Lista zadań nr 3 dla ch. med. 2020

1. Podać ogólny (i w miarę nieskomplikowany) wzór na ciągi a) 3,7,11,15,... b) 0,1,5,23,119,... c) 1,-3,9,-27,... .

2. Zbadać monotoniczność ciągów

   a) $\frac{n^3}{n^3+2}$, b) $\frac{12^n}{n!}$, c) $\frac{n}{2^n}$, $d)\frac{n+2}{2n-3}$, e) $\frac{n^4+2}{2n^4-3}$.

   Uwaga. W a) można zbadać ciąg $\frac{n}{n+2}$, podobnie z d) można uzyskać e).

3. Zbadać ograniczoność (z góry i z dołu) ciągów:

   a)$\log_{1/2}\log_2 n$, b) $\sin n+1/n$, c) $\cos(n!+\log_2 n)$, d) $2\log_3\log_3 n$.

4. Obliczyć granice (przy $n\to\infty$) poniższych ciągów:

   a) $\frac{n^3-n+1}{n-n^3}$, b) $\frac{n^3-n+2}{(n^2-n)^2-(n^2+n)^2}$, c) $\frac{2n^4-n+2}{3n^3-2n^2}$, d) $\frac{\sqrt[3]{n^6-2n^2+1}}{2n^2-n+1}$,
   e) $\sqrt{n+4}-\sqrt{n-1}$, f) $\sqrt[n]{3n^3-2n^2+1}$, g)$\frac{n^2+\sin n!}{2n^2-1}$, h) $\frac{(\sqrt{n}+2)\cos n}{n}$,
   i) $\frac{(\log_8 n)^2}{\log_2 n}$, j) $\sqrt[n]{3^n-2^{n+1}}$, k) $\frac{3^n-3\cdot 4^n}{2^{2n}-2^n}$, l) $(1+\frac{1}{n})^{\frac{2n+1}{3n-1}}$.

5. Wybierając odpowiednie podciągi pokazać, że poniższe ciągi są rozbieżne

   a) $2^n+(-2)^n$, b) $n^{(-1)^n}$, c) $\sin(\frac{1}{3}\pi n)n$.

6. Obliczyć granice związane z liczbą e

   a)$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{2n})^{3n-11}$, b) $\lim_{n\to\infty}(\frac{2n-3}{2n-14})^{4n-2}$,
   c) $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{3}{n^2+1})^{2n^2-2}$.

7. Jaki będzie współczynnik przy $a^{20}b^{39}$ w $(a^2+b^3)^{23}$?

8. Niech $a_n=10^n$ dla $n\le 100^{100^{100}}$, oraz $a_n=1/n$ dla pozostałych n. Ile wynosi granica $\lim_{n\to\infty}a_n$?

9. Pokazać, że poniższe szeregi nie są zbieżne, gdyż nie spełniają warunku koniecznego na zbieżność szeregu:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-5}{(n-1)^3-(n+4)^3}$, , b) $\sum_{n=1}^{\infty}\cos(\pi n)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n}{2}$, d) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{3n^2}}$.

10. Stosując kryterium porównawcze zbadać zbieżność szeregów:

    a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5-3\sin n}{\sqrt{n}}$, b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n^2)}{n\sqrt{n}}$, c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n^2+n+1}{n^4}$.

11. Stosując kryteria d' Alamberta lub Cauchy'ego zbadać zbieżność szeregów o wyrazie ogólnym:

    a) $\frac{(3n)!}{1000^n}$, b) $\frac{6n^2}{1{,}000000011^n}$, c) $\frac{3^n+2^n}{4^n-12\cdot 3^n}$, d) $\frac{4^n+3^n}{3^n n-1}$.