HOMOLOGIE BUKIETU

Def. <u>Bukiet</u> zbazowanych przestrzeni $\bigvee_\alpha (X_\alpha, x_\alpha)$ to przestrzeń ilorazowa $\bigsqcup_\alpha X_\alpha / \{x_\alpha : \alpha\}$.

FAKT. Dla rodziny zbazowanych przestrzeni (X_α, x_α) t.że

$$(*)\begin{cases} \forall \alpha \ \exists U_\alpha, D_\alpha \subset X_\alpha, \ x_\alpha \in D_\alpha \subset U_\alpha, \ D_\alpha \text{ domknięty w } X_\alpha, \\ U_\alpha \text{ otwarty w } X_\alpha, \ U_\alpha \text{ ściągalny do } x_\alpha \end{cases}$$

zachodzi

$$\widetilde{H}_k \bigvee_\alpha (X_\alpha, x_\alpha) = \bigoplus_\alpha \widetilde{H}_k X_\alpha ,$$

przy czym izomorfizm jest sumą prostą homomorfizmów

$(i_\alpha)_* : \widetilde{H}_k X_\alpha \to \widetilde{H}_k \bigvee_\alpha (X_\alpha, x_\alpha)$

indukowanych przez włożenie $i_\alpha : X_\alpha \to \bigvee_\alpha (X_\alpha, x_\alpha)$.

Dowód: przypomnijmy, że dla rodziny par $\emptyset \neq A_\alpha \subset X_\alpha$

$$(+) \quad H_k\left(\bigsqcup_\alpha X_\alpha, \bigsqcup_\alpha A_\alpha\right) \cong \bigoplus_\alpha H_k(X_\alpha, A_\alpha) .$$

Dla każdego α mamy

ściągalność U_α do X_α ... wycinanie

$$(\#)\quad \tilde{H}_k X_\alpha = H_k(X_\alpha, \{x_0\}) = H_k(X_\alpha, U_\alpha) = H_k(X_\alpha - D_\alpha, U_\alpha - D_\alpha)$$

Zatem

$$\tilde{H}_k \bigvee_\alpha X_\alpha = H_k\left(\bigvee_\alpha X_\alpha, x_0\right) = H_k\left(\bigvee_\alpha X_\alpha, \bigvee_\alpha U_\alpha\right) \overset{\text{wycinanie}}{=\!=}$$

$$= H_k\left(\bigvee_\alpha X_\alpha - \bigvee_\alpha D_\alpha, \bigvee_\alpha U_\alpha - \bigvee_\alpha D_\alpha\right) \overset{(+)}{=\!=}$$

$$= \bigoplus_\alpha \left(H_k\, X_\alpha - D_\alpha, U_\alpha - D_\alpha\right) \overset{(\#)}{=} \bigoplus_\alpha \tilde{H}_k X_\alpha$$

Można też prześledzić, że izomorfizm

$$\bigoplus_\alpha \tilde{H}_k X_\alpha \longrightarrow \tilde{H}_k \bigvee_\alpha X_\alpha$$

jest zadany przez sumę prostą (rozłączną) włożeń. $\square$

HOMOLOGIE KOMÓRKOWE – POSTAĆ „SZKIELETOWA"

X CW-kompleks, X^n n-szkielet

LEMAT. (1) $H_k(X^n, X^{n-1}) = 0$ dla $k \neq n$, oraz jest wolną grupą abelową o bazie 1-1 z n-komórkami X dla $k = n$.

(2) $H_k X^n = 0$ dla $k > n$. W szczególności, jeśli $\dim X < \infty$ to $H_k X = 0$ dla $k > \dim X$.

(3) Włożenie $i : X^n \to X$ indukuje izomorfizm $i_* : H_k X^n \to H_k X$ dla $k < n$.

d-d. (1) wynika z izomorfizmów

$$H_k(X^n, X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k(X^n/X^{n-1}) \cong \tilde{H}_k \bigvee_\alpha S^n_\alpha \cong \bigoplus_\alpha H_k S^n_\alpha$$

(2) Z ciągu dokładnego pary

$$H_{k+1}(X^n, X^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_k X^{n-1} \xrightarrow{i_*} H_k X^n \xrightarrow{j_*} H_k(X^n, X^{n-1})$$

oraz z (1) wynika, że

dla $n \neq k, k+1$ $\quad H_k X^n \cong H_k X^{n-1}$. $\quad (*)$

Gdy $n < k$, to

$$H_k X^n \cong H_k X^{n-1} \cong H_k X^{n-2} \cong \dots \cong H_k X^0 = 0$$

(3) Pokażemy to tylko dla X skończenie wymiarowych.

Z relacji $(*)$, gdy $n > k$ mamy

$$H_k X^n \cong H_k X^{n+1} \cong \dots \cong H_k X^{\dim X} = H_k X. \quad \square$$

„SZKIELETOWA" POSTAĆ KOMÓRKOWEGO KOMPLEKSU ŁAŃCUCHOWEGO C_*^{CW}

- $C_n^{SK} X := H_n(X^n, X^{n-1})$
- Operatory brzegowania $d_n : C_n^{SK} X \to C_{n-1}^{SK} X$ określamy jako złożenie.

$$\begin{tikzcd} & H_{n-1} X^{n-1} \arrow[dr, "j_{n-1}"] & \\ H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[ur, "\partial"] \arrow[rr, "d_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \end{tikzcd}$$

gdzie ∂ jest z ciągu pary (X^n, X^{n-1}) zaś j z ciągu pary (X^{n-1}, X^{n-2}).

- Zachodzi $d_{n+1} d_n = 0$ bo w diagramie

$$\begin{tikzcd}
 & & & H_{n-1}X^{n-1} \arrow[dr, "j_{n-1}"] & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "\partial_{n+1}"'] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[ur, "\partial_n"] \arrow[rr, "d_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & H_n X^n \arrow[ur, "j_n"] & & &
\end{tikzcd}$$

złożenie $\partial_n j_n = 0$ z dokładności ciągu pary (X^n, X^{n-1}).

- Homologie kompleksu $(C_*^{SK}X, d_*)$ oznaczmy $H_*^{SK}X$

TWIERDZENIE. $H_*^{SK}X \cong H_* X$.

d-d:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0\ [= H_{n-1}X^{n-2}] \arrow[dr] & & \\
 & & & H_{n-1}X^{n-1} \arrow[dr, "j_{n-1}"] & \\
H_{n+1}(X^{n+1}, X^n) \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr, "\partial_{n+1}"'] & & H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[ur, "\partial_n"] \arrow[rr, "d_n"] & & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \\
 & H_n X^n \arrow[ur, "j_n"] \arrow[dr, "i_n"'] & & & \\
0\ [= H_n X^{n-1}] \arrow[ur] & & H_n X^{n+1}\ [= H_n X] \arrow[dr] & & \\
 & & & 0\ [= H_n(X^{n+1}, X^n)] &
\end{tikzcd}$$

- Z dokładności ciągu zawierającego ∂_{n+1} oraz i_n mamy

$$H_n X = H_n X^{n+1} \cong H_n X^n / \operatorname{Im} \partial_{n+1}$$

- Z dokładności ciągu z j_n i ∂_n, j_n jest injekcją, więc

  * $\operatorname{Im} \partial_{n+1} \cong \operatorname{Im}(j_n \partial_{n+1}) = \operatorname{Im} d_{n+1}$
  * $H_n X^n \cong \operatorname{Im} j_n = \operatorname{Ker} \partial_n$

czyli $H_n X \cong \ker \partial_n / \operatorname{Im} d_{n+1}$

- Z dokładności ciągu zawierającego j_{n-1}, j_{n-1} jest injekcją, więc

$$\ker \partial_n = \operatorname{Ker}(j_{n-1} \partial_n) = \ker d_n$$

czyli $H_n X \cong \ker d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} = H_n^{SK} X$. $\square$

REINTERPRETACJA KOMPLEKSU ŁAŃCUCHOWEGO $C^{SK}_* X$

Dla CW-kompleksu X

niech $\mathcal{X}_n = \{\alpha : e_\alpha$ jest n-komórką w $X\}$

[$\forall \alpha \in \mathcal{X}$ $\varphi_\alpha : \partial D^n_\alpha \to X^{n-1}$, odwzorowanie charakterystyczne,

$\Phi_\alpha : D^n_\alpha \to X^n$ – naturalne rozszerzenie φ_α,

$e_\alpha = \Phi_\alpha(\mathrm{int}\, D^n_\alpha)$]

Wówczas

$$C^{SK}_n X = H_n(X^n, X^{n-1}) \cong H_n(X^n / X^{n-1}) \cong \bigoplus_\alpha H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) =$$

$$\cong \bigoplus_\alpha \mathbb{Z} e_\alpha$$

[gdzie e_α jest utożsamiony z generatorem w grupie $H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha) \cong \mathbb{Z}$ odpowiadającym wybranej orientacji komórki e_α]

Oznaczmy przez $d_{\alpha,\beta}$ takie liczby całkowite, że

$$d_n(e_\alpha) = \sum_{\beta \in \mathcal{X}_{n-1}} d_{\alpha\beta} \cdot e_\beta .$$

Przypomnijmy też, że dla $\alpha \in \mathcal{X}_n$, $\beta \in \mathcal{X}_{n-1}$ mamy <u>współczynnik incydencji</u> $i_{\alpha,\beta}$ określony jako stopień $\deg(j_\beta \varphi_\alpha)$ odwzorowania zorientowanych $(n-1)$-sfer:

$$\begin{array}{ccccc} \partial D^n_\alpha & \xrightarrow{\varphi_\alpha} & X^{n-1} & \xrightarrow{j_\beta} & X^{n-1} / X^{n-1} \setminus \mathrm{int}\, D^{n-1}_\beta \\ \wr\!\shortparallel & & & & \wr\!\shortparallel \\ S^{n-1} & & & & S^{n-1}_\beta \end{array}$$

LEMAT. $\forall \alpha \in \mathcal{X}_n$ $\forall \beta \in \mathcal{X}_{n-1}$ $d_{\alpha\beta} = i_{\alpha,\beta}$.

W konsekwencji, kompleks łańcuchowy $C^{SK}_* X$ utożsamia się z $C^{CW}_* X$, zaś homologie $H^{SK}_* X$ z homologiami $H^{CW}_* X$.

Dowód LEMATU

Oznaczenie:

- $[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)$ – generator odpowiadający wybranej orientacji
- $[\partial D^n_\alpha] \in \tilde{H}_{n-1}(\partial D^n_\alpha)$ – generator odpowiadający orientacji indukowanej
- $e_\alpha = (\Phi_\alpha)_*([D^n_\alpha]) \in H_n(X^n, X^{n-1})$

Rozważmy komutujący diagram:

generator odpo. wybranej orientacji

$$\begin{tikzcd}
 & {[\partial D^n_\alpha]} & {[S^{n-1}_\beta]} \\
{[D^n_\alpha] \in H_n(D^n_\alpha, \partial D^n_\alpha)} \arrow[ur, "\partial"] \arrow[r, "\partial", "\cong"'] \arrow[d, "(\Phi_\alpha)_*"'] \arrow[dr, phantom, "\boxed{\text{naturalność ciągów dokł. pary}}"] & \tilde{H}_{n-1}\partial D^n_\alpha \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \arrow[r, "(j_\beta\varphi_\alpha)_*"] \arrow[d, "(\varphi_\alpha)_*"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-1}\setminus \mathrm{int}\, D^{n-1}_\beta) \arrow[u, phantom, sloped, "\in"] \\
e_\alpha \in H_n(X^n, X^{n-1}) \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[dr, "d_n"'] & \tilde{H}_{n-1}X^{n-1} \arrow[r, "q_*"] \arrow[d, "j_{n-1}"] \arrow[ur, bend right, "j_\beta"] & \tilde{H}_{n-1}(X^{n-1}/X^{n-2}) \arrow[u, "(q_\beta)_*"'] \\
\boxed{\text{def. } d_n} & H_{n-1}(X^{n-1}, X^{n-2}) \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

izomorfizm dla dobrej pary

[pochodzący od utożsamiania $\tilde{H}_n(X^{n-1}/X^{n-2})$ z $H_n(X^{n-1}/X^{n-2}, X^{n-2}/X^{n-2})$]

- $d_n(e_\alpha) = \qquad j_{n-1}\partial_n(e_\alpha) = j_{n-1}\partial_n(\Phi_\alpha)_*([D^n_\alpha]) =$

$$= j_{n-1}(\varphi_\alpha)_*\partial([D^n_\alpha]) = j_{n-1}(\varphi_\alpha)_*([\partial D^n_\alpha])$$

- $(q_\beta)_* r\, d_n(e_\alpha) = (q_\beta)_* r\left(\sum_{\bar\beta\subset X_{n-1}} d_{\alpha\bar\beta}\, e_{\bar\beta}\right) = d_{\alpha\beta}\cdot[S^{n-1}_\beta]$

- ZATEM $\qquad d_{\alpha\beta}\cdot[S^{n-1}_\beta] =$

$$= (q_\beta)_* r\, j_{n-1}(\varphi_\alpha)_*([\partial D^n_\alpha]) = (j_\beta\varphi_\alpha)_*([\partial D^n_\alpha]) =$$

$$= i_{\alpha\beta}\cdot[S^{n-1}_\beta]$$

- A więc $d_{\alpha,\beta} = i_{\alpha\beta}$. $\square$