

Lista zadań nr 1 dla ch. med. 2020

1. Uprościć wyrażenia:

$$a) \left(\frac{(64^3 : 32^5)^{1/2} \cdot 32^3}{0.625^3} \right)^{0.2}, \quad b) \frac{((x^{-5}y^{-1})^{-5} : ((x^2y^{-1})^{-3})^2) : \frac{x}{y/x}}{\frac{y^3}{x^2/y} : \frac{x^5}{y^3}}.$$

2*(robić gdy wszystkie inne zrobione). Dla nieparzystych n wyprowadzić wzór $a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \dots - ab^{n-2} + b^{n-1})$.

Zrobić to dwoma sposobami; przez indukcję oraz wykorzystując wzór na $a^n - b^n$.

3*. Udowodnić, że suma dwóch funkcji rosnących jest rosnąca.

4. Jeśli jeden bok prostokąta zwiększymy o 20% a drugi zmniejszymy o 20% to o ile się zmieni pole prostokąta? O ile (w procentach) może się zmienić obwód? Zrobić podobne zadanie dla prostopadłościanu.

5. Znaleźć wymierne pierwiastki wielomianu $6X^3 + X^2 - 4X + 1$.

6. Znaleźć dziedziny funkcji

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 4} + 2^{\frac{x}{x-1}}, \quad \frac{2^{\frac{x}{x-1}}}{2^{\frac{x}{x+1}} - 1}, \quad \sin(\sin(\sin \frac{x}{x+1})).$$

7. Rozwiązać nierówności z wartością bezwzględną:

$$a) \left| \frac{x-1}{x-2} \right| > 2, \quad b) |x-1| + |x-2| - 2x \geq -3,$$

$$c) |2x-1| + |x+1| > 4x.$$

Rozwiązać także metodą graficzną punkty b,c.

8. Znaleźć wielomian $f(X)$ stopnia drugiego, który spełnia

$$f(-1) = 14, f(2) = 11, f(3) = 22.$$

9. Niech $f(X) = 4X^2 - 5X + 1$. Rozwiązać równanie $f(112a - 1) = 0$.

10. Udowodnić przez indukcję wzór $s(n) = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

11. Znaleźć funkcje odwrotne do $f(x) = 2x - 1, x^3 + 1, (x^5 - 1)^3 - 1$.

12.a) Przedstawić w radianach kąty 45, 120, 420, -3720 stopni.

b) Przedstawić w stopniach poniższe kąty wyrażone w radianach:

$$2.2\pi, \frac{1}{3}\pi, \frac{1}{12}\pi.$$

13. Przy pomocy rysunku znaleźć wartość \sin dla 150, 240 stopni.

14. Obliczyć: $a) (3-i)(4+i)^2, \frac{(3-i)^2(4+i)-(3+i)(2-i)}{1-i}, (2i)^{18}$.

15. Czy są tautologiami $(\alpha \vee \beta) \Rightarrow (\alpha \wedge \beta), (\alpha \Rightarrow \beta) \Leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$?

16. Czy są prawdziwe zdania:

$$a) \forall x \in \mathbb{N} (x^2 = 6 \Rightarrow x = 6);$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R} (x^2 = 6 \Rightarrow x = 6),$$

$$c) \forall x \in \mathbb{N} (x \geq 3 \vee x^2 - 3x + 2 = 0)?$$

17. Znaleźć dziedziny funkcji $\frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \log_{x-1}(3-x); \log_{\frac{1}{2}} \log_3 \log_{\frac{1}{4}} x$.

18. Uprościć $\log_{\sqrt{3}} 125 \cdot \log_5 16 \cdot \log_{\sqrt{2}} 49 \cdot \log_7 81$.

19. Rozwiązać nierówność $\log_3(x^2 + 2) + (x^2 + 2)^2 > \log_3(3x) + (3x)^2$.

Wsk. Zauważyć, że $\log_3 x + x^2$ jest rosnąca na $(0, \infty)$.

20. Uprościć wyrażenia

$\cos(270^\circ + \alpha), \sin(180^\circ - \beta), \tan(90^\circ + \gamma)$. Można posłużyć się rysunkiem.