KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS 2019
Lista zadań nr 2.

1. Przypomnieć kryteria i ich dowody kiedy czworokąt można wpisać czy opisać na okręgu.

2. Podać wyprowadzenie wzoru Herona na pole trójkąta (używa tylko długości boków).

3. Podać wzór Herona na pole czworokąta wpisanego w okrąg. Z tego wzoru wynika wzór z zad. 2.

4. Znajdując zespolone pierwiastki pokazać, że $X^5 - 4$ jest nierozkładalny nad Q.

5. Pokazać, że $\{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} : \ a, b, c \in Q\}$ jest ciałem. Najtrudniejdze jest oczywiście istnienie elementu odwrotnego.

   Aby to uzyskać użyć poniższej metody: wziąć element $A = a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4}$ z $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Szukamy elementu odwriotnego w postaci $B = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4}$ z wymiernymi x, y, z. Wymnożenie AB ma dać 1. To da trzy równania z trzema niewiadomymo x, y, z. Aby taki układ miał rozwiązanie wystarczy aby wyznacznik główny był niezerowy (wynosi on $a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc$, co trzeba sprawdzić). Wystarczy pokazać, że $a^3 + 2b^3 + 4c^3 - 6abc \neq 0$ dla niezerowego układu liczb wymiernych (a, b, c).

6. Pokazać, że $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$ jest liczbą algebraiczną (czyli algebraiczną nad Q) obliczając wielomian $\prod(X - (\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{3} \pm \sqrt{5}))$, gdzie w iloczynie wystąpi 8 czynników.

7. Pokazać, że $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ jest algebraiczna rozważając iloczyn $\prod(X - (\pm\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}\zeta_3^a))$, gdzie $a = 0, 1, 2$ (zatem w iloczynie jest 6 czynników), zaś $\zeta_3 = \cos(120^\circ + i\sin(120^\circ)$.

8. Spróbować wyciągnąć konkluzje z dwóch poprzednich zadań.

9. Rozpatrzyć $\zeta = \cos(72^\circ) + i\sin(72^\circ)$, spełniający $\zeta^4 + \zeta^3 + ... + \zeta + 1 = 0$, a więc też $\zeta^2 + \zeta + 1 + \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = 0$. To ostatnie równanie zapisać przy użyciu podstawienia $t = \zeta + \zeta^{-1} = 2\cos(72^\circ)$, i stąd otrzymać wzór na $\cos(72^\circ)$. Mając $\cos 72^\circ$ podać konstrukcję 5-kąta foremnego.

10. Pokazać, że jeśli α jest algebraiczna to α^{-1}, α^2 też są algebraiczne. Spróbować na początku rozpatrzyć α będące pierwiastkiem jakiegoś konkretnego wielomianu, np. $X^3 + X + 1$.

11. Pokazać, że jeśli α jest przestępna to $\alpha^{-1}, \alpha^2, \alpha^3 + \alpha - 2$ też są przestępne.

12. Niech $a \in Q$. Pokazać, że wielomian $f(X)$ jest nierozkładalny nad Q wtedy i tylko wtedy gdy taki jest wielomian $g(X) = f(X + a)$.

13. Obliczyć $[Q(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : Q(\sqrt{3})], [Q(\sqrt{3}, \sqrt{5}) : Q(\sqrt{15})]$.

14. Mając odcinek o długości 1 skonstruować odcinek o długości $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}+1}{\sqrt[8]{3}+\sqrt{5}}$.

15. Metodą z wykładu rozwiązać równanie $x^3+3x^2-x-3=0$.

16. Znaleźć i podać konstrukcję wierzchołków pięciokąta foremnego przy pomocy samego cyrkla, z uzasadnieniem.

26 lutego 2019 Tadeusz Pezda