ARYTMETYKA 2019, Lista nr 4

1.Rozwiązać $221x - 4352y = 1$ przy pomocy rozwinięcia w ułamek łańcuchowy. Następnie podać wszystkie rozwiązania (x, y) tego równania spełniające $70000 \leq x \leq 80000$.

2. Rozwiń $\sqrt{28}$ w ułamek łańcuchowy i następnie podaj najmniejsze dodatnie rozwiązanie równania $x^2 - 28y^2 = 1$.

3. Rozwiń odpowiednie pierwiastki w ułamki łańcuchowe i następnie podaj najmniejsze dodatnie rozwiązania równań $x^2 - 56y^2 = 1$, $x^2 - 57y^2 = 1$, $x^2 - 58y^2 = 1$. Które z nich będą miały rozwiązania jeśli z prawej strony będzie -1 zamiast 1.

4. Przybliżyć $\sqrt{43}$ z dokładnością do 10^{-6}.

5. Niech $\alpha = \sqrt{3}, \beta = \frac{-48-\sqrt{3}}{-39}, \gamma = \frac{43+\sqrt{3}}{78}$. Które z par wspomnianych liczb są równoważne? Przypomnijmy, że z definicji liczby x, y są równoważne jeśli istnieją a, b, c, d całkowite spełniające $ad - bc = 1$ oraz $x = \frac{ay+b}{cy+d}$.
Uwaga. Można to robić używając tw. Serreta, ale można też szukać odpowiednich a, b, c, d bezpośrednio.

6. Stosując jednoznaczność rozkładu w $Z[\sqrt{-2}]$ rozwiązać w liczbach całkowitych równanie $x^3 = y^2 + 2$.

7. Niech x_n będzie ciągiem zdefiniowanym rekurencyjnie przez $x_0 = 1, x_1 = 2, x_2 = -1$, oraz $x_{n+3} = -3x_{n+2} - x_{n+1} - 3x_n$. Wyprowadzić wzór na wyraz ogólny ciągu x_n.
Zrobić to na dwa sposoby, jeden z wykładu a drugi powinien naśladować (to dla tych co pamiętają) diagonalizacje macierzy.

8. Podaj dwa rozwinęcia liczby $\frac{5654}{234}$ w ułamek łańcuchowy.

9. Znajdź najlepsze przybliżenie liczby $\frac{69}{25}$ przez ułamki o mianownikach
a) ≤ 21,
b) ≤ 4,
c) ≤ 10.

10. Bez rozkładania 51 na iloczyn liczb pierwszych znajdź resztę z dzielenia 2^{50} przez 51. Co z tego wynika?

11. Rozwiązać $x^3 = y^2 + 16$ korzystając z własności pierścienia Gaussa $Z[i]$.

12. Znaleźć wszystkie pierwiastki pierwotne $\pmod{37}$. Następnie rozwiązać równania:

$x^6 \equiv 27 \pmod{37}$, $5^{x^4} \equiv -3 \pmod{37}, 4x^3 \equiv 34 \pmod{37}$.

13. Pokazać, że $x^6 \equiv a \pmod{101}$ ma rozwiązanie wtedy i tylko wtedy gdy $x^2 \equiv a \pmod{101}$ ma rozwiązanie.

14. Ile wynosi$[3; 5, \overline{3, 5}]$?

20 maja 2019

T.Pezda