KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I ELEMENTY TEORII GALOIS
Lista zadań nr 3.

1. Wypisać wszystkie wielomiany nierozkładalne stopni $2, 3, 4$ nad ciałem dwuelementowym Z_2.
2. Pokazać, że wielomiany $231X^3 + 1892X^2 + 767X + 1234567$ są nierozkładalne nad Q poprzez rozpatrzenie tego wielomianu $\pmod 2$. Podobnie dla wielomianu $545445X^4 + 565X^3 + 6464X^2 + 121212X + 2314567$.
3. Pokazać, że liczb algebraicznych jest przeliczalnie wiele.
4. Czy wielomian $X^4 + 8X^3 + 24X^2 + 37X + 31$ jest rozkładalny nad Q?
5. Czy $X^2 + (\sqrt{2} + 4)X - (12 + 8\sqrt{2})$ jest rozkładalny nad $Q(\sqrt{2})$?
6. Oblicz $[Q(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{2}) : Q]$.
7. Pokazać, że jeśli $[K : Q] = 5$ oraz $\alpha \in K \setminus Q$. Pokazać, że $K = Q(\alpha)$.
8. Stosując metodę z wykładu znleźć wielomian minimalny dla $\sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{2} - 3$.
9. Stosując zadanie z listy nr 2 oraz kryterium Eisensteina pokazać nierozkładalność wielomianu $X^4 - 4X^3 + 13X^2 - 4X - 13$.
10. Przez wszystkie pary punktów $(m, n), (k, l)$ o współrzędnych całkowitych przeprowadzono proste. Czy któraś z tych prostych przechodzi przez $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$?
11. Pokazać, że $Q(\sqrt{2} + \sqrt{7}) = Q(\sqrt{2}, \sqrt{7})$.
12. Czy ciała $Q(\sqrt{2})$ oraz $Q(\sqrt{3})$ są izomorficzne?
13. Czy wielomian $3X^4+7X^3+13X^2+2X-4$ jest rozkładalny nad Q? Zastosować metodę nieokreślonych współczynników.
14. Jak wiemy z wykładu $Q(a, b) = \{\frac{f(a,b)}{g(a,b)}, f(X, Y), g(X, Y) \in Q[X, Y], g(a, b) \neq 0\}$. Pokazać, że $\frac{\sqrt[3]{9}+1}{\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}} \in Q(\sqrt[3]{3}, \sqrt{2})$ wskazując odpowiednie wielomiany f, g.
15. Niech $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. Znaleźć wielomian o wymiernych współczynnikach zerujący α. Jeśli będzie on stopnia 4 to pokazać jego nierozkładalność nad Q.
16. Wymyśleć przykład wielomianu stopnia 4 nad Q, którego nierozkładalność uzyskujemy wykorzystując redukcję $\pmod 3$, a nie uzyskujemy z redukcji $\pmod 2$ (patrz zad.2).

18 marca 2019 Tadeusz Pezda