KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS

Lista zadań nr 4.

1. Niech kąt α spełnia $\cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$. Czy α można cyrklem i linijką podzielić na trzy równe części?

2. Podobnie jak w zad. 1, ale dla $\frac{1}{3}, \frac{2}{5}$.

3. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Napisać formułę na $\cos(p\beta)$ w terminach $\cos\beta$. Wskazać taką liczbę $\cos\beta$, że kąt β nie można cyrklem i linijką podzielić na p równych części. Jeśli nie da rady zrobić ogólnie to można dla $p = 7, 11$.

   Wsk. Wykorzystać fakt, że symbol Newtona p po k jest podzielny przez p dla $k = 1, 2, ..., p-1$ dla liczby pierwszej p.

4. Wywnioskować z zad. poprzedniego, że jeśli liczba naturalna n ma tą własność, że dowolny kąt można cyrklem i linijką podzielić na n równych części to n jest potęgą dwójki.

5. Niech $x^2+y^2 = 1$ będzie równaniem okręgu w C^2. Niech $P = (r, 0)$, przy czym $0 < r < 1$. Znajdź punkty styczności z ww. okręgiem prostych przechodzących przez P. Poprowadzić (zespoloną) prostą przechodzącą przez otrzymane dwa punkty styczności. Przeanalizować rzeczywistą część tej prostej. Pokazać, że ta rzeczywista część składa się z takich punktów, że prosta przechodząca przez dwa punkty styczności przechodzi przez P.

6. W zależności od parametru k znaleźć punkty wspólne krzywych $x^2+y^2-1 = 0$ oraz $x^2 - kxy + y^2 - 1 = 0$. Obliczyć krotności przekroju w tych punktach.

   Wsk. Można użyć rozwinięcia w szereg Taylora.

7. Znaleźć krotność przekroju w $(1, 0)$ krzywej Fermata $x^n + y^n = 1$ z prostą $x = 1$.

8. Znaleźć wszystkie wspólne punkty (w C^2 i na płaszczyźnie rzutowej) krzywych $x^2 + 2y^2 = 1$ oraz $y = kx^2 - 4$.

9. Na płaszczyźnie rzutowej znaleźć punkty wspólne

   a) prostych $2x - y + 3z = 0$ oraz $2x - 4y + 5z = 0$;

   b) prostej $x = 2$ z parabolą $y = x^2$.

10. Pokazać wariant tw.Pappusa:

    Niech dane beda równoległe i różne proste l_1 i l_2 oraz parami różne punkty

    A_1, A_2, A_3 z l_1 oraz B_1, B_2, B_3 z l_2. Niech C_1 to punkt przecięcia prostych A_2B_3 oraz A_3B_2. Analogicznie C_2 to punkt przecięcia prostych A_1B_3 oraz A_3B_1 oraz C_3 to punkt przecięcia prostych A_1B_2 oraz A_2B_1. Pokazać, że C_1, C_2, C_3 leżą na jednej prostej.

11. Napisać warianty tw. Pascala gdy:

    a) $A_1 = A_2, A_3 = A_4, A_5 = A_6$ i nie ma innych równości;

    b) $A_1 = A_2, A_3 = A_4$ i nie ma innych równości.

12. Wydrukować dostatecznie dokładny wykres paraboli $y = x^2$ a następnie doświadczalnie potwierdzić, że konstrukcja z wykładu) prowadzi do znajdywania punktów z paraboli. Jeśli są kłopoty z wydrukowaniem paraboli to zrobić to dla okręgu.

13. Znaleźć wszystkie punkty wspólne (w C^2, i na płaszczyźnie rzutowej) $x^2+y^2-z^2 = 0$(okrąg jednostkowy) i $x = 2z$(prosta $x = 2$).

14. Znaleźć punkty nieosobliwe krzywej $y = x^3$, zarówno na płaszczyźnie C^2 jak i na płaszczyźnie rzutowej $P^2(C)$. W punktach nieosobliwych znaleźć styczne.

15. Napisać równanie krzywej stopnia drugiego przechodzącą przez

    $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,2)$.

16. Napisać formułę na $\cos(5\alpha)$. Wzór to wielomian $P(\cos\alpha)$ dla pewnego wielomianu $P(X)$ o wyrazach całkowitych (stopnia 5). Pokazać, że $P(X) - \cos\alpha$ jest rozkładalny nad $Q(\cos\alpha)$ wtedy i tylko wtedy gdy 5-sekcja kąta jest wykonalna przy pomocy cyrkla i linijki.

    Wsk. Pokazać, że $P(X) - \cos\alpha = 16(X - \cos(\frac{\alpha}{5}))(X - \cos(\frac{\alpha}{5} + 72°))(X - \cos(\frac{\alpha}{5} + 144°))(X - \cos(\frac{\alpha}{5} + 216°))(X - \cos(\frac{\alpha}{5} + 288°))$, oraz wykorzystać konstruowalność kąta 72° na pustej kartce.

8 kwietnia 2018 Tadeusz Pezda