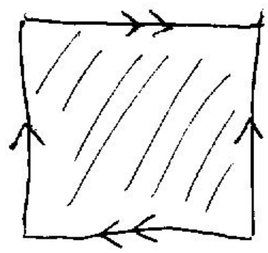
ZADANIA Z TOPOLOGII ALGEBRAICZNEJ 1
LISTA 4. Zastosowania Twierdzenia van Kampena i nie tylko...

1. Niech X będzie spójnym skończonym grafem.
   (a) Uzasadnij, że $\pi_1 X$ jest grupą wolną F_n, dla pewnego n. Wskazówka: rozważ dowolne drzewo maksymalne T w grafie X, oraz przedstawienie X jako sumy T oraz cykli C w X zawierających poszczeglne krawędzie X znajdujące się poza T (a dokładniej małe otwarte otoczenia T oraz cykli C w X); pomocne może być zastosowanie indukcji względem liczby krawędzi poza drzewem maksymalnym.
   (b) Pokaż, że jeśli X jest zawarty w płaszczyźnie, to n jest równe liczbie ograniczonych komponent dopełnienia $R^2 \setminus X$.
   (c) Udowodnij, że w ogólnym przypadku liczba n zależy tylko od charakterystyki Eulera grafu, i znajdź tą zależność.
2. Niech X będzie przestrzenią otrzymaną ze sfery S^2 przez utożsamienie bieguna północnego N z biegunem południowym S. Wyznacz $\pi_1 X$ albo stosując twierdzenie van Kampena, albo przedstawiając X jako 2-wymiarowy kompleks komórkowy, np. kompleks prezentacyjny dla pewnej prezentacji.
3. Niech Y będzie przestrzenią otrzymaną z drogowo spójnej przestrzeni X przez doklejenie n-wymiarowej komórki dla pewnego $n \geq 3$. Uzasadnij, że włożenie $X \to Y$ indukuje izomorfizm grup podstawowych (w szczególności, grupa podstawowa się nie zmienia). Zrób to samo dla operacji doklejenia naraz dowolnej rodziny n-wymiarowych komórek.

Butelka Kleina K to powierzchnia, którą otrzymuje się przez sklejenie boków kwadratu zgodnie z rysunkiem poniżej.



4. Uzasadnij, że grupa podstawowa butelki Kleina ma prezentację $\langle a, b | aba^{-1}b \rangle$.
5. Niech $G = \langle a, b | aba^{-1}b \rangle$ będzie grupą podstawową butelki Kleina.
   (a) Stosując homomorfizm $G \to Z$ wyznaczony przez przyporządkowania $a \to 1$ oraz $b \to 0$ wykaż, że element wyznaczony przez a ma rząd nieskończony w G.
   (b) Wykaż, że podgrupy $\langle a \rangle$ i $\langle b \rangle$ w G generowane przez elementy a i b są obie normalne.
   (c) Sprawdź, że przyporządkowanie elementowi a funkcji rzeczywistej $f(x) = -x$, zaś elementowi b funkcji $g(x) = x + 1$ przedłuża się do homomorfizmu grupy G w grupę bijekcji zbioru liczb rzeczywistych.
   (d) Wykorzystaj homomorfizm z punktu (c) do pokazania, że element b w grupie G ma nieskończony rząd.
   (e) Uzasadnij, że okrąg odpowiadający pętli b w butelce Kleina K nie jest retraktem K. Skorzystaj z zadania 2 oraz poprzednich punktów tego zadania.

(f) Wykaż, że grupa G jest nieeabelowa.

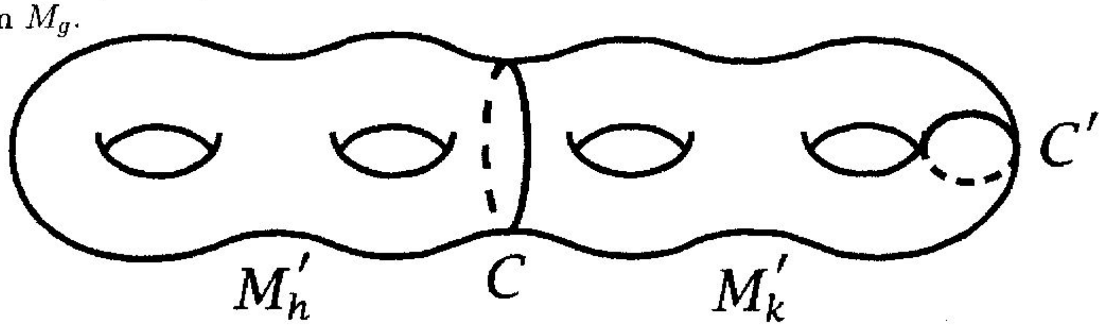
6. Uzasadnij algebraicznie, że grupy zadane prezentacjami $\langle a, b | aba^{-1}b \rangle$ oraz $\langle c, d | c^2 d^2 \rangle$ są izomorficzne. Uzasadnij, że druga z tych grup jest grupą podstawową przestrzeni Y otrzymanej przez sklejenie dwóch wstęg Möbiusa za pomocą homeomorfizmu ich brzegów. Pokaż, że przestrzeń Y jest homeomorficzna z butelką Kleina, i wywnioskuj powyższą izomorficzność grup topologicznie.

7. (a) Niech X będzie przestrzenią otrzymaną z torusa T przez usunięcie wnętrza małego dysku $D \subset T$. Uzasadnij, że nie istnieje retrakcja X na brzegową krzywą zamkniętą $\partial X = \partial D$.

   (b) Zrób to samo dla orientowalnej powierzchni M_g dowolnego genusu $g > 1$.

8. (a) Niech C będzie krzywą zamkniętą rozdzielającą powierzchnię M_g na dwie komponenty homeomorficzne z powierzchniami M_h i M_k z usuniętymi wnętrzami dysków, gdzie $h \geq 1$ i $k \geq 1$ (patrz rysunek poniżej). Uzasadnij, że nie istnieje retrakcja M_g na C.

   (b) Niech C' będzie zamkniętą krzywą nierozspajającą powierzchni M_g obejmującą jedną z rączek tej powierzchni, jak na rysunku poniżej. Pokaż, że C' jest retraktem M_g.



9. Uzasadnij, że z dysku z dwoma dziurami, sklejając ze sobą wszystkie trzy komponenty brzegu przez homeomorfizmy, można otrzymać dwie niehomeomorficzne przestrzenie. Użyj abelianizacji grup podstawowych do rozróżnienia tych przestrzeni.

10. Rozważ łuki α i β w cylindrze $D^2 \times I$, jak na rysunku poniżej. Krzywa γ jest oczywiście ściągalna do punktu w tym cylindrze, ale intuicja podpowiada, że nie jest ściągalna w dopełnieniu sumy łuków $\alpha \cup \beta$. Udowodnij ten fakt.