Arytmetyka 2020, lista nr 2

1. Rozwiązać układ kongruencji:
$x \equiv 13 \pmod{45}$, $x \equiv 234 \mod 14$, $x \equiv 3 \pmod{11}$.

2. Oblicz $\phi(988)$.

3. Niech a,b,c będą całkowite, zaś n liczba naturalna. Pokazać, że jeśli n dzieli $a+b^3, b+c^4, c+a^5$ to n dzieli $a^{119}-a$.

4. Ile rozwiązań ma kongruencja $X^4 - X^3 + 2X \pmod{840}$?

5. Dla jakich n liczba $1! + 2! + ... + n!$ jest kwadratem? (Wsk. Rozpatrzyć reszty modulo pewna bardzo mała liczba).

6. Pokazać, że liczba $1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n$ nie jest naturalna dla $n > 1$. (Wsk. Rozpatrzyć potęgę 2 w mianowniku powstałej liczby wymiernej).

7. Rozwiązać w liczbach całkowitych $x^2 - y^2 = 231$.

8. Ile wynosi suma dzielników liczby 58892?

9. Czy istnieją naturalne liczby x, y takie, że $x^2 + 3y^2 + 1$
a) dzieli się przez 3; b) przez 5; c) przez $250 \cdot 17^2 \cdot 13$;
d) wynosi 80006437862784628003?

10. Czy suma 2019 kolejnych liczb naturalnych dzieli się przez
a)2017; b)2018; c) 2019; d)2016?

11. Czy liczba 30! jest podzielna przez 7^5, 2^{27}?

12.Pokazać, że dla $n > 1$ liczba $1+1/3+1/5+...+1/(2n-1)$ nie jest całkowita. Wsk. Rozpatrzyć potęgi 3.

13. Pokazać, że $(n!)^{n+1} \mid (n^2)!$.

14. Oblicz nwd liczb 3564273563275628 oraz 214682164821 metodą będącą wariantem użycia rozwinięcia dwójkowego.

15. Ile spośród symboli Newtona $C_6^{101}, C_6^{102}, ...C_6^{200}$ jest podzielnych przez $2, 3, 6$?

16. Znaleźć resztę z dzielenia $(12371^{56} + 34)^{28}$ przez 111.

17. Rozwiązać układ kongruencji $x + 4y \equiv 29 \pmod{143}$, $2x - 9y + 84 \equiv 0 \pmod{143}$.

18. Niech $a_1, ..., a_r$ będą naturalne, zaś $n = a_1 + ... + a_r$. Pokazać, że $a_1!a_2!...a_r! \mid n!$. Czy iloraz ma interpretację?

19. Pokazać, że dla dowolnego całkowitego n liczba $(n^3 - 1)n^3(n^3 + 1)$ dzieli się przez 504.

20. Pokazać, że pierwiastek kwadratowy z liczby naturalnej jest całkowty lub niewymierny. Podobnie, ale dla pierwiastków dowolnego stopnia oraz dla logarytmów o podstawie 2.

21. Znaleźć wszystkie liczby z przedziału $[1234, 1601]$ które mają nieparzyst,ą ilość dzielników.

22. Liczbę n nazywamy doskonałą, gdy suma jej dodatnich dzielniów wynosi $2n$. Pokazać, że jeśli liczba $2^p - 1$ jest pierwsza to $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ jest doskonała.

23. Pokazać, że liczba nieparzysta doskonała ma przynajmniej trzy dzielniki pierwsze (nie wiadomo, czy istnieje jakakolwiek liczba nieparzysta doskonała).

24. Oblicz dwoma metodami z wykładu $nwd(4543181168, 2708429216)$.

25. (zad. z II etapu OM) Pokazać, że dla dowolnej liczby pierwszej $p > 2$ istnieje dokładnie jedna liczba naturalna n taka, że $n(n + p)$ jest kwadratem.

26. Znaleźć wszystkie n dla których iloczyn wszystkich dzielników wynosi n^2, n^3?

27. Czy kwadrat liczby naturalnej może kończyć się na 29 i zaczynać od 786876896897? Czy problem może stanowić początek, czy też koniec?

28.Wzorując sie na dowodzie Euklidesa pokazać, że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych postaci $6k-1$.

29. Pokazać, że jeśli $p, 8p^2+1$ są pierwsze to $8p^2+2p+1$ też.

30. Pokazać, że dla wszystkich n zachodzi $7 \mid 2^{n+2}+3^{2n+1}$.

31. Rozwiązać układy kongruencji

a) $a \equiv 3 \pmod 8, a \equiv 11 \pmod{20}, a \equiv 1 \pmod{15}$;

b) $3a \equiv 3 \pmod 8, -9a \equiv 11 \pmod{20}, a \equiv 1 \pmod{15}$.

32. Dla jakich a układ

$3x \equiv a \pmod{35}, 6x \equiv 3 \pmod{21}, x \equiv 4 \pmod{15}$

ma rozwiązanie?

33. Znaleźć wszystkie pierwiastki pierwotne modulo $11, 13, 17$.

34. Niech g będzie pierwiastkie pierwotnym modulo p. Pokazać, że g^k jest pierwiastkiem pierwotnym modulo p wtedy i tylko wtedy gdy $(k, p-1) = 1$.

35. Pokazać, że równanie $x^3+2y^3+4z^3 = 0$ nie ma niezerowego rozwiązania w liczbach wymiernych.

Wsk. Pokazać, że niezerowe rozwiązanie wymierne generuje niezerowe całkowite rozwiązanie. Dla całkowitego rozwiązania (x, y, z) pokazać, że dokładnie jeden z wyrazów $x^3, 2y^3, 4z^3$ dzieli się przez pewną potęgę 2, a pozostałe dwa przez większą, a więc ich suma nie może być równa 0.

36. Pokazać, że $a^3+2b^3+4c^3-6abc = 0$ nie ma niezerowego wymiernego rozwiązania.