

Arytmetyka 2020, lista nr 7

1. Używając wyłącznie symbol Legendre'a obliczyć $\left(\frac{123450}{50333}\right)$.
2. Czy kongruencja $x^2 \equiv 74101 \pmod{102653}$ ma rozwiązanie? Uwaga: 102653 jest liczbą pierwszą.
3. Stosując prawo wzajemności reszt kwadratowych znaleźć postać p , że $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$.
4. Dla jakich liczb pierwszych p kongruencja $2x^2 - 3x + 4 \equiv 0 \pmod{p}$ ma rozwiązanie? Odpowiedź ma zawierać łatwy do sprawdzenia warunek dla dowolnej liczby pierwszej p .
5. Czy kongruencja $x^2 \equiv 204 \pmod{221}$ ma rozwiązanie?
6. Niech liczba nieparzysta $D > 1$ nie będzie kwadratem. Pokazać, że istnieje b , że $\left(\frac{b}{D}\right) = -1$.
7. Niech dla liczby pierwszej $p > 2$ reszty $r_1, \dots, r_{\frac{p-1}{2}}$ będą resztami kwadratowymi \pmod{p} . Do czego \pmod{p} przystaje iloczyn tych reszt?
8. Niech $p > 3$ przystaje do 3 $\pmod{4}$. Załóżmy, że $q = 2p + 1$ jest pierwsza. Pokazać, że $q \mid 2^p - 1$, i wywnioskować stąd, że $2^p - 1$ nie jest pierwsza.