Lista zadań nr 7 dla ch. med.

1. Z prostokątnej kartki papieru o wymiarach $a \times 2a$, w czterech rogach wycięto kwadraty $x \times x$. Następnie dokonano czterech zgięć, i otrzymano w ten sposób prostopadłościenne pudełko bez góry. Dla jakiego x otrzymane pudełko będzie miało największą objętość.

2. (było napomknięte na wykładzie) Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$. Nie można jednak tego traktować jako w pełni niezależnego dowodu odpowiedniej granicy, gdyż w dowodzie $\sin'(x) = \cos x$ wykorzystuje się tą granicę.

3. Korzystając z reguły de L'Hospitala oblicz granice:
   a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}}{e^x}$, b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(2x)}$, c) $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x^{0,00001}}$, d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-e^{x^2}}{\tan(2x^2)}$, , e) $\lim_{x\to\infty} x(e^{1/x} - 1)$, f) $\lim_{x\to 0} x \ln x$.

4. Znajdź przedziały monotoniczności oraz ekstrema lokalne (jeśli się da to dwoma sposobami-jeden to analiza przedziałów monotoniczności, drugi to obliczenie drugiej pochodnej w odpowiednim punkcie) dla funkcji:
   a) $x^3 - 6x^2 + x$, b) $(x^2 + 1)e^{-x}$, c) $\frac{x^2+1}{x-1}$.

5. Oblicz pochodną funkcji $(\ln x)^x$.

6. Drut o długości 1 m podzielono na dwie części; z jednej zbudowano kwadratową ramkę, a z drugiej okrąg. Jaka powinna być długość każdej części, aby suma pól figur ograniczonych drutem była najmniejsza, największa?

7. Stosując wzór Taylora dla $n = 1, 2, 3$ przybliżyć $\sqrt{4.07}$. Porównać otrzymane wyniki z wynikiem z kalkulatora.

8. Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt{4.02}\sqrt[3]{1.04}$ przy pomocy pochodnych cząstkowych rzędu pierwszego.

9. Znajdź ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych $x^3 + 3xy^2 - 3y$.

10. Oblicz a) $\int_1^3 (\frac{1}{x} - 3x^2)dx$, b) $\int_2^3 (2x+1)^4 dx$.

11. Oblicz
$$\int_3^5 \frac{dx}{x^4 - 4x^2}.$$

12. Oblicz pole obszaru ograniczonego przez krzywe $y = x^2$ oraz $y = 2 - 2x^2 + x$.

13. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe rzędu 2 dla funkcji $e^{x^2 y} y - \cos(xy)$.

14. Przy pomocy wyznaczników rozwiązać poniższe układy równań:

    a) $2x - y = 3, 4x + y = 3$,

    b) $3x + y + 2z = 8, 2x + y + z = 5, 2y + z = 4$,

    c) $ax + y = 4, x + ay = 3$, tutaj odpowiedź zależy od parametru a.

15. Podstawa i wieko walca wykonane są z materiału o cenie 100 zł za metr kwadratowy, zaś powierzchnia boczna z materiału o cenie 200 zł za metr kwadratowy. Jakie powinny być parametry walca o objętości metra sześciennego aby koszt jego wykonania był najmniejszy?