ otoczenie punktu $\varphi_\alpha(p) \in \partial\mathbb{H}^n$. ■

Uwaga 0.12. Dla rozmaitości topologicznych z brzegiem analogiczny FAKT wymaga w dowodzie twierdzneia Brouwera o niezmienniczości obszaru.

[1]Niech $f : U \to W$ będzie gładka, $U, W \subset \mathbb{R}^n$ będą otwarte, $p \in U$ oraz jakobian $|f'(p)| \neq 0$. Wtedy istnieje małe otwarte otoczenie U' punktu p w U takie, że $f|_{U'} : U' \to W'$ jest dyfeomorfizmem na pewne otwarte otoczenie $f(p)$ w W

Przykład 5. Dysk $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq 1\}$ jest n-rozmaitością gładką z brzegiem.
Dowód
Skonstruujemy mapy:

- mapa (U_0, φ_0) : $U_0 = \{x : \ |x| < 1\}; \varphi_0 : U_0 \to \mathbb{H}^n$, $\varphi_0(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n + 2)$



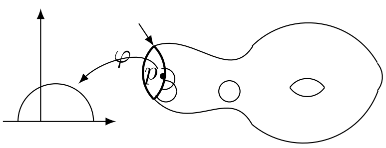
- mapy $(U_i^{\pm}, \varphi_i^{\pm})$
  $U_i^+ = \{x \in D^n : \ x_i > 0\}$ $\quad U_i^- = \{x \in D^n : \ x_i < 0\}$
  $\varphi_i^{\pm}(x_1, \ldots, x_n) = \{\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_n}{x_i}, 1 - \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2\}$.
  Jest to bijekcja na $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, 1) \underset{\text{na}}{\subset} \mathbb{H}^n$

Rozkłąd jednośći na rozmaitości gładkiej(także z brzegiem)

Przykład motywujący problem: jak uzasadnić, że na każdej rozmaitości M z brzegiem istnieje gładka funkcja $f : M \to \mathbb{R}$ taka, że

① $f(p) = 0$ dla $p \in \partial M$

② $f(p) > 0$ dla $p \in int(M)$



Technika pozwalająca sklejać/uzgadniać globalny obiekt z lokalnych mapowych składników.

Definicja 15. Rodzina podzbiorów $\{A_\alpha\}$ przestrzeni topologicznej X jest **lokalnie skończona** jeśli każdy $p \in X$ posiada otwarte otoczenie U_p takie, że $U_p \cap A_\alpha \neq \emptyset$ tylko dla skończenie wielu spośród A_α.

Definicja 16. Pokrycie $\{V_\beta\}$ przestrzeni X nazywamy rozdrobnieniem pokrycia $\{U_\alpha\}$ jeśli każdy V_β zawiera się w pewnym U_α.

Uwaga 0.13. Relacja bycia rozdrobnieniem jest przechodnia.

Definicja 17. Przestrzeń topologiczna jest **parazwarta** jeśli każde pokrycie $\{U_\alpha\}$ zbiorami otwartymi posiada lokalnie skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\}$ jest będące pokryciem zbiorami otwartymi.

Lemat 18. *Każda rozmaitość topologiczna jest parazwarta[Lee,str 36-37].*

Uwaga 0.14. Zawsze można przyjąć, że rozdrobnienie o którym mowa w lemacie(a raczej definicji parazwartości zastosowanej do rozmaitości) składa się ze zbiorów mapowych i prezwartych(ich domknięcia w rozmaitościach są zwarte). Dowód
Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem M zbiorami otwartymi. Łatwo znaleźć rozdrobnienie $\{U'_\gamma\} \prec \{U_\alpha\}$ złożone ze zbiorów prezwartych, mapowych. Na przykład $\{U \cap V_\xi : \ U \in \{U_\alpha\}, \ V_\xi$ - mapowy w $M\}$. Stosując lemat do rodziny $\{U'_\gamma\}$, dostajemy $\{V_\beta\} \prec \{U'_\gamma\}$ lokalnie skończone. Ponieważ każdy V_β zawiera się w pewnym U'_γ mapowym i prezwartym, więc sam jest mapowy i prezwarty. Z przechodniości $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$ jest jak w tezie. ■

Uwaga 0.15. Każda lokalnie skończona rodzina $\{A_\alpha\}$ podzbiorów prezwartych przestrzeni X ma następującą własność: dla każdego A_{α_0} podrodziny $\{A_\alpha : \ A_\alpha \cap A_{\alpha_0} \neq \emptyset\}$ jest skończona. Dowód
Gdyby ta podrodzina była nieskończona„ moblibyśmy wybrać ciąg A_{α_i}, $i \in \mathbb{N}$ z tej podrodziny, oraz ciąg punktów $X_i \in A_{\alpha_i} \cap A_0$.
Ciąg (x_i) ma punkt skupienia w zwartym domknięciu $cl(A_{\alpha_0})$. Oznaczmy go p. Dowolne otocznie U_p punktu

p zawiera nieskończenie wiele x_i, więc przecina niepusto nieskończenie wiele A_{α_i}. Sprzeczność z lokalną skończonością rodziny A_α. ■

Uwaga 0.16. Mając już mapowość i prezwartość zbiorów z rozdrobnienia $\{V_\beta\}$ możemy dodatkowo zapewnić sobie istnienie zwartych zbiorów $D_\beta \subset V_\beta$ takich, że $\bigcup_\beta D_\beta = M$. Dowód

O każdym V_β możemy myśleć jak o otwartym podzbiorze w $\mathbb{R}^n$(utożsamiając go za pomocą odwzorowania mapowego z odpowiednikiem $\overline{V_\beta} \subset \mathbb{R}^n$

- Każdy V_β jest wstępującą suma mniejszych zbiorów $V_{\beta,k}: \ k \in \mathbb{N}$ otwartych w $\mathbb{R}^n$ których domknięcia $cl(V_{\beta,k}) \subset V_\beta$ i są zwarte.
(na przykład $V_{\beta,k} = B(x_0,k) \cap \{x \in V_\beta \ d(x, V_\beta^c < \frac{1}{k}\})$
- Niech $V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_m}$ będą zbiorami z $\{V_\beta\}$ niepusto przecinające się z V_{β_0}(jest ich skończenie wiele). Wówczas $V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_m}$ wraz z $V_{\beta_0,k}: \ k \in \mathbb{N}$ stanowią pokrycie zwartgo $cl(V_{\beta_1})$.
Można z niego wybrać skończone podpokrycie postaci
$$V_{\beta_1}, \ldots, V_{\beta_m}, V_{\beta_0,k_0}$$
Oznacza to, że zastępując w $\{V_\beta\}$ zbiór V_{β_0} przez V_{β,k_0} dostajemy nowe pokrycie M(z tym że $cl(V_{\beta,k_0}$ jest zwarty).
Powtarzamy kolejno dla wszystkich V_β i bierzemy $D_\beta = cl(V_{\beta,k_\beta})$ ■

Wykład 3 - 09.03.2015

Dla dowolnego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości topologicznej istnieje skończone rozdrobnienie $\{V_\beta\} \prec \{U_\alpha\}$ składające się ze zbiorów mapowych, prezwartych oraz rodzina $\{D_\beta\}$ zwartych podzbiorów $D_\beta \subset V_\beta$ która dalej jest pokryciem M.

Definicja 19. Dla funkcji rzeczywistej $f : X \to \mathbb{R}$ nośnik f to $supp(f) = cl(\{x \in X : \ f(x) \neq 0\})$.

Fakt 0.17. Dla dowolnego otwartego $\Omega \subset \mathbb{R}^n$(a także $\Omega \subset \mathbb{R}^N_+$) i dowolnego zwartego $D \subset \Omega$ istnieje gładka $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R})$. takie, że

① $f \geq 0$

② $supp(f) \subset \Omega$

③ $f(x) > 0$ dla $x \in D$

Twierdzenie 20. *Dla każdego otwartego pokrycia $\{U_\alpha\}$ rozmaitości gładkiej M istnieje rodzina $\{f_j\}$ gładkich funkcji $f_j : M \to \mathbb{R}$ taka, że*

① $f_j \geq 0$

② *każdy nośnik $supp(f_j)$ zawiera się w pewnym U_α*

③ *nośniki $\{supp(f_j)\}$ tworzą lokalnie skończone pokrycie M*

④ $\forall_{x \in M} \ \sum_j f_j(x) = 1$

Rodzina $\{f_j\}$ jak wyżej nazywa się rozkładem jedności wpisanym w pokrycie $\{U_\alpha\}$. Dowód

- *Niech $\{V_j\} \preceq \{U_\alpha\}$ będzie lokalnie skończonym pokryciem otwartym prezwartymi zbiorami mapowymi i niech $D_j \subset V_j$ będą zbiorami zwartymi, dalej pokrywającymi M.*
- *Dzięki faktowi z $\mathbb{R}^n$ dla każdego j istnieje gładka funkcja $h_j : M \to \mathbb{R}$ taka, że*
  (1) $h_j \geq 0$
  (2) $supp(h_j) \subset V_j$
  (3) $h_j(x) > 0$ *dla* $x \in D_j$
- *h_j definiujemy następująco:*

– *rozważmy mapę* $\varphi_j : V_j \underset{homeo}{=} \overline{V_j} \subset \mathbb{R}^n$

– *Fakt z* $\mathbb{R}^n$ *stosujemy do* $\Omega = \overline{V_j},\ D = \overline{D_j}$ *otrzymując* $\overline{h_j} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ supp(\overline{h_j}) \subset \overline{V_j},\ \overline{h_j}(x) > 0$ *dla* $x \in \overline{D_j}$

– $h_j(x) = \begin{cases} \overline{h_j} \circ \varphi_j(x) & dla\ x \in V_j \subset M \\ 0 & dla\ x \in M \backslash V_j \end{cases}$

– h_j *oczywiście spełnia ②, ③ i ④*

– $h_j : M \to \mathbb{R}$ *jest gładka, bo*

  1) wystarczy pokazać, że h_j *jest gładka na pewnym otoczeniu każdego punktu*

  2) na otoczeniach punktów z V_j *oczywiście jest gładka, bo po wyrażeniu w mapie* (V_j, φ_j) *jest gładka*

  3) dla $p \in M \backslash V_j$ *istnieje otwarte otoczenie* p *w* M *rozłączne z nośnikiem* $supp(h_j)$. *Na tym otoczeniu* $h_j \equiv 0$, *więc jest gładka*

– *Niech* $h(x) = \sum_j h_j(x)$ *co ma sens, bo nośniki* $supp(h_j)$ *są rodziną lokalnie skończoną.*

  Z lokalnej skończoności wynika też gładkość h*(bo lokalnie na otoczeniach punktów* h *jest sumą skończenie wielu funkcji gładkich). Mamy też* $\forall_{x \in M}\ h(x) > 0$, *bo* D_j *pokrywają* M

– *Określmy* $f_j(x) = \frac{h_j(x)}{h(x)},\ f_j : M \to \mathbb{R}$ *gładka,* $supp(f_i) = supp(h_j) \subset V_j,\ f_j \geq 0$

  $\sum_j f_j(x) = \sum_j \frac{h_j(x)}{h(x)} = \frac{h(x)}{h(x)} = 1$

Przykład 6. Pytanie o istnienie gładkiej $f : M \to \mathbb{R}$ takiej, że $f(0) = 0$ dla $x \in \partial M$ oraz $f(p) > 0$ dla $p \in int(M)$.
Niech $\{U_\alpha\}$ będzie dowolnym pokryciem M zbiorami mapowymi a $f_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}$ rodziną funkcji gładkich.

- Jeśli $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$ to $f_\alpha = \overline{f_\alpha} \circ \varphi_\alpha$ gdzie $\overline{f_\alpha} : U_\alpha \to \mathbb{R}$, gdzie $\overline{f_\alpha}(x_1, \ldots, x_n) = x_n$
- Jeśli $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset$ to $f_\alpha \equiv 1$

Niech $\{h_\beta\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$. Dla każdego β wybieramy $\alpha(\beta)$ takie, że $supp(h_\beta) \subset \bigcup_{\alpha(\beta)}$. Definiujemy $h'_\beta = \begin{cases} h_\beta \cdot f_{\alpha(\beta)} & \\ 0 & \text{poza } \bigcup_{\alpha(\beta)} \end{cases}$
$h'_\beta : M \to \mathbb{R}$ jest gładka, $supp(h'_\beta) \subset supp(h_\beta)$ więc rodzina $\{supp(h'_\beta)\}$ jest lokalnie skończona.
Definujemy $f(x) = \sum_\beta h'_\beta(x)$.
Dla $p \in \partial M,\ \forall_\beta h'_\beta(p) = 0$ więc $f(p) = 0$
Dla $p \in int(M),\ \exists_\beta :\ h_\beta(p) > 0$. Wtedy $h'_\beta(p) > 0$ oraz $h'_{\beta'}(p) \geq 0$ dla $\beta' \neq \beta$ więc suma $f(p) > 0$.

Przykład 7. Niech F_1, F_2 będą rozłącznymi domkniętymi podzbiorami gładkiej rozmaitości M.
Wówczas istnieje gładka funkcja $f : M \to [0,1]$ taka, że $f\big|_{F_1} \equiv 1$ oraz $f|_{F_2} \equiv 0$ Dowód
Niech $U_i = M \backslash F_i$. $\{U_1, U_2\}$ jest otwartym pokryciem M. Niech $\{f_i\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_1, U_2\}$. Określmy $f(x) = \sum_{supp(f_j) \subset U_2} f_j(x)$. Jest ona dobrze określona i gładka, oraz $im(f) \subset [0,1]$. Dla $x \in F_1$ wszystkie nośniki $supp(f_j)$ zawierające x zawierają się w U_2. Zatem $f(x) = \sum_j f_i(x) = 1$.
Dla $x \in F_2$ nośniki $supp(f_j)$ zawierające x nie zawierają się w U_2. Stąd $f(x) = 0$.

Różniczkowalność odwzorowań pomiędzy rozmaitościami

Niech M^m, N^n będą rozmaitościami gładkimi. Niech $f : M \to N$ będzie ciągłe, $p \in M,\ f(p) = q \in N$.

Definicja 21. (1) f jest C^r- **różniczkowalna w punkcie** p(dla $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) jeśli dla dowolnych map (U, φ) wokół p i (V, ψ) wokół q złożenie

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n\ \varphi[U \cap f^{-1}(V)] \to \varphi(V)$$

jest C^r różniczkowalne w punkcie $\varphi(p)$.

(2) f jest klasy C^r na otoczeniu p, jeśli dla dowolnych map (U, φ) wokół p i (V, ψ) wokół q złożenie $\varphi^{-1} \circ f \circ \psi$ posiada pochodne cząstkowe rzędów $\leq r$ na pewnym otoczeniu $\varphi(p)$ i są one tam ciągłe.

$\hat{f} = \psi f \varphi^{-1}$ nazywamy wyrażeniem odwzorowania f w mapach (U, φ), (V, ψ)(lub w lokalnych współrzędnych zadanych przez te mapy).

Fakt 0.18. Jeśli f wyrażone w mapach (U, φ), (V, ψ) jest C^r różniczkowalne w punkcie $\varphi(p)$, to wyrażone w innych gładko zgodnych mapach (U', φ'), (V', ψ') wokół odpowiednio p i q też jest C^r-różniczkowalna w punkcie $\varphi'(p)$. Zatem C^r różniczkowalność w punkcie p wystarczy sprawdzić dla jednej mapy wokół p i q. Ten sam fakt zachodzi dla C^r-różniczkowalnośći na otoczeniach punktów $\varphi(p)$, $\varphi'(p)$, p. Dowód
Niech $\hat{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$, $\hat{\hat{f}} = \psi' \circ f(\varphi')^{-1}$.
Niech $\alpha = \varphi(\varphi')^{-1}$ oraz $\beta = \psi'\psi^{-1}$ będą odwzorowaniami przejścia. Są to gładkie dyfeomorfizmy pomiędzy odpowiednio otwartymi podzbiorami z $\mathbb{R}^n$ i z $\mathbb{R}^m$ odpowiednio. Zachodzi $\hat{\hat{(f)}} = \beta \circ \hat{f} \circ \alpha$, bo $\beta \hat{f} \alpha = \psi'\psi^{-1}\psi f \varphi^{-1}\varphi(\varphi')^{-1} = \psi' f(\varphi')^{-1} = \hat{\hat{f}}$

- obie strony są określone na pewnych otwartych podzbiorach $\mathbb{R}^n$ zawierających punkt $\varphi^{-1}(p)$ zaś równość zachodzi na ich przekroju
- $\alpha\big(\varphi'(p)\big) = \varphi(p)$.

Uwaga 0.19. Aby $f : M \to N$ była C^r różniczkowalna potrzeba i wystarcza aby warunek zachodził dla par map z wybranych atlasów na M i N.

Wykład 4 - 16.03.2015

Uwaga 0.20. Odwzorowanie $f : M \to N$ jest gładkie na pewnym otoczeniu $p \in M$ wtedy i tylko wtedy, gdy odwzorowanie między rozmaitościami jest gładkie.

Fakt 0.21. Złożenie gładkich odwzorowań pomiędzy rozmaitościami jest gładkie. Dowód
Niech $f : M \to N$, $g : N \to P$ będą gładkie.
Niech $p \in M$, $q = f(p)$, $s = g(q)$. Rozważmy mapy wokół tych punktów, odpowiednio (U, φ), (V, ψ), (W, ξ). Wiemy, że $\psi f \varphi^{-1}$ oraz $\xi g \psi^{-1}$ są gładkie na swoich dziedzinach. Pytamy, czy $\xi(g \circ f)\varphi^{-1}$ jest gładkie na otoczeniu punktu $\varphi(p)$.
Ale $\xi(g \circ f)\varphi^{-1} = (\xi g \psi^{-1}) \circ (\psi g \varphi^{-1})$. Stąd wynika gładkość na otoczeniu $\varphi(p)$. ∎

Definicja 22. Rzędem odwzorowania $f : M \to N$ C^1-różniczkowalnego w punkcie $p \in M$ nazywamy rząd macierzy pierwszych pochodnych cząstkowych odwzorowania mapowego w mapie $\psi f \varphi^{-1}$ w punkcie $\varphi(p)$, gdzie (U, φ), (V, ψ) to mapy odpowiednio wokół p oraz $f(p)$.

Fakt 0.22. Powyższa liczba nie zależy od wyboru map.
Dowód
Porównujemy rząd macierzy $D\hat{f} = D(\psi f \varphi^{-1})$ z rzędem macierzy $D\hat{\hat{f}} = D(\psi' f(\varphi')^{-1}$. Ale $\hat{\hat{f}} = \beta \circ \hat{f} \circ \alpha$. Ale $\hat{\hat{f}} = D\beta \circ D\hat{f} \circ D\alpha$, przy czym $D\beta$, $D\alpha$ są macierzami nieosobliwymi. Z algebry liniowej wiemy, że mnożenie macierzy przez macierz nieosobliwą nie zmienia jej rzędu. ∎

Wniosek 23. *Zerowanie się pierwszej pochodnej w punkcie jest dobrze określonym pojęciem(niezależnym od wyboru map) dla odwzorowań pomiędzy rozmaitościami.*

Definicja 24. Gładkie odwzorowanie pomiędzy rozmaitościami $f : M \to N$ jest dyfeomorfizmem, gdy jest wzajemnie jednoznaczne i odwrotne $f :^{-1} N \to M$ też jest gładkie.

Uwaga 0.23. Dyfeomorficzne rozmaitości można rozważać jako jednakowe w teorii rozmaitości.
Dygresja o dyfeomorfizmach

1) C^1 vs C^∞: każda C^1 rozmaitość posiada zgodną strukturę z C^∞. Jeśli dwie C^∞ rozmaitości są C^1-dyfeomorficzne, to są także $C^\infty-$dyfeomorficzne. Klasyfikacja C^1-rozmaitości z dokładnością do C^1-dyfeomorfizmów jest taka sama, jak klasyfikacja $C^\infty-$rozmaitości z dokładnością do $C^\infty-$dyfeomorfizmów.

2) C^0 vs C^∞: istnieją C^0 rozmaitości nie posiadające żadnej $C^\infty-$ struktury. Istnieją C^0 rozmaitości posiadające wiele C^0-zgodnych, ale parami nie $C^\infty-$dyfeomorficznych struktur gładkich.

Naturalne źrógło rozmaitości dłakich: iloraz przez działanie nieciągłej grupy dyfeomorfizmów.
Niech M będzie rozmaitością gładką.

Definicja 25. Grupa G dyfeomorfizmów M to zbiór dyfeomorfizmów $g : M \to M$ zamknięty na składanie oraz branie odwrotności.

Definicja 26. Grupa dyfeomorfizmów M jest nieciągła, jeśli każdy punkt $p \in M$ posiada otwarte otoczenie U_p, takie że $\{g(U_p) : \ g \in G\}$ jest rodziną parami rozłącznych zbiorów.
Iloraz M/G - przestrzeń ilorazowa względem relacji równoważności $\sim$ określonych przez $p \sim q \Leftrightarrow \exists_{g \in G} : \ q = g(p)$ z topologią ilorazową.

Uwaga 0.24. $\forall_{p \in M}$ jego klasa abstrakcji to zbiór wszystkich $\{g(p) : \ \ g \in G\}$ nazywamy orbitą punktu p względem działania G

Uwaga 0.25. topologia ilorazowa: zbiór klas abstrakcji(orbit) jest otwarty w topologii ilorazowej, gdy zbiór w M będący sumą tych orbit jest otwarty w M.

Lemat 27. *Jeśli G jest nieciągłą grupą dyfeomorfizmów gładkiej rozmaitości M to M/G jest gładką rozmaitością(posiada naturalną strukturę gładką) wymiaru tego samego, co M i taką, że odwzorowanie ilorazowe $i : M \to M/G$ jest gładkie, a nawet jest lokalnym dyfeomorfizmem. Dowód*
Niech $[p]$ będzie orbitą punktu p i U_p jak w definicji nieciągłości grupy. Bez straty ogólności możemy założyć, że jest ono otoczeniem mapowym, z mapą $\psi_p : U_p \to \mathbb{R}^n$. Rozważmy zbiór $U_{[p]} = \{[q] : \ q \in U_p\} \subset M/G$. Zauważmy, że jest on otwarty w przestrzeni ilorazowej. Ponadto $[p] \in U_{[p]}$. Rozważmy $i_p = i\big|_{U_p} : U_p \to U[p]$, $i_p(q) = [q]$. Jest to bijekcja(surjektywność oczywista, injektywność wynika z nieciągłości grupy). Ponadto jest to homeomorfizm(ciągłość wynika z ciągłości i, ciągłość odwrotnego z tego, że dla dowolnego otwartego $V \subset U_p$ jest otwarty w M/G więc i $U[p]$ także). Definujemy mapę $\varphi_p : U_{[p]} \to \mathbb{R}^n$ przez $\varphi_p = \psi_p \circ i_p^{-1}$. Jest ona homeomorfizmem na obraz $\overline{U}_p \underset{otw.}{\subset} \mathbb{R}^n$.
Twierdzimy, że rodzina map $\left(U_{[p]}, \varphi_p\right)$ zadaje strukturę rozmaitości gładkiej(tworzy atlas gładki). Jest tak, ponieważ

- *$[p] \in U_{[p]}$, więc zbiory $U_{[p]}$ pokrywają całe M/G*
- *Zachodzi także gładka zgodność:*
  - *dla innego zbioru mapowego $U_{[q]} \underset{otw.}{\subset} M/G$ mamy homeomorfizm $i_q : \ U_q \to U_{[q]}$ oraz mapę $\varphi_q : U_{[q]} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi_q = \psi_q \circ i_1^{-1}$*
  - *odwzorowanie przejścia $\varphi_p \circ \varphi_q^{-1} = \psi_p \circ i_p^{-1} i_q \psi_q^{-1}$. Dla $y = i_p^{-1} i_q(x)$ mamy $i_q(x) = i_p(y) \Rightarrow [x] = [y]$, więc $y = g_x(x)$ dla pewnego $g_x \in G$.*
  - *Funkcja $f : x \to g_x : \ U_q \cap i_q^{-1}(U_{[p]}) \to G$. Z ciągłości mamy stałość na komponentach spójnych zbioru $U_q \cap i_q^{-1}(U_{[p]}))$ funkcji $p^{-1} i_q : x \to y_x$(w przeciwnym wypadku obraz spójnej składowej przez odwzorowanie ciągłe $i_p^{-1} i_q$ przeciełoby kilka kopii zbiorów postaci $q(U_p)$, co jest niemożliwe).*
  - *komponenty spójności $U_q \cap i_q^{-1}(U_{[p]})$ są otwarte w M. Na każdej takiej składowej mamy $i_p^{-1} \circ i_q(x) = g_x \cdot x$ dla ustalonego g. Zatem $\varphi_p \varphi_q^{-1} = \psi_p(i_p^{-1} i_q)\psi_q^{-1}$ jest zadana na $\psi_q(???)$ wzorem $\varphi_p \varphi_q^{-1}(x) = \psi_p\big(g(\psi_q^{-1}(x))\big)$.*

Tu nie wiem co dalej jest, nie mogę odczytać. Podrzuci ktoś na kosa@azs.pwrwroc.pl?

Uzupełnienie: *$i(x) = [x]$. Niech $p \in M$. Rozważmy mapy (U_p, ψ_p) w M oraz $(U_{[p]}, \varphi_p)$ w M/G. Wyraźmy i wokół p w tych mapach: $\hat{\imath} = \varphi_p i_p \psi_p^{-1} = \psi_p i_p^{-1} i \psi_p^{-1} = id$ - jest to odwzorowanie gładkie i lokalnie gładko odwracalne.*

Wykład 5 - 23.03.2015

Przypomnienie
G jest nieciągłą grupą dyfeomorfizmów rozmaitości M gdy dla każdego punktu p istnieje otwarte otocznie U_p,

takie że $\{g(U_p): \ g \in G\}$ są parami rozłączne.
M/G - iloraz(przestrzeń orbit) jest rozmaitością wymiaru $\dim(M/G) = \dim M$ i t.że $i: M \to G/M$ jest lokalnie dyfeomorfizmem.
Struktura gładka na M/G: dla U_p jak wyżej mapowego, z mapą (U_p, ψ_p) tworzymy mapę $(U_{[p]}, \varphi_p)$ na M/G, gdzie $U_{[p]} = \{[x] : x \in U_p\}, \ \varphi_p = \psi_p \circ i_p^{-1}$
$i_p = i\big|_{U_p}: \ U_p \to U_{[p]}$.

Przykład 8. $\mathbb{Z}^n$ działa na $\mathbb{R}^n$ przez przesunięcia.
$\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = T^n$ - $n-$wymiarowy torus.

Uwaga 0.26. $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \cong (S^1)^n$

Przykład 9. $\mathbb{Z}$ działa na $\mathbb{R}$ działa na $S^1 \times \mathbb{R}$(współrzędne θ na S^1, t na $\mathbb{R}$).
$k \in \mathbb{Z}$ działa przez $k(\theta, t) = \big((-1)^k\theta, t + k\big)$.
Iloraz $S^1 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ jest tak zwaną butelką Kleina.

Uwaga 0.27. Iloraz M/G dla nieciągłego działania grupy dyfeomorfizmów G na rozmaitość M z niepustym brzegiem jest rozmaitością z brzegiem.

Przykład 10. $\mathbb{Z}$ działa na $[-1, 1] \times \mathbb{R}$.
$k(x, y) = \big((-1)^k \cdot x, y + k\big)$
Iloraz $[-1, 1] \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ to wstęga Möbiusa(gładka 2-wymiarowa rozmaitość z niepustym brzegiem).

$Conf_n(M)$ - przestrzeń konfiguracyjna $n-$elementowych podzbiorów gładkiej rozmaitości M(bez brzegu).
Wyrazimy $Conf_n(M)$ jako iloraz pewnej nieciągłej grupy dyfeomorfizmów.
Rozważmy produkt kartezjański $\underbrace{M \times \ldots \times M}_{n \text{ razy}}$ i tak zwaną uogólnioną przekątną $\Delta^n(M)$ taką że $x_i = x_j$ dla pewnych $i \neq j$
$\Delta^n(M)$ jest domknięta w $M \times \ldots \times M$(skończona suma zbiorów zadanych równaniami $x_i = x_j$, z których kazdy jest domknięty).
$M \times \ldots \times M \backslash \Delta^n(M)$ jest otwartym podzbiorem, składa się z $(x_1, \ldots, x_n$ o parami różnych x_i - jest to rozmaitość gładka wymiaru $n \cdot \dim M$.
Grupa permutacji S_n działa na $M \times \ldots \times M \backslash \Delta^n(M)$ przez dyfeomorfizmy $(\sigma \in S_n)$

$$\sigma(x_1, \ldots, x_n) = \big(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}\big)$$

$[M \times \ldots \times M \backslash \Delta^n(M)]/S_n = Conf_n(M)$ jako zbiór.
Pokażemy, że to działanie S_n na $M \times \ldots \times M \backslash \Delta^n(M)$ jest nieciągłe.
Niech $p = (x_1, \ldots, x_n) \in M \times \ldots \times \backslash \Delta^n(M)$. Niech $U_1, \ldots, U_n$ będą otwartymi, parami rozłącznymi otoczeniami $(x_1, \ldots, x_n$ w M.
Niech $U_p = U_1 \times \ldots \times U_n$ będzie otwartym otoczeniem p w $M \times \ldots \times M \backslash \Delta^n(M)$.
$\sigma(U_p) = U_{\sigma(1)} \times \ldots \times U_{\sigma(n)}$
Stąd $\sigma(U_p): \ \sigma \in S_n$ są parami rozłączne. ■

Klejenie rozmaitości wzdłuż komponent brzegu

Otoczenie kołnierzowe
Niech M będzie $n-$wymiarową rozmaitością gładką, B- komponentą brzegu ∂M.

Twierdzenie 28. *Istnieje dyfeomorficzne włożenie(czyli dyfeo na obraz) $k: B \times [0, 1) \to M$ na otwarte otoczenie U komponenty B w M takie, że $k(x, 0) = x$ dla $x \in B$.*
Dowód za kilka wykładów.
***Ćwiczenie**. Produkt rozmaitości bez brzegu z rozmaitością z brzegiem jest rozmaitością z brzegiem.*
$M_1, B_1 \subset \partial M_1$, $M_2, B_2 \subset \partial M_2$ jak wyżej. $f: B_1 \to B_2$ - dyfeomorfizm(sklejający).
$M_1 \sup_f M_2 = M_1 \sqcup M_2/\sim$
gdzie $M_1 \supset B_1 \ni x \sim f(x) \in B_2 \subset M_2$[2- elementowe klasy abstrakcji]
oraz poza tym 1-elementowe klasy abstrakcji.
Struktura gładka na przestrzeni $M_1 \cup_f M_2$.
Wybieramy $k_i: B_i \times [0, 1) \to M_i$ wybrane otoczenia kołnierzowe. Zbiory $U_i \subset M_i$ utożsamiamy z produktami $B_i \times [0, 1)$.
Trzy rodzaje map na $M_1 \cup_f M_2$

① *Dla dowolnej mapy (U,φ) na M_1 obcinamy ją do $U\backslash B_1$.*

② *Analogicznie, dla dowolnej mapy (U,φ) na M_2 obcinamy ją do $U\backslash B_2$.*

③ *dla dowolnej mapy (W,ψ) na B_1, $\psi : W \to \overline{W} \subset \mathbb{R}^{n-1}$ rozważamy otwarty zbiór $W\times[0,1)\cup_{f|_W} f(W)\times [0,1) = \tilde{W} \subset M_1 \cup_f M_2$.*

$\tilde{\psi} : \tilde{W} \to \overline{\tilde{W}} \subset \mathbb{R}^n$

$$\psi(x,t) = \begin{cases} (\psi(x), -t) & dla\ (x,t) \in U_1 \\ (\psi(x)f^{-1}(x), t) & dla\ (x,t) \in U_2 \end{cases}$$

$\tilde{\psi}(\tilde{W}) = W \times (-1,1) \subset \mathbb{R}^n$

Fakt 0.28. Dla $x \in B_1$ $\tilde{\psi}(x,0) = \tilde{\psi}(f(x),0)$, stąd $\tilde{\psi}$ jest dobrze określone na $M_1 \cup_f M_2$.
$\tilde{\psi} : \tilde{W} \to W \times (-1,1)$ jest homeomorfizmem.
Zbiory mapowe postaci ①,②,③ pokrywają $M_1 \cup_f M_2$.
Gładka zgodność map postaci ①,②,③ zachodzi(ćwiczenie).

Uwaga 0.29. $M_1 \cup_f M_2$ jako rozmaitość gładka wydaje się zależeć nie tylko od f, ale też od wyboru otoczeń kołnierzowych k_1 i k_2. W istocie jednak, z dokładnością do dyfeomorfizmu, $M_1 \cup_f M_2$ nie zależy od wyboru k_1, k_2, bo

łatwe ćwiczenie Jeśli k_1, k_1' są podobnie położone w M_1, tzn istnieje homeomorfizm $h : M_1 \to M_1$ taki, że $k_1'|_{B_1\times[0,\frac{1}{2})} = h \circ k_1|_{B_1\times[0,\frac{1}{2})}$ to $M_1 \cup_{f,k_1,k_2} M_2 \cong M_1 \cup_{f,k_1',k_2} M_2$

TRUDNY Każde 2 otoczenia kołnierzowe komponenty B_1 brzegu ∂M_1 są podobnie położone.

Fakt 0.30. Ustalmy otoczenia kołnierzowe k_1, k_2. Jeśli $f_0, f_1 :\ B_1 \to B_2$ są izotopijnymi dyfeomorfizmami(tzn istnieje gładkie $F : [0,1] \times B_1 \to B_2$ takie, że oznaczając przez $F_t :\ B_1 \to B_2$ odwzorowanie $F_t(x) = F(t,x)$ mamy $f_0 - f_0$, $F_1 = f_1$ F_t jest dyfeomorfizmem dla każdego $t \in [0,1]$). to $M_1 \cup_{f_o,k_1,k_2} M_2$ oraz $M_1 \cup_{f_1,k_1,k_2} M_2$ są dyfeomorficzne.

Definicja 29. Niech M_1, M_2 będą rozmaitościami wymiaru n, oraz $D_i \subset M_i$ będą kulami $n-$wymiarowymi zawartymi w mapowych otoczeniach we wnętrzach $ind(M_i)$.
$M_i\backslash ind(D_i)$ są rozmaitościmi z brzegiem, oraz $D_i = \partial D_i$ są komponentami brzegu w M_i. Jako że $B_i \cong S^{n-1}$, to istnieje dyfeomorfizm $f : B_1 \to B_2$.
$[M_1\backslash ind(D_1)] \cup_f [M_2\backslash \int(D_2)] = M_1\#M_2$ nazywamy **sumą spójną rozmaitości** M_1 i M_2.

Uwaga 0.31. Jeśli M_i jest spójna, to $M_i\backslash int(D_i)$ z dokładnością do dyfeomorfizmu nie zależy od wyboru D_i.

Uwaga 0.32. Istnieją dokładnie dwie klasy izotopii dyfeomorfizmów $f : S^{n-1} \to S^{n-1}$[zachowujące orientacje, oraz zmieniające orientacje].

Wniosek 30. *Dla spójnych M_i są conajwyżej dwie rozmaitości będące sumą spójną $M_1\#M_2$*
W przypadku gdy M_i są orientowalne to istnieje kanoniczny wybór jednej spośród tych dwóch sum spójnych.

Klasyfikacja zamkniętych(zwartych, bez brzegu) powierzchni(2-rozmaitości) spójnych.

2 serie(obie nieskończone):
Seria pierwsza(orientowalne):
$S^2, T^2 = S^1 \times S^1, T^2\#T^2, T^2\#T^2, \ldots$
Seria druga(nieorientowalne)
$\mathbb{R}P^2 = S^2/\mathbb{Z}_2$ *- płaszczyzna rzutowa*
$\mathbb{R}P^2\#\mathbb{R}P^2$ *- butelka Kleina*
oraz dalej.

Wykład 7 - 20.04.2015

Gładkie pole wektorowe na M^n to

$$X : M \to TM \text{ takie że } \forall_{p\in M}\ X(p) \in TpM \subset TM$$

- *gładkie jako odwzorowanie rozmaitości $M \to TM$ lub równoważnie*
- *wyrażone w lokalnych mapach (U, φ) jako $X(p) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i(p)\frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p)$ ma gładki współczynnik $b_i : U \to \mathbb{R}$(jako funkcje rzeczywiste).*

Własności: *Suma $(X + Y)(p) = X(p) + Y(p)$ gładkich pól wektorowych jest gładkim polem wektorowym. Podobnie, iloczyn $(f \cdot X)(p) = f(p)X(p)$ gładkiego pola wektorowego X i gładkiej funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ jest gładkim polem wektorowym.*

Definicja 31. Rodzinę wszystkich pól wektorowych na M oznaczamy przez $C^\infty(TM)$ lub $\mathcal{X}(M)$. Algebraicznie jest to moduł na pierścieniu $C^\infty(M)$ gładkich funkcji rzeczywistych na M.

Uwaga 0.33. Gładkie pola wektorowe na otwartych $U \subset \mathbb{R}^n$ lub H^n mają postać:

$$X(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(x)$$

dla pewnych gładkich funkcji $a_i : U \to \mathbb{R}$. Będziemy też pisać $X(x) = [a_1(x), \ldots, a_n(x)] \in \mathbb{R}^n \cong T_xU$.
Dygresja dla $p \in \partial M$, przestrzeń styczną TpM definiuje się tak samo, dopuszczając krzywe $\gamma : [a, b) \to M$, lub $\gamma : (a, b] \to M$ z punktamy bazowymi a, b odpowiednio.
$TM = \dot{\bigcup\limits_{p\in M}} TpM$ jest rozmaitością z brzegiem $\partial(TM)$.
dla map (U, φ) na M dostajemy mapę $(TU, \tilde{\varphi}$ na $TM,\ TU = \bigcup\limits_{p\in U} TpU$.
$\tilde{\varphi} : TU \to \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \subset H^n \times \mathbb{R}^n \cong H^{2n}$.
Jeśli (U, φ) zahacza o ∂M, to $(TU, \tilde{\varphi})$ zahacza o $\partial(TM)$.

Przykład 11. Wyznaczanie pól wektorowych o określonych własnościach za pomocą rozkładu jedności.
Niech M będzie rozmaitością z niepustym brzegiem ∂M.

Definicja 32. Wektor $Y \in TpM$, dla $p \in \partial M$ jest <u>skierowany do wewnątrz M</u> jeśli w pewnej mapie $\varphi : U \to H^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n :\ x_n \geq 0\}$ wyraża się przez $Y = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial\varphi_i}(p)$, gdzie $a_n > 0$.
Ćwiczenie. Jeśli tak jest w jednej mapie, to jest też tak w każdej mapie wokół p. Ponadto, suma wektorów skierowanych do wewnątrz jest wektorem skierowanym do wewnątrz oraz iloczyn wektorów skierowanych do wewnątrz i liczby dodatniej też jest skierowany do wewnątrz.

Definicja 33. Pole wektorowe $X :\ M \to TM$ jest skierowane do wewnątrz M jeśli $\forall_{p\in\partial M}\ X(p)$ jest skierowany do wewnątrz M.

Fakt 0.34. Na M istnieje gładkie pole wektorowe X skierowane do wewnątrz.
Dowód
Niech $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ będzie atlasem na M.
Niech $\{f_j\}$ będzie rozkładem jedności wpisanym w $\{U_\alpha\}$ i niech $supp(f_j) \subset U_{\alpha_j}$.
Dla tych U_α które zahaczają o brzeg ∂M określmy(lokalne) pole wektorowe $X_\alpha : U_\alpha \to TU_\alpha \subset TM$ wzorem $X_\alpha(p) = \frac{\partial}{\partial(\varphi_\alpha)_n}(p)$.
Dla pozostałych U_α określmy X_α dowolnie.
Zdefiniujmy $X = \sum\limits_{j} f_j X_{\alpha_j}$.
X jest gładkim polem wektorowym na całym M.
w punktach $p \in \partial M$ powyższa suma to kombinacja liniowa wektorów skierowanych do wewnątrz z dodatnimi współczynnikami, więc jest to wektor skierowany do wewnątrz.

Uwaga 0.35. Niech $f : M \to N$ będzie dyfeomorfizmem i niech $X \in \mathcal{X}(M)$.
Przypomnijmy $df : TM \to TN$ odwzorowanie styczne(gładkie).
poszczególne wektory $X(p)$ pola X przenoszone przez df do TN
$df_p\big(X(p)\big) = df(x)_{f(p)}$ $df(X)(q) = df_{f^{-1}(a)}\big(X(f^{-1}(a)\big)$
bardziej formalnie, $df(x)$ jako odwzorowanie $N \to TN$ jest złożeniem $df(x) = df \circ X \circ f^{-1}$.

Wniosek 34. *$df(x)$ jest gładkim polem wektorowym na rozmaitości N.*
Będziemy je nazywać ***przeniesieniem*** *pola X przez f na N.*

Krzywe całkowe i potoki pól wektorowych

Niech M będzie rozmaitością bez brzegu.

Definicja 35. **Krzywa całkowa** pola $X \in \mathcal{X}(M)$ to dowolna krzywa $\gamma : (a,b) \to M$ taka, że

$$\forall_{t\in(a,b)}\ d_{\gamma_t}\big(\frac{\partial}{\partial t(t)} = [\gamma, t] = \gamma'(t) = X\big(\gamma(t)\big)$$

Lemat 36. *pomocniczy: γ jest krzywą całkową pola $x \in \mathcal{X}$ iff dla każdej mapy (U,φ) na M krzywa $\varphi\circ\gamma$(gdzie γ jest wyrażona w tej mapie) jest krzywą całkową pola $d_\varphi(X) \in \mathcal{X}\Big(\varphi(U)\Big)$.*
Dowód
$\Rightarrow$. *Jeśli* $\gamma'(t) = [\gamma, t] = X\big(\gamma(t)\big)$ *to* $\big(\varphi\circ\gamma\big)'(t) = [\varphi\circ\gamma, t] = d_{\varphi_{\gamma(t)}}\big([\gamma,t]\big) = d_{\varphi_{\gamma(t)}}\Big(X\big(\gamma(t)\big)\Big) = d\varphi(X)\big(\varphi\circ\gamma'(t)\big)$
$\Leftarrow$. *Jeśli* $\big(\varphi\circ\big)'(t) = d\varphi(x)\big(\varphi(\gamma(t))\big)$ *to*

$$\gamma'(t) = [\varphi^{-1}(\varphi\circ\gamma)]'(t) = d_{\varphi^{-1}_{\varphi_{\gamma(t)}}}[[(\varphi\circ\gamma)'(t)] = d_{\varphi^{-1}_{\varphi\gamma(t)}}[d\varphi(X)\big(\varphi\circ\gamma(t)\big)] = d_{\varphi^{-1}_{\varphi\gamma(t)}} d\varphi_{\gamma(t)}[X\big(\gamma(t)\big)] = X\big(\gamma'(t)\big)$$

Uwaga 0.36. Pole $d\varphi(x) \in \mathcal{X}\big(\varphi(U)\big)$ będziemy nazywać lokalnym wyrażeniem pola $X \in \mathcal{X}(M)$ w mapie (U,φ) na M.

- Istnienie krzywych całkowych:
  $\forall_{p\in M}$ istnieje krzywa całkowa o początku w p tzn $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ taka, że $\gamma(0) = p$.
  Dowód
  Niech $d\varphi(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}(x),\ \varphi(p) = x_0 \in \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$.
  Wystarczy pokazać, że istnieje krzywa całkowa pola $d_\varphi(x)$ o początku x_0 czyli taka krzywa $C : (-\varepsilon,\varepsilon) \to \varphi(U)$ że $\forall_t C'(t) = [a_1\big(c(t)\big), a_2\big(c(t)\big), \dots, a_n\big(c(t)\big)]$ z warunkiem początkowym $c(0) = x_0$. Z teorii równań różniczkowych zwyczajnych taka krzywa istnieje.

- Jednoznaczność:
  Krzywe całkowe $\gamma_1(t), \gamma_2(t) : (a,b) \to M$ pola $X \in \mathcal{X}$ takie, że $\gamma_1(t_0) = \gamma_2(t_0)$ dla pewnego $t_0 \in (a,b)$ są równe.
  Dowód
  zbiór $A = \{t \in (a,b) :\ \gamma_1(t) = \gamma_2(t)\}$ jest:
  - domknięty, z ciągłości γ_1 i γ_2
  - otwarty, z lokalnej jednoznaczności krzywych całkowych wynikającej z lokalnej jednoznaczności rozwiązać równań różniczkowych zwyczajnych
  - niepusty, bo $t_0 \in A$.

  Stąd $A = (a,b)$ ∎

- Gładka zależność od punktu początkowego - lokalnie:
  $\forall_{p\in M}\ \exists_{U_p\subset M}$ otwarty, $p \in U_p$, $\exists_{\varepsilon>0}$, $\exists_{\Gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\times U_p\to M}$ gładkie, takie że $\forall_{q\in M}\ \gamma_q :\ (-\varepsilon,\varepsilon) \to M$ zadana przez $\gamma_q(t) = \Gamma(t,q)$ jest krzywą całkową pola X o początku w q.
  Dowód
  Zastosowanie gładkiej zależności od warunku początkowego dla rozwiązań równań różniczkowych zwyczajnych. ∎

Definicja 37. Pole wektorowe $X \in \mathcal{X}(M)$ jest zupełne, jeśli $\forall_{p\in M}$ istnieje krzywa całkowa $\gamma : \mathbb{R} \to M$ taka że $\gamma(0) = p$(tzn każda lokalna krzywa całkowa pola X przedłuża się do całego $\mathbb{R}$.

Przykład 12. Pole $X(x,y) = -y \cdot \frac{\partial}{\partial x}(x,y) + x \cdot \frac{\partial}{\partial y}(x,y)$ jest zupełne.
Krzywe całkowe pola mają postać $\gamma(t) = \big(r\cos(t+t_0), r\sin(t+t_0)\big)$, gdzie r, t_0 są parametrami.
To samo pole obcięte do $\mathbb{H}^2 = \{(x,y) :\ y > 0\}$ nie jest zupełne.

Fakt 0.37. Jeśli pole $X \in \mathcal{X}(M)$ jest zupełne, oraz $\forall_{p\in M} :\ \gamma_p : \mathbb{R} \to M$ jest(maksymalną) krzywą całkową pola X o początku p, to

$$\Gamma : \mathbb{R} \times M \to M \text{ zadane przez } \Gamma(t,p) = \gamma_p(t)$$

jest gładkie.
Ponadto, $\forall_{t\in\mathbb{R}}$ odwzorowanie $\varphi_t^X : M \to M$ zadane przez $\varphi_t^X(p) = \gamma_p(t) = \Gamma(t,p)$ jest dyfeomorfizmem rozmaitości M i przyporządkowanie $t \to \varphi_t^X$ jest homomorfizmem grupy addytywnej $\mathbb{R}$ w grupę dyfeomorfizmów rozmaitości M.
Dowód
Z gładkiej lokalnej zależności od punktu początkowego wynika gładka globalna zależność, w sposób taki sam jak w teorii równań różniczkowych zwyczajnych. Stąd gładkość Γ.
Z powyższego, $\varphi_t^X = \Gamma(t,\cdot)$ jest gładka $M \to M$.
Oczywiście $\varphi_0^X = id_M$.
Ponadto zachodzi $\varphi_{t+s}^X = \varphi_t^X \circ \varphi_s^X\ \forall_{t,s\in\mathbb{R}}$, bo

$$\forall_{t\in\mathbb{R}} \frac{d}{dt}\varphi_t^X\big(\varphi_s^X(p)\big) = X\Big(\varphi_t\big(\varphi_s^X(p)\big)\Big)$$

$$\frac{d}{dt}\varphi_{t+s}^X(p) = X\big(\varphi_{t+s}^X(p)\big)$$

A zatem obie krzywe $t \to \varphi_t^X\big(\varphi_s^X(p)\big)$ oraz $t \to \varphi_{t+s}(p)$ są krzywymi całkowymi pola X o początku w $\varphi_s^X(p)$.
Z jednoznaczności krzywych całkowych są one równe.
Z równości $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ wynika:

- φ_t jest dyfeomorfizmem, bo $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0 = id_M$ więc $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ jest gładką odwrotnością
- $t \to \varphi_t^X$ jest homomorfizmem $\mathbb{R} \to Diff(M)$.

■

Rodzina $\{\varphi_t = \varphi_t^X\}_{t\in\mathbb{R}}$ jest nazywana **potokiem** pola X, **jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów** generowaną przez D, **potokiem fazowym** pola X.
Krzywe całkowe $t \to \varphi_t^X(p)$ są nazywane trajektoriami potoku $\{\varphi_t^X\}$, krzywymi fazowymi pola X, trajektoriami pola X.

Przykład 13. Dla pola $X = -y\cdot\frac{\partial}{\partial x} + x\cdot\frac{\partial}{\partial y}$ na $\mathbb{R}^2$ mamy potok $\varphi_t^X(x,y) = (x\cdot\cos t - y\cdot\sin t, x\cdot\sin t + y\cdot\cos t)[\varphi_t^X$ jest obrotem o kąt t wokół $(0,0)]$.

Definicja 38. **Jednoparametrową grupą dyfeomorfizmów** rozmaitości M nazywamy każdy homomorfizm $\mathbb{R} \to Diff(M)$ gładko zależny od $t[(t,p) \to \varphi_t(p)$ gładkie na $\mathbb{R} \times M \to M]$.

Fakt 0.38. Każda jednoparametrowa grupa dyfeomorfizmów na M jest potokiem pewnego zupełnego pola wektorowego $X \in \mathcal{X}(M)$.
Dowód
Pojawi się jako szczególny przypadek ogólniejszego kontekstu. ■

W przypadku, gdy $X \in C^\infty(TM)$ jest niekoniecznie zupełna, znajdujemy **lokalną jednoparametrową rodzinę dyfeomorfizmów**, czyli $\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \Phi^\alpha)\}_\alpha$, gdzie

① U_α jest otwartym pokryciem M,

② $\varepsilon_\alpha > 0,\ \Phi^\alpha(-\varepsilon_\alpha : \varepsilon_\alpha) \times U_\alpha \to M$ jest gładkie

③ $\forall_\alpha\ \forall_{p\in U_\alpha}\ \Phi^\alpha(0,p) = p$

④ Stosujemy oznaczenie $\Phi^\beta_t(p) = \Phi^\beta(t,p$ jeśli $s, s+t \in (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha),\ p \in U_\alpha,\ \Phi^\alpha_s(p) \in U_\beta,\ t \in (-\varepsilon_\beta, \varepsilon_\beta)$ to $\Phi^\beta_t\big(\Phi^\alpha_s(p)\big) = \Phi^\alpha_{t+s}(p)$.

Każdy $(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \Phi^\alpha)$ tworzy z lokalnych krzywych całkowych pola X o punktach początkowych w U_α, czyli tak że $t \to \Phi^\alpha(t,p),\ (-\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\alpha) \to M$ są krzywymi całkowymi pola X.

Twierdzenie 39. *Każda abstrakcyjna lokalnie jednoparametrowa rodzina dyfeomorfizmów rozmaitości M jest wyznaczona przez jednoznaczne gładkie pole wektorowe $X \in C^\infty(TM)$. Ponadto, jeśli jest to prawdziwa 1-par gpa dyfeo, to pole X jest zupełna.*
Rodzinę $\{(U_\alpha, \varepsilon_\alpha, \Phi^\alpha)\}_\alpha$ nazywamy potokiem pola X.
Dowód
Weźmy pole X na M przez:

- *dla $p \in U_\alpha,\ X(p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^\alpha(t,p) \in T_pM$ z warunku ③*
- *powyższy wzór określa gładkie pole wektorowe na $U_\alpha \subset M$*
- *dobra określoność:*
  pokażemy, że jeśli $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ to $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^\alpha(t,p) = \frac{d}{dt}\big|_{t=0}\Phi^\beta(t,p)$.
  Stosując ④ do $s = 0$(bo wtedy $\Phi^\alpha_s(p) = \Phi^\alpha_0(p) = s \in U_\beta$) mamy
  $$\Phi^\beta_t(p) = \Phi^\beta_t\big(\Phi^\alpha_0(p)\big) = \Phi^\alpha_{t+0}(p) = \Phi^\alpha_t(p) \text{ dla } y \in (-\varepsilon, \varepsilon), \text{ gdzie } \varepsilon = min\{\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta\}$$
  stąd wymagana równość pochodnych, a wiec X jest dobrze określonym gładkim polem na M.
- *Krzywe $t \to \Phi^\alpha(t,p)$ są krzywymi całkowymi tak określonego pola X.*
  Mamy pokazać że
  $$\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}\Phi^\alpha(t,p) = X\Phi^\alpha(t_0,p) \quad \forall_{p\in U_\alpha},\ \forall_{t_0 \in (-\varepsilon,\varepsilon)}$$
  Z tego że zbiory U_β pokrywają M istnieje taka β, że $\Phi^\alpha(t_0,p) \in U_\beta$.
  Wtedy $\frac{d}{dt}\big|_{t=t_0}\Phi^\alpha(t,p) = \frac{d}{dt}\big|_{s=0}\Phi^\alpha(t_0+s,p) = \frac{d}{dt}\big|_{s=0}\Phi^\beta_s\Big(\Phi^\alpha_{t_0}(p)\Big) = X\big(\Phi^\alpha_{t_0}(p)\big) = X\big(\Phi^\alpha(t_0,p)\big)$

Ostatnia część tezy jest oczywista z przyporządkowania $(U_\alpha = M,\ \varepsilon_\alpha = \infty,\ \Phi^\alpha = \Gamma$. ■

Lemat 40. *(kryterium zupełności).*
Jeśli $X \in C^\infty(TM)$ ma nośnik zwarty, to X jest zupełnym polem wektorowym.
W szczególności na zamkniętej rozmaitości dowolne pole wektorowe jest zupełne.
Dowód
Nośnik $supp(X)$ możemy pokryć skończoną rodziną zbiorów U_{α_i} dla których istnieją odpowiednie Φ^{α_i} : $(-\varepsilon,\varepsilon) \times U_{\alpha_i} \to M$ takie jak w L1PGD generowanej przez X. Wtedy dla $\varepsilon = \min_i\{\varepsilon_i\} > 0$, z każdego $p \in M$ możemy wystawić krzywą całkową o początku w p, określoną na przedziale $(-\varepsilon,\varepsilon)$. Jednostajność tego ε na całym M oznacza, że krzywe całkowe możemy przedłużać do całego $\mathbb{R}$. ■

Wykład 8 - 13.05.2015

Przestrzenie styczne - definicja kinematyczna

Oznaczenia z analizy:

1) *Dla gładkiej $f : (a,b) \to \mathbb{R}^n,\ t \in (0,1)$ pochodna* $f(t) = \frac{\partial f}{\partial t} = \begin{bmatrix} f'_1(t) \\ \vdots \\ f'_n(t) \end{bmatrix}$

2) *Dla gładkiego $f : U \to \mathbb{R}^m,\ U \subset \mathbb{R}^n,\ p \in U$ oznaczamy D_pf to macierz pierwszych pochodnych cząstkowych, dokładniej:*
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1}(p) & \frac{\partial f_1}{x_2}(p) & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n}(p) \\ \frac{\partial f_2}{x_1}(p) & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \\ \frac{\partial f_m}{x_1}(p) & & . & \frac{\partial f_m}{x_n}(p) \end{bmatrix}$$
tak samo oznaczamy odwzorowanie liniowe $\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ zadane przez tę macierz.

Definicja 41. Styczność krzywych przechodzących przez ten sam punkt.
Niech M będzie rozmaitością, $p \in M$. Definiujemy C_pM - zbiór par (c, t_0) takich, że $c : (a, b) \to M$ jest gładką krzywą na M taką, że $t_0 \in (a, b)$ i $c(t_0) = p$. Jest to zbiór krzywych na M źbazowanych"(zaczepionych) w punkcie p.
Niech $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ będzie mapą na M wokół p. Krzywe (c_1, t_1), (c_2, t_2) są styczne w mapie (U, φ) jeżeli $(\varphi \circ c_1)'(t_1) = (\varphi \circ c_2)'(t_2)$.

Lemat 42. *Jeżeli (c_1, t_1), $(c_2, t_2) \in C_pM$ są styczne w mapie (U, φ) wokół p to są styczne w dowolnej innej mapie (W, ψ) wokół p.*
Dowód
$(\psi \circ c_1)'(t_1) = [(\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_1)]'(t_1) = D_{\varphi(p)}(\psi \circ \varphi^{-1})[(\varphi \circ c_1)'(t_1)] = (\varphi \circ c_1)'(t_2)$ ■

Definicja 43. Krzywe (c_1, t_1), $(c_2, t_2) \in C_pM$ są stycznej w pewnej(każdej) mapie wokół p. Styczność elementów z C_pM jest relacją równoważności.

Definicja 44. Przestrzenią styczną do M w punkcie p to zbiór klas abstrakcji

$$T_pM = C_pM/\text{styczność}$$

Klasę abstrakcji krzywej $(c, t_0) \in C_pM$ oznaczamy przez $[c, t_0]$ lub $c'(t_0)$.
Struktura wektorowa na T_pM
Dla mapy $\varphi : U \to \mathbb{R}^n$ wokół $p \in M$ określamy odwzorowania:

- $\varphi_p^* : T_pM \to \mathbb{R}^n \quad \varphi_p^*([c, t_0]) = (\varphi \circ c)'(t_0)$ - bijekcja, dobrze określona
- $\lambda_{\varphi,p}\ \mathbb{R}^n \to T_pM \quad \lambda_{\varphi,p}(v) = [c_v, 0]$, gdzie $c_v(t) = \varphi^{-1}\big(\varphi(p) + tv\big)$.

Lemat 45. *$\varphi_p^* \circ \lambda_{\varphi,p} = id\mathbb{R}^n$ oraz $\lambda_{t,p} \circ \varphi_p^* = id_{T_pM}$, a zatem są one jednoznaczne i wzajemnie do siebie odwrotne.*
Dowód
Niech $v \in \mathbb{R}^n$, $\varphi_p^* \circ \lambda_{\varphi,p}(v) = \varphi_p^*([c_v, 0]) = (\varphi \circ c_b)'(0) = \frac{d}{dt}\varphi\Big(\varphi^{-1}(\varphi(p) + tv)\Big) = c.$
Niech $[c, t_0] \in T_pM$.
$\lambda_{\varphi,p} \circ \varphi_p^*([c, t_0]) = \lambda_{\varphi,p}[(\varphi \circ c)'(t_0)] = [c_{(\varphi \circ c)'(t_0)}, 0]$.
Sprawdziliśmy, że (c, t_0) i $(c_{(\varphi \circ c)'(t_0)}, 0)$ są styczne w mapie φ. $c'_{(\varphi \circ p)'(t_0)}(0) = \frac{d}{dt}(\varphi(p)t(\varphi \circ c)'(t_0) = (\varphi \circ c)'(t_0$ czyli styczność w (U, φ). WTF???

Lemat 46. *Na przestrzeni stycznej T_pM istnieje dokładnie jedna struktura przestrzeni wektorowej, dla której odwzorowania φ_p^*, $\lambda_{\varphi,p}$ dla wszystkich map wokół p są odwzorowaniami liniowymi.*
Dowód
Aby φ_p^* było liniowe, struktura taka musi być zadana następująco:

- *dla $x, y \in T_pM$, $x + y = \lambda_{\varphi,p}\big(\varphi_p^*(x) + \varphi_p^*(y)\big)$*
- *dla $x \in T_pM$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $ax = \lambda_{\varphi,p}(\alpha\varphi_p^*(x))$*

Pozostaje sprawdzić zgodność tych działań z działaniami zadanymi przy pomocy innej mapy (ψ, V) wokół p:

$$\mathbb{R}^n \underset{\psi_p^*}{\overset{\lambda_{\psi,p}}{\longleftrightarrow}} T_pM \underset{\varphi_p^*}{\overset{\lambda_{\varphi,p}}{\longleftrightarrow}}$$

Wystarczy uzasadnić, że złożenie $\psi_p^* \circ \lambda_{\varphi,p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ jest liniowe
$\psi_p^* \circ \lambda_{\varphi,p}(v) = \psi_p^*([c_v, 0]) = \frac{d}{dt}\psi\Big(\varphi^{-1}\big(\varphi(p) + tv\big)\Big) = D_{\varphi(p)}(\psi\varphi^{-1})[\frac{d}{dt}\big(\varphi(p) + vt\big] = D_{\varphi(p)}(\psi\varphi^{-1})(v)$
Ponieważ macierz $D_{\varphi(p)}(\psi\varphi^{-1})$ nie zależy od v mamy liniowość.

Definicja 47. Elementy T_pM nazywamy wektorami stycznymi do M w punkcie p.

Przykład 14. $M = \mathbb{R}^n$. Mamy wyróżnioną mapę $\varphi : M \to \mathbb{R}^n$ $\varphi = id_{\mathbb{R}^n}$ dla każdego $p \in \mathbb{R}^n$ ta mapa, poprzez $\varphi_p^* = (id_{\mathbb{R}^n})_p^*$ kanonicznie utożsamia $T_p\mathbb{R}^n$ z $\mathbb{R}^n$. Podobnie dla $M = U \subset \mathbb{R}^n$.
Oznaczenia:

1. Wektory styczne do $M = \mathbb{R}^n$ lub $M = U \subset \mathbb{R}^n$ odpowiadające wersorom oznaczamy przez $\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$. Tworzą one bazę T_pM, więc dla $v \in T_pM$ $v = \sum^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i}$
2. Przez analogię dla dowolnej M, $p \in M$, (φ, U) wokół p przeciwobrazy w T_pM przez φ_p^* wersorów w $\mathbb{R}^n$ oznaczamy $(\varphi_p^*)^{-1}e_i = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$

Różniczka:
Niech $f : M \to N$ będzie gładkim odwzorowaniem rozmaitości, $p \in M$, $f(p) = q \in N$, $\dim M = m$, $\dim N = n$. Dla krzywej $(c, t_0) \in C_pM$ mamy $f \circ c, t_0) \in C_qN$.

Lemat 48. *Jeżeli* (c_1, t_1), $(c_2, t_2) \in C_pM$ *są styczne, to* $(f \circ c_1)$, $(f \circ c_2)$ *też są styczne.*
Dowód
Z definicji. ■

Definicja 49. Różniczką f w punkcie p nazywamy odwzorowanie

$$df_p : \ T_pM \to T_qN \quad df_p([c, t_0]) = [f \circ c, t_0]$$

Lemat 50. *Różniczka* df_p *jest odwzorowaniem liniowym.*
Dowód
Wystarczy sprawdzić, że złożenie $\mathbb{R}^m \underset{\lambda_{\varphi,p}}{\longrightarrow} T_pM \underset{df_p}{\longrightarrow} T_qN \underset{\psi_q^*}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$ *jest liniowe.*
$\psi_q^* df_p \lambda_{\varphi,p}(v) = \psi_q^* df_p([c_v, 0]) = \psi_q^*([f \circ c_v, 0]) = (\psi \circ f \circ c_v)'(0) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ c_v)(0) = D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1})((\varphi \circ c_v)'(0)) = D_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1})(v)$ *jest liniowe.*
Dla map φ *wokół* p *w* M *i* ψ *wokół* q *w* N *złożenie*

$$\mathbb{R}^n \underset{(\varphi_p^*)^{-1}}{\longrightarrow} T_pM \underset{df_p}{\longrightarrow} T_pN \underset{\psi_q^*}{\longrightarrow} \mathbb{R}^n$$

ma postać $\psi_q^* df_p (\varphi_p^*)^{-1}(v) = F_{\varphi(p)}(\psi f \varphi^{-1})[v]$, *zatem jest liniowe. Ponadto w bazach* $\{\frac{\partial}{\partial \varphi(p)}\}$, $\{\frac{\partial}{\partial \psi_i}(q)\}$ df_p *jest zadane macierzą* $D_{\varphi(p)}\big(\psi f \varphi^{-1}\big)$ *zatem ma postać* $df_p[\sum a_i \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)] = \sum_i \sum_j \frac{\partial(\psi f \varphi^{-1}}{\partial x_j}(\varphi p) a_j] \frac{\partial}{\partial \psi_i}\big(\varphi(p)\big)$

Różniczka funkcji gładkiej $f : M \to \mathbb{R}$

Niech $f : M \to \mathbb{R}$ *będzie gładkie,* $p \in M$. *Wówczas różniczka* df_p *jest funkcjonałem liniowym na* T_pM. *Dla* $X = [c, t_0] \in T_pM$ *zachodzi*

$$df_p(x) = df_p[c, t_0] = [f \circ c, t_0] = (f \circ c)'(t_0)$$

Definicja 51. Dla $X \in T_pM$ pochodną z funkcji $f : M \to \mathbb{R}$ w kierunku X nazywamy liczbę $df_p(x)$ i oznaczamy ją $x \cdot f$.

Uwaga 0.39. 1) $x(f + g) = xf + xg$

2) $x(fg) = q(p)xf + f(p)xg$

3) $(ax)f = a(xf)$

4) $x, y \in T_pM \Rightarrow (x + y)f = xf + yf$

Przykład 15. 1) $X = \frac{\partial}{\partial x_i}(p) \in T_p\mathbb{R}^n$ $f : \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ gładka to $xf = \frac{\partial}{\partial x_i} f(p)$

2) $x = \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p) \in T_pM$ $f : M \to \mathbb{R}$ to $xf = \frac{\partial(f\varphi^{-1})}{\partial x_i}\big(\varphi(p)\big)$

Wiązka styczna do rozmaitości

$TM = \dot{\bigcup\limits_{p \in M}} T_pM$.
Rzutowanie $\pi TM \to M \quad \pi(v) = p$ gdy $v \in T_pM$.

Lemat 52. *Niech M będzie m wymiarową rozmaitością klasy C^k, $k > 1$. Wtedy na TM istnieje naturalna struktura $2n-$wymiarowa rozmaitości klasy C^{k-1} dla której π jest C^{k-1} różniczkowalne.*
Dowód
Strukturę rozmaitości zadamy za pomocą map. Niech (U, φ) będzie mapą na M. Rozważmy zbiór

$$TU = \pi^{-1}(U) = \bigcup_{p \in U} T_pM$$

oraz odwzorowanie $\tilde{\varphi}$ $TU \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dane wzorem
$\tilde{\varphi}(u) = \big(\varphi\pi(u), \varphi^*_{\pi(u)}(u)\big)$ Zauważmy, że $\tilde{\varphi}$ jest różnowartościowa, obraz $\tilde{\varphi}$ to $\varphi(U)) \times \mathbb{R}^n$ - jest to zbiór otwarty.
Odwzorowanie przejścia $\tilde{\psi}\tilde{\varphi}^{-1}: \ \varphi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$
$\tilde{\psi}\tilde{\varphi}^{-1}(a, w) = \big(\psi\varphi(x), \psi^*_p\varphi^*_p(w)\big) = (\psi\varphi^{-1}(x), Dx(\psi\varphi^{-1})(w))$.
Współczynniki to funkcje C^{k-1} różniczkowalne względem x.

Definicja 53. Dla gładkiego $f : M \to N$ odwzorowaniem stycznym $df : TM \to TN$ nazywamy odwzorowanie

$$df(v) = df_{\pi(v)}(v) \in T_{f(p)}N \subset TN$$

Lemat 54. *Jeżeli f jest gładkie to df jest gładkie.*
Dowód
Niech $v \in T_pM$, (U, φ) będzie mapą w M, (V, ψ) mapą w N. Wyraźmy df lokalnie w mapach $\tilde{\varphi}$ i $\tilde{\psi}$.

$$\mathbb{R}^{2m} \xrightarrow{\tilde{\varphi}^{-1}} TU \xrightarrow{df} TV \xrightarrow{\tilde{\psi}} \mathbb{R}^{2m}$$
$$\tilde{\psi} \circ df \circ \tilde{\varphi}^{-1}(x, w) = \big(\psi f \varphi^{-1}(x), \psi^*_{f\psi^{-1}(x)} df_{\varphi^*(x)}(\varphi^*_{\varphi^{-1}(x)})^{-1}(w)\big) = Dx(\psi f \varphi^{-1})(w)$$

Pola wektorowe

Definicja 55. Gładkim polem wektorowym na M nazywamy gładkie odwzorowanie $X : M \to TM$ takie, że dla każdego $p \in M \quad X(p) \in T_pM \subset TM$(równoważnie $\pi \circ X = id_M$).
Wyrażenie pola X w mapach (U, φ) na M oraz $(TU, \tilde{\varphi})$ na TM.
$\tilde{\varphi} \circ x \circ \varphi^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2m}$
$\tilde{\varphi} x \varphi^{-1} = (x, [a_1(x), \ldots, a_n(x)])$, gdzie $a_i : \ \varphi(U) \to \mathbb{R}$ jest gładką funkcją rzeczywistą
Stąd $x(p) = \sum a_i(\varphi(p)) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$.
Funkcje $a_i \circ \varphi$ są gładkie. Oznaczmy je przez $b_i : U \to \mathbb{R}$.
$x(p) = \sum b_i(p) \frac{\partial}{\partial a_i}(p)$.

Fakt 0.40. $x : M \to TM$ jest gładkim polem wektorowym wtedy i tylko wtedy, gdy w mapach (U, φ) na M wyraża się jako $xp = \sum b_i(p) \frac{\partial}{\partial \varphi_i}(p)$ dla pewnych gładkich funkcji rzeczywistych $b_i : U \to \mathbb{R}$.

Wykład 9 - 18.05.2015

Interpretacja pól wektorowych jako tzw. derywacji

Definicja 56. Derywacja(lub różniczkowanie) w punkcie $p \in M$ to liniowy operator L_p : { z funkcji gładkich określonych na otwartych otoczeniach $p \in M\} \to \mathbb{R}$ spełniający regułę Leibniza, tj. $L_p(f \cdot g) = f(p) \cdot L_p(g) + g(p) \cdot L_p(f)$.

Przykład 16. Niech $X \in T_pM$. Wówczas pochodna w kierunku X, $f \to X \cdot f$, jest przykładem derywacji w punkcie p.
Kilka własności derywacji w punkcie:

- Niech 0_U będzie funkcją stale równą 0 na otoczeniu U w punkcie p.
  Wówczas dla dowolnej derywacji L_p zachodzi $L_p(0_U) = 0$.
  Również $L_p(1_V) = 0$, gdyż $L_p(1_V) = L_p(1_V \cdot 1_V) = 1 \cdot L_p(1_V) + 1 \cdot L_p(1_V)$.
- $f : U \to \mathbb{R}$, $p \in V \subset U$, to $L_p(f\big|_V) = L_p(f)$.
- Jeśli $f = g$ na pewnym otwartym otoczeniu p to $L_p(f) = L_p(g)$.

Uwaga 0.41. Ze względu na ostatni fakt rozważając derywacje w punkcie p można założyć, że f jest określona na otwartym otoczeniu U punktu $p = (0, \ldots, 0)$ w $\mathbb{R}^n$.

Lemat 57. *Dowolna gładka funkcja określona na kuli wokół punktu $p = (0, \ldots, 0)$ w $\mathbb{R}^n$ przedstawia się w postaci*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(0, \ldots, 0) + \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot h_i(x_1, \ldots, x_n)$$

gdzie h_i są gładkimi funkcjami, takimi że

$$h_i(0, \ldots, 0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0, \ldots, 0) \text{ dla } i = 1, \ldots, n$$

Dowód
Dla ustalonego $x = (x_1, \ldots, x_n)$

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f(tx)dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt = \sum_{i=1}^{n} x_i \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$$

Przyjmując $h_i(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx)dt$ mamy tezę. ■

Twierdzenie 58. *Każda derywacja L_p w punkcie $p \in M$ jest pochodną w kierunku pewnego wektora $X \in T_pM$. Wektor o tej własności jest jedyny.*
Dowód
Jedyność wynika z tego, że dla różnych $x \in T_pM$ operatory $f :\to X \cdot f$ są różne.
Rozważmy w lokalnych współrzędnych wokół p wektor $X \in T_pM$ zadany przez

$$X = \sum_{i=1}^{n} L_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}(p)$$

Pokażemy, że $\forall_f \ L_p(f) = Xf$.
Rozważmy przedstawienie z lematu $f = f(0) + \sum x_i h_i$.
Wówczas $L_p(f) = L_p\big(f(0) + \sum x_i h_i\big) = L_p\big(f(0)\big) = \sum\limits_{i=1}^{n} L_p(x_i \cdot h_i) = \sum\limits_{i=1}^{n} [x_i(p) \cdot L_p(h_i) + h_i(p) \cdot L_p(x_i)] = \sum\limits_{i=1}^{n} L_p(x_i) \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = [\sum\limits_{i=1}^{n} L_p(x_i) \frac{\partial}{\partial x_i}] \cdot f = X \cdot f.$ ■

Definicja 59. Derywacją na rozmaitości M nazywamy dowolny operator liniowy $L : C^\infty M \to C^\infty M$ i spełniający regułę Leibniza.

Przykład 17. Gładkie pole wektorowe X na M określa derywacje poprzez $L(f) = Xf$, lub dokładniej $L(f)(p) = X(p) \cdot f$.
Proste własności:

- $L(0_M) = 0$
- Jeśli f zeruje się na pewnym otoczeniu punktu p to $L(f)(p) = 0$.
  Dowód
  Niech $g \in C^\infty M$, $g(p) \neq 0$, $supp(g) \subset int(Z_f)$. Wówczas $f \circ g = 0_M$. Stąd

  $$0_M = L(0_M) = L(f \cdot g) = L(f) \cdot g + L(g) \cdot f$$

  $$0 = L(f)(p) \cdot g(p) + L(g)(p) \cdot f(p)$$

  Z tego, że $g(p), f(p) \neq 0$ mamy $L(f)(p) = 0$.
- Jeśli $f, g \in C^\infty M$, $f = q$ na otoczeniu $p \in M$, to $L(f)(p) = L(g)(p)$.

Twierdzenie 60. *Każda derywacja na M jest jednoznacznie zadana(jak w przykładzie) przez pewne gładkiego pole wektorowe X na M.*
Dowód
Derywacja L na M wyznacza derywacje L_p w każdym punkcie $p \in M$, poprzez

$$L_p(f) = L(\tilde{f})(p)$$

gdzie $\tilde{f} \in C^\infty M$ to dowolna funkcja pokrywająca się z f na pewnym otoczeniu p. Istnienie takiej $\tilde{f}$ dowodzi się za pomocą rozkładu jedności.
Niezależnie od wyboru $\tilde{f}$ wynik uzyskamy ten sam(ponieważ każde $\tilde{f}$ i $\tilde{f}'$ pokrywają się na pewnym otoczeniu punktu p, więc $L_p(\tilde{f}) = L_p(\tilde{f}')$).
Niech $X(p) \in T_pM$ będzie taki, że $L_p(f) = X(p) \cdot f$. Wtedy $L(f) = X \cdot f$.
Pozostaje sprawdzić, że tak określone pole wektorowe X jest gładkie.
Jeśli X nie jest gładkie, to w pewnym punkcie $p \in M$, w pewnych lokalnych współrzędnych wokół p, pewne współrzędna x_i pola $X = \sum X_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ nie jest funkcją gładką. Wtedy łatwo dobrać gładką f taką że Xf nie jest gładka.
Stąd gładkość X. ■

Konsekwencją twierdzenia jest przyporządkowanie:

$$\{ \text{ derywacje na } M \leftrightarrow \{ \text{ gładkie pola na } M$$

Komutator pól wektorowych

Fakt 0.42. Niech $X, Y \in C^\infty TM$.
Wówczas operator $XY - YX : C^\infty M \to C^\infty M$ określony przez $f \to XYf - YXf$ jest derywacją na M.
Dowód
Liniowość jest oczywista X i Y jako derywacji.
Wystarczy zatem sprawdzić regułę Leibniza:

$$(XY - YX)(f \cdot g) = XY(f \cdot g) - YX(f \cdot g) = X(g \cdot Yf + f \cdot Yg) - Y(f \cdot Xg + g \cdot Xf) =$$
$$= X(g \cdot Yf) + X(f \cdot Yg) - Y(f \cdot Xg) - Y(g \cdot Xf) =$$
$$= Yf \cdot Xg + g \cdot (XYf) + Yg \cdot Xf + f \cdot (XYg) - Yf \cdot Xg - f \cdot (YXg) - Yg \cdot Xf - g \cdot (YXf) =$$
$$= g(XYf - YXf) + f(XYg - YXg) = g \cdot [(XY - YX)f] + f \cdot [(XY - YX)g]$$

■

Definicja 61. Pole wektorowe na M odpowiadające derywacji $XY - YX$ oznaczać będziemy symbolem $[X, Y]$ i nazywać komutatorem pól X i Y.
Własności

① Antyprzemienność, tj $[X, Y] = -[Y, X]$

② $[X + Y, Z] = [X, Z] + [Y, Z]$

③ $[f \cdot X, Y] = f \cdot [X, Y] - Yf \cdot X$

④ $[X, f \cdot Y] = f[X, Y] + Xf \cdot Y$

⑤ Tożsamość Jacobiego.

Wykład ??? - 08.06.2015

Definicja 62. $N \subset M^m$ jest podrozmaitością n−wymiarową ($n \leq m$) jeśli każdy $p \in N$ posiada mapowe otoczenie U_p w M i mapę $\varphi : U_p \to V \subset \mathbb{R}^m$ takie, że

$$\varphi U_p \cap N) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in V : x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\}$$

Podrozmaitość zadana przez odwzorowanie włożenia

Definicja 63. Odwzorowanie gładkie $f : N \to M$ jest immersją, gdy $n \leq m$ oraz rząd f w każdym punkcie jest równy n, $rank(f,x) = n = \dim N \ \forall_{x \in N}$.
Immersje f nazywamy (gładkim) włożeniem jeśli jest homeomorfizmem na obraz.

Fakt 0.43. Obraz $f(M) \subset N$ przez włożenie $f : N \to M$ jest podrozmaitością.
Dygresja. Twierdzenie o rzędzie

- W algebrze liniowej.
  Jeśli $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ jest liniowe, $k \leq n$ i $rank(F) = k$. Niech $e_1, \ldots, e_k$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^k$. Wówczas istnieje baza $b_1, \ldots, b_n$ w $\mathbb{R}^n$ taka, że $F(e_i) = b_i$ dla $i = 1, \ldots, k$.
  Równoważnie:
  Istnieje liniowy automorfizm $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ taki, że
  $$\psi \circ F(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$
- W analizie:
  $k \leq n$, $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna, $f(0) = 0$, $rank(f, 0) = k$. Wówczas istnieje dyfeomorfizm $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ oraz otoczenie $U \subset \mathbb{R}^k$ zawierające 0, takie że
  $$\psi \circ f\big|_U(x_1, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)$$

Dowód
faktu:
Niech $p = f(q) \in f(N)$ i niech (V, ψ) będzie mapą wokół p w M. Niech (W_q, ϕ) będzie mapą wokół q, taką że $f(W_q) \subset V$.
f wyrażone w mapach ϕ, ψ, czyli $\psi f \phi^{-1} : \phi(W_q) \to \psi(V)$
ma rząd n w punkcie $\phi(q)$.
Z twierdzenia o rzędzie istnieje mniejsze otoczenie $W' \subset \phi(W_q)$ punktu $\phi(q)$ oraz dyfeomorfizm $\xi : \psi(V) \to V' \subset \mathbb{R}^m$ taki ,że
$$\xi \psi f \phi^{-1}|_{W'}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$$
Ponieważ f jest homeomorfizmem na obraz, to istnieje otwarte $V_0 \subset V$ taki że $f\phi^{-1}(W') = V_0 \cap f(N)$.
Wtedy $\xi\psi(V_0 \cap f(N)) = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \xi\psi(V_0) : \ x_{n+1} = \ldots = x_m = 0\}$.

Podrozmaitości zadane równaniami

Definicja 64. Dla gładkiego $f : M^m \to N^n$, $m \geq n$. Wtedy $x \in M$ jest punktem regularnym f gdy $rank(f, x) = n$.
$y \in N$ jest wartością regularną f, gdy każdy $x \in f^{-1}(y)$ jest punktem regularnym.

Fakt 0.44. Jeśli $y_0 \in N$ jest wartością regularną dla $f : N^n \to M^m$, $m \geq n$ to zbiór $f^{-1}(y_0) = \{x \in M : f(x) = y_0\}$ jest podrozmaitością w M wymiaru $m - n$.

Przykład 18. $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.
$f : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$, $f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2 = 1$ jest wartością regularną f.
$S^n = f^{-1}(1)$ jest n wymiarową podrozmaitością w $\mathbb{R}^{n+1}$.

Twierdzenie 65. *o rzędzie - wariant 2*

- *W algebrze liniowej.*
  $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ liniowe, $k \geq n$, $rank(F) = n$. Niech $e_1, \ldots, e_n$ będzie standardową bazą w $\mathbb{R}^n$. Wówczas istnieje baza $b_1, \ldots, b_k$ w $\mathbb{R}^k$ taka że $F(b_i) = e_1$ dla $i = 1, \ldots, n$, oraz $F(b_k) = 0$ dla $j = n+1, \ldots, m$.
  Równoważnie:
  Istnieje liniowy automorfizm $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ taki, że
  $$F \circ \varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_k) = (x_1, \ldots, x_n)$$
  Uwaga 0.45. Wówczas $\varphi(kerF) = ker(F \circ \varphi^{-1}) = \{x \in \mathbb{R}^k : \ x_1 = \ldots = x_n = 0\} = \{(0, \ldots, 0, x_{n+1}, \ldots, x_k)\}$.

$k \geq n$, $f\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ różniczkowalne, $f(0) = 0$, $rank(f, 0) = n$. Wówczas istnieje dyfeomorfizm φ : $(\mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}^k, 0)$ oraz otoczenie $U \subset \mathbb{R}^k$, $0 \in U$ takie że

$$f \circ \varphi^{-1}\big|_{\varphi(U)}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

Uwaga 0.46. Wówczas $\varphi[f^{-1}(0) \cap U] = \{x \in \varphi(U) : \ x_1 = \ldots = x_n = 0\}$.

Fakt 0.47. Jeśli $y_0 \in N$ jest wartością regularną dla $f : M^m \to N^n$, $m \geq n$, to zbiór $f^{-1}(y_0) = \{x \in M : f(x) = y_0\}$ jest podrozmaitością w M wymiaru $m - n$.
Dowód
Niech $p \in f^{-1}(y_0)$.
Zastąpimy M przez otoczenie mapowe U punktu y_0, które od razu utożsamiamy z otwartym podzbiorem w $\mathbb{R}^n$. Zastąpimy M przez $f^{-1}(U)$. Możemy przyjąć, że $N = \mathbb{R}^n$, $y_0 = 0 \in \mathbb{R}^n$.
Z twierdzenia o rzędzie, istnieje otoczenie V punktu p w $f^{-1}(U)$ oraz mapa $\varphi : V \to \mathbb{R}^m$ taka że $f\varphi^{-1}(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m) = (x_1, \ldots, x_n)$.
Wtedy $\varphi(V \cap f^{-1}(0)) = \{(x_1, \ldots, x_m) \in \varphi(V) : \ x_1 = \ldots = x_m = 0\}$.
Pokazaliśmy, że $f^{-1}(y_0)$ jest podrozmaitością w $f^{-1}(U)$.
Korzystając z tego, że $X \subset M$ jest podrozmaitością $\Leftrightarrow$ $X \cap U$ jest podrozmaitością w U dla U z pewnego pokrycia zbiorami otwartymi w M.
Korzystamy z prostszego faktu, tj.
$X \subset M$ jest podrozmaitością w M $\Leftrightarrow$ $X \subset U$ jest podrozmaitością w U dla pewnego otwartego $U \subset M$ takiego, że $X \subset U$.

Fakt 0.48. Ogólniejszy. Niech $f : M^m \to N^n$, $m \geq n$ i niech $P^p \subset N^n$ będzie podrozmaitością złożoną z samych wartości regularnych f. Wówczas $f^{-1}(P)$ jest podrozmaitością w M wymiaru $m - n + p$.
Dowód
Przedstawimy lokalnie $P \subset N$ jako $\{(x_1, \ldots, x_n) : x_{p+1} = \ldots = x_n = 0\}$ i rozważmy rzut $\pi : (x_1, \ldots, x_n) = (x_{p+1}, \ldots, x_n)$.
Otrzymujemy lokalnie $f^{-1}(P) = (\pi \circ f)^{-1}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p})$.
Zauważmy, że $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n-p})$ jest wartością regularną $\pi \circ f$, tzn $\forall_{x \in f^{-1}(p)}$ $rank(\pi \circ f, x) = n - p$. Tak jest, bo $D_x \pi \circ f = D_{f(x)} \pi \circ D_x f$ ma rząd maksymalny(złożenie dwóch macierzy o rzędach maksymalnych ma rząd maksymalny).
Stąd $\forall_{x \in f^{-1}(P)}$ $\exists_{U \ni x}$ $f^{-1}(P) \cap U$ jest podrozmaitością w U, skąd $f^{-1}(P)$ jest podrozmaitością w M.

Przykład 19. $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$. Rozważmy $det : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
$det \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = xt - yx$ jest gładkie.

Fakt 0.49. Dowolna niezerowa macierz jest punktem regularnym odwzorowania det.
Dowód
$Ddet \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \left(\frac{ddrt}{dx}, \frac{ddet}{dy}, \frac{ddet}{dt}, \frac{ddet}{dt}\right) = (t, -z, -y, x) \neq (0, 0, 0, 0)$ dla $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Stąd $rankD_{(x,y,z,t)}dt = 1$ dla $\begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Wniosek 66. *Dowolna liczba $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ jest wartością regularną odwzorowania det.*
$SL_2\mathbb{R} = \{A \in A_{2\times 2}(\mathbb{R}) : \ \det A = 1\} = det^{-1}(1)$.

- *$SL_2\mathbb{R}$ jest grupą*
- *$SL_2\mathbb{R}$ jest podrozmaitością w $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ - gładka 3 wymiarowa rozmaitość.*
- *Dodatkowo(dd na ćwiczeniach), operacje grupowe:*
  mnożenia: $SL_2\mathbb{R} \times SL_2\mathbb{R} \to SL_2\mathbb{R}$
  odwrotności: $SL_2\mathbb{R} \to SL_2\mathbb{R}$
  są odwzorowaniami gładkimi.

Jest to przykład grupy Liego

Wykład XV - 25.06.2015

Orientacja i orientowalność

Orientacja w przestrzeni wektorowej V wymiaru n

- *$B(V)$ - zbiór wszystkich baz $[v_1, \ldots, v_n]$ w V.*
- *dla baz $b_1, b_2 \in B(V)$, $b_1 = [v_1, \ldots, v_n]$, $b_2 = [w_1, \ldots, w_n]$ macierz przejścia $M_{b_1,b_2} = (a_{ij})_{n\times n}$ taka, że $w_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} v_i$.*
  Równoważnie jest to macierz przekształcenia $V \to W$, $v_i \to w_i$ wyrażona w bazie b_i.

  Fakt 0.50. M_{b_1,b_2} jest nieosobliwa.

  relacja $b_1 \sim b_2 \Leftrightarrow \det(M_{b_1,b_2}) > 0$

  Fakt 0.51. Jest to relacja równoważności, ma dokładnie dwie klasy abstrakcji.
  Dowód
  zwrotność - $det(I_{n\times n}) = 1 > 0$
  symetryczność - $M_{b_2,b_1} = M^{-1}_{b_1,b_2}$ $\quad det(M_{b_2,b_1} = \frac{1}{det(M_{b_1,b_2})}$
  przechodniość - $M_{b_1,b_3} = M_{b_1,b_2} \cdot M_{b_2,b_3}$
  $det(M_{b_1,b_3}) = det(M_{b_1,b_2}) \cdot det(M_{b_2,b_3})$
  $b \in B(V)$, $[b]$- klasa abstrakcji
  $b_1, b_2,\ b_1 \not\sim b,\ b_2 \not\sim b \Rightarrow b_1 \sim b_2,\ [b_1] = [b_2]$ ∎

Definicja 67. Orientacja na V nazywamy dowolną spośród powyższych dwóch klas abstrakcji.

Uwaga 0.52.
- Następujące modyfikacje bazy $b = [v_1, \ldots, v_n]$ dają bazy z tej samej klasy abstrakcji
  - parzysta permutacja wektorów bazowych
  - mnożenie wektorów bazy przez dodatnie współczynniki
  - zmiana jednego z wektorów v_k na wektor
    $$v'_k = v_k + \sum_{i\neq k} a_i v_i$$
  - dowolna kombinacja powyższych
  - ciągła deformacja w przestrzeni baz
- Wyprowadzają(zmieniają orientacje)
  - nieparzysta permutacja
  - pomnożenie jednego z wektorów bazy przez ujemny współczynnik
- w $\mathbb{R}^2$ klasy orientacji baz zadane są przez kierunki obrotu(o kąt $< \pi$) prowadzące od pierwszego do drugiego wektora bazowego.

Orientacja na rozmaitościach

- Każda mapa (U, φ) zadaje, dla każdego $p \in U$, orientacje w przestrzeni stycznej T_pM, wyznaczoną przez bazę $[\frac{\partial}{\partial\varphi_1}(p), \ldots, \frac{\partial}{\partial\varphi_n}(p)]$
- Dwie mapy (U, φ), (W, ψ) zadają w powyższy sposób tą samą orientacje w T_pM dla $p \in U \cap W$ dokładnie wtedy, gdy $\left[\frac{\partial(\varphi\psi^{-1})_k}{\partial x_j}\big(\psi(p)\big)\right]$ ma dodatni wyznacznik, bo jest to macierz przejścia.

Definicja 68. (1) Orientacją na rozmaitości M nazywamy wybór atlasu $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_\alpha$ na M, takiego że każde dwie mapy z $\mathcal{A}$ mają dodatni wyznacznik jakobianu odwzorowania przejścia w każdym punkcie.

(2) Rozmaitość jest orientowalna, jeśli posiada taki atlas jak w (1).

(3) Dwa atlasy $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ jak w (1) zadają tą samą orientacje na M jeśli $\forall_{(U,\varphi)\in\mathcal{A}_1} \forall_{(W,\psi)\in\mathcal{A}_2}$ jakobian odwzorowania przejścia $\varphi\psi^{-1}$ ma dodatni wyznacznik w każdym punkcie $p \in U \cap W$.

Uwaga 0.53. Wybór orientacji na M oznacza w szczególności wybór orientacji w każdej przestrzeni stycznej T_pM [w sposób zgodny].
(bez dowodu).
$B(M) = \bigcup_{p\in M} B(T_pM) \subset (TM)^n$ z topologią indukowaną.
$B(M)$ jest przestrzenią reperów bazowych na rozmaitości M.
Dla orientowalnej rozmaitośći, ciągła deformacja w $B(M)$ nie wyprowadza poza orientacje w przestrzeniach T_pM indukowane z orientacji na M.
Jeśli M jest spójna i orientowalna, to można na niej zadać dokładnie dwie orientacje.
[bez dowodu] Rozmaitość M jest nieorientowalna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciągła krzywa $b(t) : t \in [0,1]$ w przestrzeni reperów $B(M)$ taka, że $\exists_{p\in M}\ b(0), b(1) \in T_pM$ oraz $b(1) \not\sim b(0)$.

Przykład 20.

- $\mathbb{R}^n$ jest rozmaitością orientowalną
- S^n jest rozmaitością orientowalną
- produkt zachowuje orientowalność[ćw]
  np. torusy $T^n = S^1 \times \ldots \times S^1$ są orientowalne
- jeśli choć jeden składnik produktu jest nieorientowalny, to produkt także.
-

  Definicja 69. Dyfeomorfizm $f : M \to M$ spójnej, orientowalnej rozmaitości M zachowuje orientacje, gdy zachodzi dowolny spośród poniższych warunków:

  – $dfp :\ T_pM \to T_{f(p)}M$ przenosi bazę z T_pM pochodzącą od tej samej orientacji na M
  – po wyrażeniu f w mapach (U, φ), (W, ψ) z atlasu na M wyznaczającego orientacje, zachodiz

  $$det[D\varphi f\psi^{-1}\big(\psi(p)\big)] > 0$$

  iloraz orientowalnej spójnej rozmaitości M przez nieciągłą grupę dyfeomorfizmów zachowujących orientacje jest rozmaitością orientowalną.
  Jeśli któryś z dyfeomorfizmów zmienia orientacje M to M/G nie jest rozmaitością orientowalną.

  $\mathbb{R}P^n = S^n/_{\mathbb{Z}_2}$ dla n nieparzystych są orientowalne, dla n parzystych są nieorientowalne

  Möbius=$\mathbb{R} \times [0,1]/_{\mathbb{Z}}$ - jest nieorientowalny

Fakt 0.54. Jeśli M, N, P są orientowalne, $P \subset N$ jest podrozmaitością[np. $P = \{x_0\}$] i jeśli $f : M \to N$ jest gładkim odwzorowaniem takim, że P składa się samych wartości regularnych f to wówczas podrozmaitość $f^{-1}(P) \subset M$ jest orientowalna.